

Universidade de São Paulo  
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas  
Departamento de Astronomia

Gabriel Teixeira Guimarães

# **Ferramentas para análise de difusão caótica em sistemas dinâmicos**

(Versão Corrigida. O original encontra-se disponível na Unidade)

Maio de 2023



Gabriel Teixeira Guimarães

Tatiana Alexandrovna Michtchenko

# Ferramentas para análise de difusão caótica em sistemas dinâmicos

(Versão Corrigida. O original encontra-se disponível na Unidade)

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Alexandrovna Michtchenko

Maio de 2023



*Ao Bandit. Que um dia nos encontremos neste imenso gramado celestial.*



# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Odilon e Mara, que sempre me apoiaram no desenvolvimento desta dissertação e nas demais escolhas da minha vida que eventualmente me trouxeram até aqui, mesmo que este apoio viesse com alguns “você tem mesmo certeza disso?” ou “eu vou admitir que não entendi nada, mas acho que está no caminho certo”. A distância física é somente um detalhe;

À minha orientadora, Professora Doutora Tatiana Alexandrovna Michtchenko, por toda a paciência, compreensão, conhecimento a mim transmitido e, principalmente, por ter sido a única pessoa que me disse “eu não me importo com as suas notas se você estiver disposto a aprender e a trabalhar”, naquele longínquo 2017;

À Cecília, minha companheira, amiga, revisora e apoiadora de todas as horas, seja no “tenta mais um pouquinho”, no “por que você não vai tomar um ar?” ou nos vários (vários) “você repetiu essa palavra três vezes”. Eu te amo e tenho muita sorte de ter você do meu lado (companheira na época do depósito e esposa na versão corrigida. Obrigado por dizer sim);

Aos professores Sylvio Ferraz-Mello, Ramachrisna Teixeira, Jacques Lépine, Jane Gregório-Hettem e Rita Ynoue, pela paciência em ensinar e por terem sempre perguntado “então não tem nenhuma pergunta?”, depois da qual sempre surgiam várias perguntas;

Ao professor Nelson Callegari, pela diligência com que cumpriu a tarefa de relator, sempre fazendo comentários e correções pertinentes acerca do avanço do meu trabalho, me abrindo várias portas pra melhorias e modificações, além das cervejas tomadas naquele Karaokê no CBDO;

Aos funcionários e ao corpo técnico do IAG, que me permitiram a estrutura e o amparo para seguir desenvolvendo minha pesquisa, mesmo que nunca tenhamos entrado em

contato. Principalmente, obrigado ao Marcel Yoshio Kimura, da CPG-IAG, sem o qual eu muito provavelmente não teria conseguido superar os problemas com minha inscrição do mestrado e não teria sequer começado este projeto;

A todos os meus amigos que me acompanharam nesta longa e moderadamente tortuosa estrada, especialmente os Buenos-Chimichurras (Caetano, Lucas, Hermano, Isa, Erick, Athos) e ao Fernando. Saber que sempre terei vocês pra poder tomar uma cervejinha depois de um dia estressante ou recompensador vale ouro;

Sempre uma menção especial à minha grande amiga Nates, sem a qual eu provavelmente nunca teria pisado na USP naquele longínquo e desesperado Fevereiro de 2012. Obrigado por ter mudado minha vida sem sequer nos conhecermos naquela época;

À CAPES pelo apoio financeiro sob projeto número 88887.496871/2020-00, sem a qual, apesar de todos os problemas e abandonos, eu não teria sido capaz de chegar ao fim deste projeto de mestrado, principalmente durante a pandemia de COVID-19, que destruiu tantas vidas e oportunidades. Que as instituições sejam melhoradas, cobradas e valorizadas, mas nunca esquecidas;

E por último, mas definitivamente não menos importante, a todos os cientistas que, em detrimento de todas as vicissitudes presentes na vida em sociedade, se aventuraram no caótico mar do desconhecido mas que acabaram, em ilhas de estabilidade, entrando em ressonância com os mistérios da natureza, se tornando um porto seguro para todos aqueles dispostos a partir em busca de novos conhecimentos e novas maravilhas que permeiam a nossa existência. Obrigado por fazerem de mim quem sou.

*“Tudo o que vive é único. É impensável que sejam idênticas duas pessoas ou duas roseiras... Onde tentam, à força, fazer desaparecer suas singularidades e peculiaridades, a vida se extingue.”*

Vassili Grossman

*“‘E a gente, Dito? A gente?’ — A gente cresce, uai. O mole judiado vai ficando forte, mas muito mais forte! Trastempo, o bruto vai ficando mole, mole”*

João Guimarães Rosa



# Resumo

Neste trabalho fizemos uma revisão e apresentação das principais ferramentas utilizadas na tarefa de identificar e caracterizar os diferentes regimes de movimento no espaço de fase de um sistema dinâmico. As ferramentas — Superfícies de Seção de Poincaré, *Fast Lyapunov Indicator* (FLI), Número Espectral (SN) e Análise de Wavelets (WAM) — foram apresentadas no *Standard-Map* de Taylor-Chirikov e aplicadas no Problema de Três Corpos Restrito, Circular e Planar (PCR3BP).

Além disso, o fenômeno de “caos estável” ou “caos lento” (Milani e Nobili 1992) foi estudado a partir do fenômeno da difusão caótica, que foi analisado por dois referenciais distintos: o espaço de ações e o espaço de frequências.

O estudo da difusão caótica se mostrou especialmente vantajoso no espaço de frequências, uma vez que há uma variedade de ferramentas e abordagens, como a Equação da Difusão de Laskar e o Desvio Quadrático Médio das Frequências (Laskar 1993, Cincotta e Simó 2000, Marzari et al. 2003). No espaço de ações, a ferramenta utilizada foi o Método da Entropia de Shannon (Giordano e Cincotta 2018), que se mostrou sensível às regiões do espaço de fase onde há caos confinado, mas errática nas regiões fortemente caóticas.

Os tempos de difusão/instabilidade calculados a partir desses coeficientes apresentam concordância qualitativa e quantitativa com os tempos de instabilidade obtidos por integrações diretas, mas concluímos que o estudo de instabilidades no domínio da frequência fornece estimativas confiáveis para escalas de tempo de difusão, além de apresentar um bom custo-benefício em termos de tempo de computação e confiabilidade.



# Abstract

In this work we review and present the main tools used in the task of identifying and characterizing the different motion regimes in the phase space of a dynamical system. The tools — Poincaré Surfaces of Section, Fast Lyapunov Indicator (FLI), Spectral Number (SN) and Wavelet Analysis (WAM) — were presented in Taylor-Chirikov’s Standard-Map and applied in the Planar Circular Restricted Three Body Problem (PCR3BP).

The phenomenon of “stable chaos” or “slow chaos” (Milani e Nobili 1992) was also studied based on the phenomenon of chaotic diffusion, which was analyzed using two different frameworks: the action space and the frequency space.

The study of chaotic diffusion proved to be especially advantageous in the frequency space, since there are a variety of tools and approaches, such as the Laskar Diffusion Equation and the Mean Square Displacement of frequencies (Laskar 1993, Cincotta e Simó 2000, Marzari et al. 2003). In the action space, the tool used was the Shannon Entropy Method (Giordano e Cincotta 2018), which proved to be sensitive to regions of phase space where there is confined chaos and slow diffusion, but erratic in strongly chaotic regions.

The diffusion/instability times calculated from these coefficients show qualitative and quantitative agreement with the instability times obtained by direct integrations, but we conclude that the study of instabilities in the frequency domain provides reliable estimates for diffusion timescales, in addition to presenting a good cost-benefit in terms of computing time and reliability.



# Lista de Figuras

2.1	Estrutura do espaço de fase para quatro valores diferentes de $K$ para o Mapa Padrão de Taylor-Chirikov. Cada espaço de fase é composto por 31 trajetórias iteradas por 4.000 unidades de tempo com $y_0 = \pi$ e $x \in [-\pi, \pi]$ .	32
2.2	Representação no plano $(x, y)$ de quatro condições iniciais que levam a diferentes regimes de movimento: Órbita periódica (pontos fixos pretos no centro da ressonância $1/7$ ), quase-periódica ressonante (cadeias de ilhas ressonantes em vermelho), órbita caótica fraca (condição inicial na camada estocástica entre as ressonâncias, em azul) e órbita caótica forte (região visivelmente caótica, com grande espalhamento de pontos, em verde.) . . .	35
2.3	Evolução temporal do indicador $FLI$ para as órbitas representadas em 2.2. Órbita periódica (preto) estabiliza em um valor constante, órbita quase-periódica (vermelho) aumenta linearmente com o tempo, órbita caótica fraca (azul) aumenta com perfil exponencial enquanto a órbita caótica forte (verde) tem perfil exponencial com aumento mais intenso. . . . .	35
2.4	Mapa Dinâmico utilizando-se o $FLI$ como indicador de caos calculado para uma grade de $401 \times 401$ condições iniciais. Regiões claras e cinzas correspondem a regiões regulares do espaço de fase, enquanto regiões em preto correspondem a regiões de movimento caótico. . . . .	36
2.5	Detalhe do Mapa Dinâmico da Figura 2.4 com mapa- $FLI$ calculado para 1001 condições iniciais de $x(0)$ na seção $y(0) = 0$ . A dinâmica do sistema na região escolhida do espaço de fase é vista em maior riqueza de detalhes, com órbitas periódicas ressonantes representadas por mínimos locais e pontos de sela, máximos locais. . . . .	37

2.6	Comportamento dos indicadores para quatro órbitas em regimes distintos de movimento, demonstrando a relação entre MEGNO e FLI: Curva contínua em cinza corresponde a $FLI(t) = \ln v(t)$ ; curva preta tracejada corresponde a $\overline{FLI}$ ; curva vermelha corresponde à equação 2.10; curva verde corresponde à evolução de $Y(t)$ e curva azul, à evolução de $\langle Y(t) \rangle$ . A linha pontilhada horizontal corresponde ao valor $\langle Y(t) \rangle = 2$ , limítrofe para distinguir entre órbitas regulares e caóticas. . . . .	39
2.7	Espectros de potência de órbitas em regimes de movimento distintos, do canto superior esquerdo, em sentido horário: Periódica (uma frequência bem definida e seus segundo e terceiro harmônicos), quase-periódica ressonante (harmônicos da frequência do pico principal e suas combinações lineares com a segunda frequência independente), caótica forte (espectro com picos indefinidos, análogo ao ruído branco) e caótica fraca (frequências definidas com presença de picos espúrios na vizinhança dos harmônicos). . . . .	41
2.8	Mapa Dinâmico utilizando-se o $SN$ como indicador de caos calculado para uma grade de $401 \times 401$ condições iniciais. Regiões claras e cinzas correspondem a regiões regulares do espaço de fase, enquanto regiões em preto correspondem a zonas caóticas. Regiões em cinza indicam aumento das instabilidades no espaço de fase. . . . .	42
2.9	Detalhe do Mapa Dinâmico da Figura 2.8 com espectro dinâmico calculado para 1001 condições iniciais de $x(0)$ na seção $y(0) = 0$ . A dinâmica do sistema e a variação das frequências independentes são vistas em maior riqueza de detalhes, com órbitas periódicas ressonantes representadas por platôs no espaço de frequências e pontos de sela, como a confluência das frequências. . . . .	44
2.10	Análise de Wavelets da órbita periódica, do canto superior esquerdo, em sentido horário: Sério Temporal obtida $x(t)$ , Espectro de potência da série $\mathcal{F}\{x(t)\}$ , Espectro de potência da evolução do coeficiente da frequência de interesse $ C(f_x, t) $ , Evolução temporal da frequência de interesse $\max  C(f, t) $ e evolução temporal de $ C(f_x, t) $ . A escala do eixo $x$ dos dois painéis à direita é igual. . . . .	47

2.11	Mesmo que 2.10 para órbita quase-periódica ressonante. A escala do eixo $x$ no painel superior direito, vista acima do gráfico, é distinta da escala do eixo $x$ no painel inferior direito, de modo a evidenciar a frequência de longo período da órbita. Nas Figuras 2.12 e 2.13 as escalas também são distintas.	48
2.12	Mesmo que 2.11 para órbita caótica fraca. . . . .	49
2.13	Mesmo que 2.11 para órbita caótica forte. . . . .	50
3.1	Estrutura do espaço de fase no plano $(x, \dot{x})$ para quatro valores distintos da Constante de Jacobi, explicitado no canto superior direito de cada painel. .	54
3.2	Estrutura do espaço de fase no plano $(a, \nu)$ para quatro valores distintos da Constante de Jacobi, explicitado no canto superior direito de cada painel. .	55
3.3	Caracterização da estrutura do espaço de fase para $C_J = 3.23$ . Painéis superiores: Seções de Poincaré no plano $(x, \dot{x})$ (painel superior esquerdo) e no plano $(a, \nu)$ (painel superior direito). Painéis inferiores apresentam Espectro dinâmico da coordenada $X(t)$ no referencial inercial (curva em preto) e $x(t)$ no referencial girante (curva em vermelho) ao longo $\dot{x}(0) = 0$ e $\nu(0) = 0$ . . . . .	58
3.4	Mesma que 3.3, para $C_J = 3.03$ , com o acréscimo da localização nominal das ressonâncias obtida pela Terceira Lei de Kepler. . . . .	59
3.5	Representação da órbita periódica no plano em quatro instantes distintos da integração, no referencial inercial (vermelho) e girante (preto) . . . . .	61
3.6	Aplicação das ferramentas de detecção de caos em uma órbita periódica: Do canto superior esquerdo, em sentido anti-horário: Seção de Superfície de Poincaré, evolução temporal do $FLI$ , evolução temporal da frequência orbital e espectros de potência obtidos pela FFT de $X(t)$ . . . . .	62
3.7	Representação da órbita quase-periódica no plano em quatro instantes distintos da integração, no referencial inercial (vermelho) e girante (preto) . .	63
3.8	Aplicação das ferramentas de detecção de caos em uma órbita quase-periódica: Do canto superior esquerdo, em sentido anti-horário: Seção de Superfície de Poincaré, evolução temporal do $FLI$ , evolução temporal da frequência orbital e espectros de potência obtidos pela FFT de $X(t)$ . . . . .	64

3.9	Representação da órbita caótica fraca no plano em quatro instantes distintos da integração, no referencial inercial (vermelho) e girante (preto) . . . . .	65
3.10	Aplicação das ferramentas de detecção de caos em uma órbita caótica fraca: Do canto superior esquerdo, em sentido anti-horário: Seção de Superfície de Poincaré, evolução temporal do $FLI$ , evolução temporal da frequência orbital e espectros de potência obtidos pela FFT de $X(t)$ . . . . .	66
3.11	Representação da órbita caótica forte no plano em quatro instantes distintos da integração, no referencial inercial (vermelho) e girante (preto) . . . . .	67
3.12	Aplicação das ferramentas de detecção de caos em uma órbita caótica forte: Do canto superior esquerdo, em sentido anti-horário: Seção de Superfície de Poincaré, evolução temporal do $FLI$ , evolução temporal da frequência orbital e espectros de potência obtidos pela FFT de $X(t)$ . . . . .	68
4.1	Evolução temporal do coeficiente de difusão obtido pela entropia de Shannon para diferentes condições iniciais. . . . .	76
4.2	Da esquerda para a direita, em sentido horário: Seção de Poincaré com escala de cor codificada pelo tempo de integração, evolução da frequência orbital $f(t)$ , evolução do $FLI$ e evolução de $D_S$ para $x(0) = 0.3654$ . . . . .	78
4.3	O mesmo que 4.2, para $x(0) = 0.202$ . . . . .	79
4.4	O mesmo que 4.2, para $x(0) = 0.2008$ . . . . .	80
4.5	O mesmo que 4.2, para $x(0) = 0.724$ . No estudo detalhado da órbita caótica forte, fica evidente a complexidade de fenômenos existentes. . . . .	81
4.6	Passos realizados para obtenção do coeficiente de difusão de frequência no espaço de fase definido pela Equação (4.3). Painel superior corresponde ao espectro dinâmico construído considerando-se somente a frequência de maior amplitude do espectro. Painel central corresponde à primeira derivada do espectro com relação à coordenada $x$ , e o painel inferior corresponde à segunda derivada. . . . .	82
4.7	Caracterização de uma seção do espaço de fase do PCR3BP pela aplicação das Seções de Poincaré (painel superior), FLI e SN (curvas vermelha e preta do painel inferior, respectivamente). . . . .	86

4.8	Obtenção da relação $\delta\delta f(x) \propto \delta_t f(t)$ descrita por Laskar (1993) de três formas distintas: Utilização da frequência média das partículas de um Ensemble (painel superior), utilização da frequência da partícula originada na condição inicial no centro do Ensemble (painel central) e utilização da evolução temporal da frequência (painel inferior). Painéis à esquerda correspondem à variação espacial das frequências, enquanto painéis à direita correspondem à variação temporal das frequências. . . . .	89
4.9	Estimativa do Coeficiente de Difusão Caótica a partir da variação temporal da frequência fundamental utilizando-se o Desvio Padrão (painel superior esquerdo), a variância (painel inferior esquerdo), desvio quadrático médio com relação à frequência inicial (painel superior direito) e desvio quadrático médio com relação à frequência média (painel inferior direito) . . . . .	91
4.10	Comportamento do coeficiente de Difusão de Shannon obtido pela Equação 4.2 ao longo de uma seção do espaço de fase . . . . .	92
4.11	Tempos de instabilidade obtidos por diferentes métodos. Painel superior esquerdo: integração direta (curva vermelha representa tempos de escape/colisão, curva preta sólida representa tempos de intersecção entre órbitas e curva preta tracejada corresponde aos tempos de Lyapunov. Painel superior direito: Tempos de difusão obtidos pela definição de Price-Whelan et al. (2015) de $\tau_{robutel}$ utilizando-se um ensemble de partículas (curva preta sólida), uma partícula no centro do ensemble (curva pontilhada vermelha) e utilizando-se os resultados obtidos a partir da WAM. Painel inferior esquerdo: tempos de difusão obtidos a partir do coeficiente de difusão de Marzari (curva em vermelho, $\tau_{var}$ ) e do desvio quadrático médio (curva preta, $\tau_{MSD}$ ). Painel inferior direito: tempos de difusão obtidos pela utilização da entropia de Shannon. A região em cinza corresponde aos tempos de instabilidade típicos obtidos pela integração direta. . . . .	94

A.1	Superfícies de Velocidade Zero calculadas para as diferentes regiões do PCR3BP no plano $(x, y)$ . Curvas coloridas correspondem aos valores da constante de Jacobi para os pontos de Lagrange $L_1$ (curva amarela), $L_2$ (curva verde), $L_3$ (curva azul) e $L_{4,5}$ (rosa). A curva vermelha apresenta um valor arbitrário escolhido . . . . .	116
A.2	Mesmo que a Figura A.1, mas no plano de elementos orbitais $(a, e)$ , construindo a partir do parâmetro de Tisserand. . . . .	117
B.1	Espectro dinâmico obtido pela análise espectral de sete variáveis distintas, do canto superior esquerdo, em sentido horário: $x(t)$ e $X(t)$ (curva preta e curva vermelha, respectivamente), $a(t)$ , $e(t)$ , $\sin(\nu(t))$ , $y(t)$ e $\dot{x}(t)$ . . . . .	120
B.2	Mesmo que a Figura B.1, mas para a Constante de Jacobi $C_J = 3.03$ . . . . .	121
C.1	Canto superior esquerdo: seções de Poincaré, Canto superior direito: Coeficientes de difusão obtidos a partir da Equação de Difusão de Laskar, painel central à direita: Coeficientes de difusão obtidos por MSD, canto inferior direito: Coeficientes de difusão obtidos por SE, Canto inferior esquerdo: comportamento de FLI e SN . . . . .	124
C.2	Tempos de instabilidade obtidos por diferentes métodos. Painel superior esquerdo: integração direta (curva vermelha representa tempos de escape/colisão, curva preta sólida representa tempos de intersecção entre órbitas e curva preta tracejada corresponde aos tempos de Lyapunov. Painel superior direito: Tempos de instabilidade obtidos pela definição de Price-Whelan et al. (2015) de $\tau_{robutel}$ utilizando-se um ensemble de partículas (curva preta sólida), uma partícula no centro do ensemble (curva pontilhada vermelha) e utilizando-se os resultados obtidos a partir da WAM. Painel inferior esquerdo: tempos de instabilidade obtidos a partir do coeficiente de difusão de Marzari (curva em vermelho, $\tau_{var}$ ) e do desvio quadrático médio (curva preta, $\tau_{MSD}$ ). Painel inferior direito: tempos de instabilidade obtidos pela utilização da entropia de Shannon. A região em cinza corresponde aos tempos de instabilidade típicos obtidos pela integração direta. . . . .	125

# Sumário

1. <i>Introdução</i> . . . . .	23
1.1 Mecânica Celeste a.P (antes de Poincaré) . . . . .	23
1.2 Mecânica Celeste d.P (depois de Poincaré) . . . . .	24
1.2.1 Revolução Computacional . . . . .	25
1.3 Caos em Sistemas Planetários: Importância e Consequências . . . . .	25
2. <i>Métodos de Detecção de Fenômenos Caóticos</i> . . . . .	29
2.1 Mapa Padrão de Taylor-Chirikov . . . . .	29
2.2 Ferramentas para Caracterização das Órbitas . . . . .	30
2.2.1 Superfície de Seção de Poincaré (S.O.S) . . . . .	30
2.2.2 Expoentes de Lyapunov . . . . .	32
2.2.2.1 Fast Lyapunov Indicator (FLI) . . . . .	33
2.2.2.2 Mean Exponential Growth of Nearby Orbits (MEGNO) . . . . .	38
2.2.3 Número Espectral (SN) . . . . .	39
2.2.3.1 Mapa Dinâmico . . . . .	41
2.2.3.2 Espectro de Potências Dinâmico . . . . .	43
2.2.4 Wavelets (WAM) . . . . .	45
2.3 Comparação Entre os Métodos . . . . .	50
3. <i>Aplicações ao Problema de Três Corpos Restrito, Circular e Planar (PCR3BP)</i> . . . . .	53
3.1 Estudo no Espaço de Fase . . . . .	53
3.2 Estudo no Espaço de Frequências . . . . .	56
3.2.1 Caracterização Dinâmica para Constante de Jacobi $C_J = 3.23$ . . . . .	57

3.2.2	Caracterização Dinâmica para Constante de Jacobi $C_J = 3.03$ . . .	59
3.3	Estudo de Órbitas Individuais . . . . .	60
3.3.1	Órbita Periódica . . . . .	61
3.3.2	Órbita Quase-Periódica . . . . .	62
3.3.3	Órbita Caótica Confinada (Caos Fraco) . . . . .	64
3.3.4	Órbita Caótica Não-Confinada (Caos Forte) . . . . .	66
4.	<i>Difusão Caótica</i> . . . . .	69
4.1	Difusão no Espaço de Ações . . . . .	71
4.1.1	Modelos Numéricos . . . . .	72
4.2	Difusão no Espaço de Frequências . . . . .	73
4.3	Ferramentas Escolhidas para Estudo da Difusão Caótica . . . . .	74
4.3.1	Análise Freqüencial . . . . .	74
4.3.2	Difusão por Entropia de Shannon . . . . .	74
4.3.2.1	Aplicação do Método da Entropia de Shannon . . . . .	75
4.3.3	Comportamento dos Indicadores . . . . .	77
4.4	Definição dos Coeficientes de Difusão . . . . .	81
4.4.1	Difusão em Frequências . . . . .	81
4.4.1.1	Equação da Difusão . . . . .	81
4.4.1.2	Difusão Como Variação Quadrática Média de Frequências . . . . .	83
4.4.2	Difusão em Ações . . . . .	84
4.5	Estudo dos Coeficientes de Difusão no Espaço de Fase . . . . .	85
4.5.1	Caracterização Dinâmica Inicial do Espaço de Fase . . . . .	86
4.5.2	Verificação da Relação $\delta\delta f(x) \propto \delta_t f(t)$ de Laskar . . . . .	87
4.5.3	Coeficiente de Difusão Como Variação Quadrática Média . . . . .	90
4.5.4	Difusão de Shannon no Espaço de Ações . . . . .	92
4.6	Estimativa dos Tempos de Difusão . . . . .	93
4.7	Conclusões . . . . .	96
5.	<i>Conclusão</i> . . . . .	99
	<i>Referências</i> . . . . .	103

<i>Apêndice</i>	109
<i>A. Fundamentação Teórica</i>	111
A.1 Problema de Três Corpos Restrito Circular e Planar ( <i>PCR3BP</i> )	111
A.1.1 Integral de Jacobi	114
<i>B. Espectros Dinâmicos de Outras Variáveis</i>	119
B.1 Espectros Dinâmicos para $C_J = 3.23$	119
B.2 Espectros Dinâmicos para $C_J = 3.03$	121
<i>C. Detecção de Difusão Caótica para outros <math>C_J</math></i>	123
C.1 Estudo da Difusão para $C_J = 2.9$	123
C.1.1 Coeficientes de Difusão	123
C.1.2 Tempos de Instabilidade	125



## Introdução

### 1.1 Mecânica Celeste a.P (antes de Poincaré)

Em 1687, Isaac Newton publicou sua obra *Principia Mathematica*, na qual hipotetiza a Lei da Gravitação Universal, segundo a qual as forças que mantêm os planetas em suas órbitas devem ser proporcionais ao produto entre as massas e ao inverso do quadrado da distância entre os dois corpos que se orbitem mutuamente. Em *Principia*, Newton foi capaz de derivar as leis de Kepler para o movimento planetário, postuladas entre 1609 e 1619, leis estas derivadas a partir da geometria e aritmética aplicadas às precisas observações de Tycho Brahe.

Ao aplicar suas equações para um planeta orbitando ao redor do Sol, Newton consegue recuperar as órbitas elípticas descritas nos trabalhos de Kepler. Entretanto, são questionadas eventuais irregularidades nas elipses descritas caso sejam consideradas as interações gravitacionais dos planetas entre si.

Neste ponto, o questionamento sobre as perturbações originadas das interações entre os planetas entrou na discussão sobre a validade das Leis de Newton e a estabilidade do Sistema Solar. Estas minúsculas interações se anulam com o tempo ou tendem a se acumular indefinidamente? A Lei da Gravitação Universal de Newton seria capaz de, por si só, determinar toda a dinâmica do Sistema Solar ou estes pequenos termos perturbativos se acumulam de modo a inviabilizar previsões de longo prazo?

Após o sucesso na explicação d'A Grande Desigualdade entre Júpiter e Saturno — relacionada ao fato de Júpiter e Saturno estarem muito próximos de uma ressonância  $5/2$  —, o que revalidou a universalidade da Lei da Gravitação de Newton, Lagrange e Laplace formularam a hipótese da estabilidade do Sistema Solar, na qual o semi-eixo maior

dos planetas não apresentava variações seculares, enquanto excentricidades e inclinações variavam com baixa amplitude, indicando que órbitas keplerianas já não estavam mais fixas no espaço, mas que também apresentavam dois movimentos distintos de precessão.

Entre 1840 e 1846, LeVerrier estudou as variações seculares do Sistema Solar, fundamentado nos trabalhos de Lagrange e Laplace. Nestes estudos, utilizou os valores das massas dos planetas recentemente determinadas com maior precisão e expandiu a função perturbadora em ordens superiores às realizadas anteriormente. LeVerrier concluiu que as equações de Lagrange e Laplace não podiam ser utilizadas para calcular as efemérides em um instante indeterminado do futuro, uma vez que pequenas indeterminações nas massas dos planetas poderiam levar a pequenos divisores (e grandes variações) nas expansões. Consequentemente, as expansões em séries não convergiriam, o que colocava à prova a estabilidade do Sistema Solar proposta por Lagrange e Laplace.

## 1.2 Mecânica Celeste *d.P* (depois de Poincaré)

Poincaré, entre 1892 e 1899, em sua *magnum opus* “Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste”, abordou os problemas da Mecânica Celeste com um novo conjunto de ferramentas desenvolvido nas teorias de Hamilton e Jacobi. Nestes estudos, Poincaré demonstrou que as equações de movimento de três corpos interagindo mutuamente sob suas influências gravitacionais não são integráveis e que não há uma solução analítica, escrita em termos de funções conhecidas, capaz de descrever o movimento de cada um dos corpos, a não ser em um conjunto fechado de condições iniciais (Laskar 2013).

Por outro lado, Poincaré afirmou que, mesmo que as séries utilizadas anteriormente fossem divergentes, serviriam como boa aproximação para o estudo de sistemas planetários em um intervalo de tempo bem definido.

Sua análise da convergência global das séries perturbativas foi de fundamental importância para a análise da estabilidade real do Sistema Solar, mesmo que não em termos práticos, mas ideais (em tempos infinitos). Poincaré também propôs que algumas das séries poderiam convergir a depender das condições iniciais dos corpos estudados. Seu trabalho lançou as bases teóricas para o surgimento do estudo da dinâmica caótica, definida como aquela que apresenta sensibilidade às condições iniciais.

### 1.2.1 Revolução Computacional

Com o surgimento e o avanço das tecnologias computacionais, o estudo de sistemas dinâmicos se tornou mais prático devido à facilidade de integração das equações de movimento. A partir deste momento, tornou-se possível analisar o comportamento das soluções das equações de movimento do Sistema Solar por centenas de milhões de anos, o que permitiu a exploração aprofundada da estabilidade do Sistema Solar.

Nas integrações numéricas de longo período, algumas conclusões puderam ser obtidas (e.g. Applegate et al. 1986, Carpino et al. 1987, Laskar 1990): para algumas dezenas de milhões de anos, é possível calcular as efemérides dos planetas do Sistema Solar com relativa precisão, assim como são válidas as aproximações obtidas pelas equações de Lagrange e Laplace. No entanto, para centenas de milhões de anos, detalhes sobre a evolução das órbitas dos planetas rochosos tornam-se imprevisíveis, o que levou à caracterização de suas órbitas como caóticas. Sussman e Wisdom (1988) concluíram, nos experimentos com longas integrações, que a órbita de Plutão começa a se tornar caótica, mas que devido à sua baixa massa, esta *caoticidade* não se propaga para o restante dos planetas exteriores.

A partir destas premissas, Laskar (2013) afirma que as trajetórias devem ser estudadas como uma dentre diversas outras nas imediações de suas condições iniciais, de modo a analisar como as órbitas difundem nesta região do sistema e atestar sua efetiva estabilidade, não mais do sistema como um todo, mas de regiões do sistema em que pode haver uma maior complexidade de fenômenos, devido às condições iniciais dos planetas ali presentes e de sua vizinhança.

Assim, passou a se tornar necessário o desenvolvimento e a utilização de ferramentas para caracterizar dinamicamente os sistemas estudados e quantificar os processos que levam sistemas dinâmicos a apresentar uma evolução irregular — comumente referido como Difusão Caótica (Morbidelli 2002) —, como forma de se auxiliar a interpretação dos resultados obtidos pela integração numérica das equações de movimento.

## 1.3 Caos em Sistemas Planetários: Importância e Consequências

Além do desenvolvimento teórico e computacional, na astronomia houve também o desenvolvimento das capacidades observacionais. Com o lançamento das sondas Voyager I e II em 1977, pela primeira vez a humanidade observou de perto corpos distantes que até

então somente haviam sido observados por telescópios terrestres.

Um destes corpos foi o satélite de Saturno, Hipérion. Além de ter uma geometria irregular, o satélite sofre grandes perturbações de Saturno, tornando sua dinâmica rotacional de difícil estudo.

Em 1980, a sonda Voyager I fotografou Hipérion. Após 286 dias, a sonda Voyager II fotografou o satélite novamente. Integrações numéricas realizadas com as informações coletadas pela primeira sonda, por mais precisas que fossem, chegariam a resultados com erros da ordem de 100 vezes superiores às incertezas inerentes à medida original. Consequentemente, uma vez que a dinâmica de rotação do satélite tem escalas de tempo da ordem de poucos dias, no momento da chegada da Voyager II a configuração de Hipérion poderia ser completamente distinta do resultado obtido pela integração numérica (Ferraz-Mello 2021).

Este resultado é um exemplo em curtas escalas de tempo da importância dos fenômenos caóticos no estudo dos corpos celestes, tanto para análise da validade dos nossos modelos quanto para verificação da diversidade de fenômenos que um corpo pode apresentar, e é apenas um representante de um amplo conjunto de sistemas cuja dinâmica complexa apresenta barreiras à previsibilidade ilimitada no tempo.

Em escalas de tempo superiores, a utilização de ferramentas computacionais para integrar as equações de movimento permitiu aos astrônomos obter respostas sobre, por exemplo, a origem das estruturas observadas no Cinturão de Asteróides do Sistema Solar, como as Falhas de Kirkwood, regiões nas quais há poucos ou nenhum asteróide em órbita. Estas falhas são coincidentes com as regiões das ressonâncias com Júpiter.

A falha na região da ressonância 3/1 com Júpiter, chamada “Falha de Alinda”, apresenta um vazio de asteróides, mesmo que sua vizinhança imediata seja povoada. A utilização de integrações de longo período e distintas ferramentas de análise, como os expoentes de Lyapunov e mapeamentos do sistema em Superfícies de Seção, permitiu a Wisdom (1983), utilizando um modelo de três corpos composto por Sol–Júpiter–asteróide, demonstrar que partículas na região desta ressonância têm sua excentricidade excitada a valores elevados, até que suas órbitas passem a cruzar com os planetas internos, levando a encontros próximos e colisões em longos períodos de tempo, o que justificaria a ausência de corpos na região.

Esta conclusão, entretanto, levou à descoberta de fenômenos mais complexos, como capturas temporárias e transições súbitas entre ressonâncias, permitindo que se verifique

a existência pontual de corpos nas falhas de Kirkwood, como é o caso da ressonância 2/1, onde há a Falha de Hécuba.

Nesta região, o modelo utilizado por Wisdom (1983) não é o suficiente para explicar a estrutura observada na região do cinturão de asteróides. No modelo de três corpos, somente a excitação da excentricidade não foi capaz de explicar a falha, tendo sido necessária a introdução da perturbação dos demais gigantes gasosos (Roig et al. 2002), além da inclinação de Júpiter.

Com a adição destas perturbações, surgem intrincadas estruturas na região das ressonâncias, nas quais se alternam microrregiões caóticas e regulares, o que se mostrou de acordo com a observação de eventuais asteróides dentro da ressonância 2/1, sem haver no entanto um agrupamento denso destes corpos.

Por outro lado, nem todas as ressonâncias estão puramente associadas aos fenômenos caóticos e à ausência de corpos. Há regiões nas quais há acúmulo de asteróides, como é o caso do grupo das Hildas, na ressonância 3/2. Nesta ressonância, há um agrupamento de asteróides que não se vê, por exemplo, nas falhas de Alinda e Hécuba.

A concentração de corpos se deve ao fato de, nesta região, as excentricidades não alcançarem valores suficientes para que haja intersecção com os planetas interiores, permitindo que, mesmo que suas órbitas tenham características caóticas, asteróides permaneçam ali por tempos superiores, difundindo lentamente para outras regiões.

Esta difusão pode levar escalas de tempo incompatíveis com os períodos físicos típicos do sistema para se pronunciar. Consequentemente, mesmo que estejam em um regime de movimento caótico, o movimento destes corpos é essencialmente estável no que tange ao seu tempo de existência, como é o caso de asteróides que se encontram em regiões — a priori — instáveis do Sistema Solar (Milani e Nobili 1992).

Estes são alguns exemplos que mostram a diversidade de consequências advindas dos fenômenos caóticos. Além de ditar as estruturas dinâmicas de um sistema, levando a ilhas de estabilidade ou extensos vazios, a complexidade de fenômenos também se manifesta em escalas de tempo distintas, que são capazes de lançar luz às observações que realizamos, nos diversos sistemas dinâmicos que estudamos.

O estudo da estabilidade de sistemas planetários, além de permitir a compreensão da estrutura dinâmica ao nosso redor, permite otimizar os recursos alocados para missões espaciais (Todorović et al. 2020) e compreender os processos de formação e evolução dos

distintos sistemas planetários que somos capazes de observar, de modo a aumentar nossa compreensão da nossa origem e do nosso futuro, bem como das nossas perspectivas com relação às escalas de tempo relevantes para nosso desenvolvimento (Lépine et al. 2017).

Deste modo, o estudo detalhado e a caracterização dinâmica destes sistemas exige a aplicação de ferramentas capazes de nos indicar a estabilidade de tais sistemas. Esta dissertação apresenta algumas destas ferramentas, analisa suas vantagens e desvantagens, bem como reflete sobre suas abrangências e limitações, e como elas podem nos auxiliar a desvendar estruturas delicadas nos sistemas estudados.

## Métodos de Detecção de Fenômenos Caóticos

Neste capítulo serão apresentadas diversas ferramentas para detecção de caos e caracterização de órbitas e regiões do espaço de fase em caóticas e regulares. As ferramentas são: i) Seções de Superfície de Poincaré (*SOS*), ii) o *Fast Lyapunov Indicator (FLI)*, iii) a Análise do Número Espectral (*SN*) e iv) Método da Análise de Wavelets (*WAM*). A aplicação dessas ferramentas será brevemente apresentada no Mapa Padrão de Taylor-Chirikov (Chirikov 1979).

### 2.1 Mapa Padrão de Taylor-Chirikov

O Mapa Padrão de Taylor-Chirikov (Chirikov 1979) consiste em um mapeamento discreto que representa a dinâmica do *Kicked-Rotor* (Lichtenberg e Lieberman 1992) e descreve um pêndulo unidimensional com momento de inércia  $I$  que sofre um impulso periódico com período  $T$  e amplitude do impulso  $K$ . A Hamiltoniana do problema pode ser escrita como

$$\mathcal{H}(p, \theta, t) = p^2/2I + K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n), \quad (2.1)$$

onde  $p$  é o momento conjugado de  $\theta$ , a posição angular do pêndulo no plano.

O sistema de equações de movimento obtido a partir da Hamiltoniana pode ser discretizado na forma do sistema adimensional de equações (2.2), com  $T = 1$  e  $I = 1$ , dependente somente das condições iniciais  $p_0$  e  $\theta_0$  e do parâmetro  $K$ .

Este mapeamento, dado pelas Equações (2.2), descreve superfícies de seção de Poincaré relativas ao movimento descrito pela Equação (2.1), cuja fundamentação e funcionamento serão apresentados na próxima seção.

A discretização do sistema, exposta no sistema de Equações (2.2), corresponde à posição

$\theta_n$  e ao momento  $p_n$  após o  $n$ -ésimo impulso e apresenta uma grande vantagem técnica no seu estudo, uma vez que as equações são iteradas ao invés de integradas.

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + K \sin(p_n + \theta_n) \quad \text{mod } 2\pi \\ \theta_{n+1} = p_n + \theta_n \quad \text{mod } 2\pi. \end{cases} \quad (2.2)$$

Deste modo, o estudo deste sistema torna-se de grande interesse, uma vez que permite a verificação de uma diversidade de regimes dinâmicos sob única dependência do parâmetro  $K$  e das condições iniciais  $p_0$  e  $\theta_0$  escolhidas.

Nos estudos realizados neste capítulo, as coordenadas  $p_n$  e  $\theta_n$  são chamadas  $x_i$  e  $y_i$  respectivamente, para adequação às representações presentes na literatura, bem como o parâmetro  $K$  passa a ser denominado *parâmetro de perturbação*.

## 2.2 Ferramentas para Caracterização das Órbitas

### 2.2.1 Superfície de Seção de Poincaré (S.O.S)

Uma das mais tradicionais ferramentas de detecção de caos, as Superfícies de Seção de Poincaré permitem caracterizar órbitas e regiões do espaço de fase em regulares ou caóticas com relativa simplicidade (Henon e Heiles 1964).

Sua aplicação é condicionada a sistemas de dois graus de liberdade nos quais a energia total se conserva. Deste modo, é possível calcular uma variável do problema em função da energia e das outras três variáveis, como no caso do Problema de Três Corpos Restrito, Plano e Circular (vide apêndice A).

A fundamentação do método consiste no fato de que, determinando-se uma variável em função das demais, o movimento no espaço de fase quadridimensional está restrito a um volume definido pelas três variáveis restantes. Em seguida, fixamos uma segunda variável arbitrária, de modo a definir um plano, restringindo o movimento da partícula a pontos dispostos neste plano.

A importância das Superfícies de Seção de Poincaré consiste em restringir um movimento no espaço de fase quadridimensional a uma superfície bidimensional na qual é possível visualizar de modo mais intuitivo os diversos regimes de movimento do sistema.

Uma vez que o Mapa Padrão de Taylor-Chirikov é definido como a representação da Seção de Poincaré de um sistema mecânico simples, não é necessária a escolha de planos.

No entanto, a sua topologia reproduz estruturas dinâmicas vistas nas Seções de Poincaré obtidas para outros sistemas mais complexos. Elas são:

- Pontos fixos se referem a órbitas periódicas: A trajetória cruza o plano sempre no mesmo ponto a intervalos regulares;
- Curvas contínuas se referem a órbitas quase-periódicas: A trajetória cruza a superfície em posições diferentes, formando estruturas contínuas no espaço de fase para longos períodos de integração/iteração:
  - Estas curvas podem corresponder órbitas quase-periódicas ressonantes (cadeias de ilhas de libração ao redor de certos ângulos) ou a órbitas quase-periódicas não ressonantes (curvas de circulação entre  $0$  e  $2\pi$ ).
- Pontos espalhados em uma área da superfície se referem a trajetórias caóticas, quando a partícula cruza a superfície se maneira imprevisível e aleatória.

Na Figura 2.1 é possível verificar trajetórias obtidas pela iteração das equações (2.2) para quatro diferentes valores do parâmetro perturbativo  $K$ , 0.2, 0.7, 0.9 e 1.3. Cada plano é composto por 31 trajetórias iteradas por 4.000 unidades de tempo com  $y_0 = \pi$  e  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Para adequação aos resultados encontrados na literatura (Laskar 1993; Froeschlé et al. 1997; Ferraz-Mello et al. 2008), foi realizada a seguinte transformação:  $\forall x_n, y_n > \pi, x_n = x_n - 2\pi$  e  $y_n = y_n - 2\pi$ , de modo a centralizar a ressonância maior em  $(x, y) = (0, 0)$ .

A estrutura do espaço de fase se torna mais complicada conforme aumenta o valor do parâmetro  $K$ : Curvas lisas de circulação entre  $[-\pi, \pi]$  são distorcidas, transformando-se em ilhas ressonantes. Ao redor das ilhas surgem regiões de movimento caótico que aumentam proporcionalmente ao valor de  $K$ .

Para o valor de  $K = 1.3$ , restam somente cadeias de ilhas maiores, cercadas por um mar de caos. Este comportamento se mantém à medida em que  $K$  aumenta, até que o espaço de fase esteja dominado por caos.

A variedade de estruturas permite inferir regiões de movimento caótico ou regular no espaço de fase, apresentando um aspecto qualitativo da dinâmica do sistema não-linear.

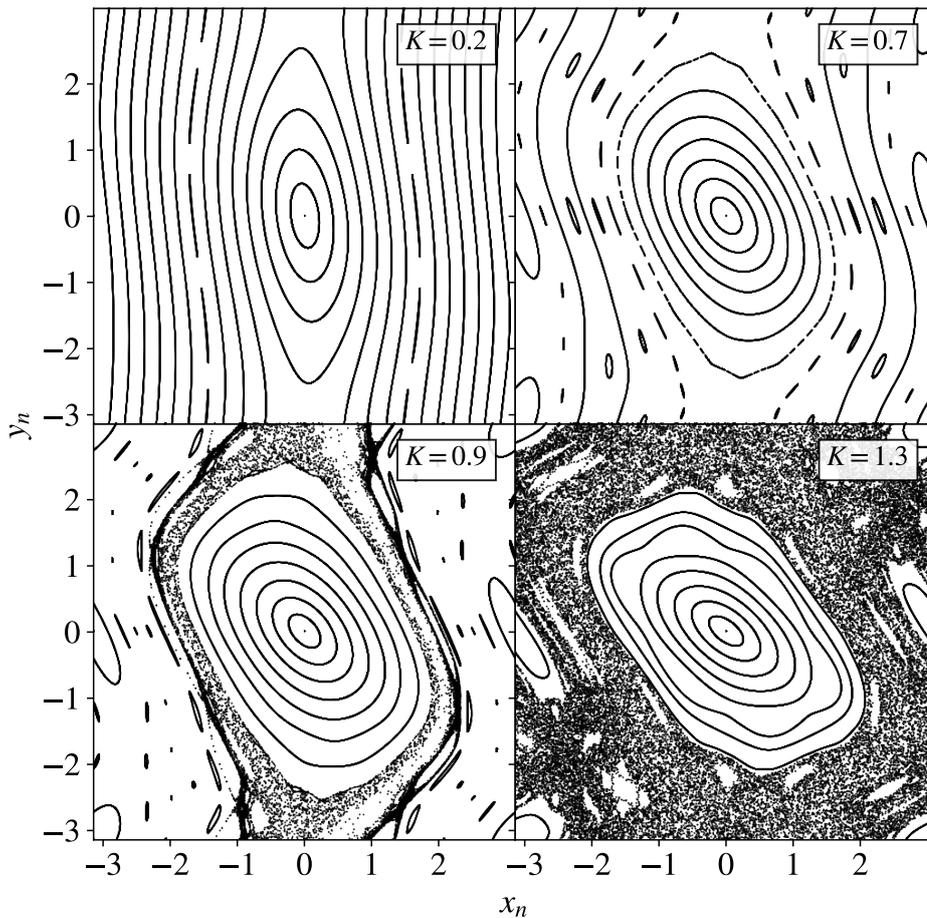


Figura 2.1: Estrutura do espaço de fase para quatro valores diferentes de  $K$  para o Mapa Padrão de Taylor-Chirikov. Cada espaço de fase é composto por 31 trajetórias iteradas por 4.000 unidades de tempo com  $y_0 = \pi$  e  $x \in [-\pi, \pi]$ .

### 2.2.2 Expoentes de Lyapunov

As Seções de Superfície de Poincaré constituem uma poderosa ferramenta para caracterizar o espaço de fase de um sistema e diferenciar entre distintos regimes de movimento. No entanto, esta caracterização restringe-se aos aspectos qualitativos do movimento, e mesmo assim somente no caso de sistemas com dois graus de liberdade.

Uma tradicional ferramenta capaz de quantificar a informação sobre o comportamento caótico de uma órbita é o Expoente de Lyapunov, representante dos **métodos variacionais** de detecção de fenômenos caóticos. Os expoentes de Lyapunov são definidos como a taxa da divergência exponencial da distância  $d(t)$  no espaço de fase entre duas órbitas com condições iniciais infinitesimalmente próximas uma da outra.

Consideremos duas órbitas, com separação inicial no espaço de fase  $d_0 = d(0)$ . É

possível estimar a taxa de divergência exponencial desta separação como

$$|d(t)| \approx e^{\lambda t} |d_0|, \quad (2.3)$$

onde  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov. Invertendo-se esta relação, o expoente  $\lambda$  pode ser calculado por

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lim_{d_0 \rightarrow 0} \ln \left( \frac{d(t)}{d_0} \right). \quad (2.4)$$

Uma das importâncias dos expoentes de Lyapunov são *Tempos de Lyapunov*, definidos como o inverso do Expoente calculado,  $\tau_{lyap} = 1/\lambda$ , que são uma primeira quantificação do tempo necessário para que o caos de uma órbita se torne aparente, bem como um limite a partir do qual não é mais possível recuperar informações sobre as condições iniciais da órbita.

Apesar de sua importância, o cálculo dos expoentes de Lyapunov é complexo, uma vez que  $\lambda$  somente está definido no limite  $t \rightarrow \infty$ , em alguns casos sendo necessários longos períodos de integração para se obter estimativas precisas dos expoentes e dos tempos de Lyapunov, principalmente nos casos de caos lento (ou estável, Milani e Nobili 1992).

### 2.2.2.1 Fast Lyapunov Indicator (FLI)

Deste modo, Froeschlé et al. (1997) propuseram o *Fast Lyapunov Indicator*, que se baseia na evolução temporal de um vetor tangente ao sistema de equações.

Consideremos o conjunto de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x(t)); \\ \dot{v}(t) &= (DF)v(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $\dot{x}$  é o sistema de equações de movimento do sistema e  $\dot{v}(t)$  descreve as equações variacionais do sistema como evolução de um vetor tangente ao plano das equações de movimento.  $DF$  é a matriz Jacobiana das equações do sistema, obtida a partir de uma expansão em séries de Taylor ao redor de uma perturbação mínima na condição inicial, correspondente à separação inicial infinitesimal  $d_0$ .

O sistema de equações variacionais é integrado simultaneamente às equações de movimento. Ao final do processo, define-se o novo indicador de caos

$$FLI(x(0), v(0), T) = \sup_{0 < k < T} \log |v(k)|. \quad (2.6)$$

É importante frisar que o indicador não apresenta sensibilidade às condições iniciais do vetor tangente  $v(0)$  (Lega e Froeschlé 2001), e que o tempo de Lyapunov  $\tau_{lyap}$  pode ser resgatado pela relação  $\tau_{lyap} = \lim_{t \rightarrow \infty} t/FLI(t)$  (Lega et al. 2010).

A ferramenta foi aplicada no Mapa Padrão para demonstrar seu funcionamento. No mapa foram escolhidas quatro condições iniciais que levam a regimes de movimento distintos: uma órbita periódica, uma quase-periódica ressonante, uma caótica fraca na camada estocástica entre dois regimes de movimento distintos e uma órbita caótica forte em uma região do espaço de fase dominada por movimentos caóticos.

A distinção entre a órbita caótica fraca e a forte se dá pelo comportamento da órbita no espaço de fase: a primeira apresenta comportamento irregular em uma região confinada e restrita do espaço de fase, enquanto a segunda apresenta comportamento irregular amplamente perceptível, ocupando maior área do espaço de fase.

Na Figura 2.2 é possível ver estas órbitas no espaço de fase, enquanto na Figura 2.3 o comportamento do indicador  $FLI$  pode ser verificado para cada uma destas condições iniciais.

Cada uma das condições iniciais foi selecionada com  $y(0) = \pi$  (ou  $y(0) = 0$  após a mudança de variáveis citada anteriormente) e iterada por  $n = 2^{12}$  passos.

Na Figura 2.3, verifica-se o comportamento do indicador nas quatro situações: para a órbita periódica, em  $t \approx 10$  o indicador estabiliza num valor fixo. Para a órbita quase-periódica ressonante, o  $FLI$  aumenta linearmente com o tempo da forma  $FLI \propto \alpha t$ , onde  $\alpha$  depende da natureza da curva, se ela se encontra na curva quase-periódica não ressonante ou numa curva ressonante (Fouchard et al. 2002). Para as órbitas caóticas, no entanto, o seu aumento é acelerado, adquirindo perfil exponencial rapidamente.

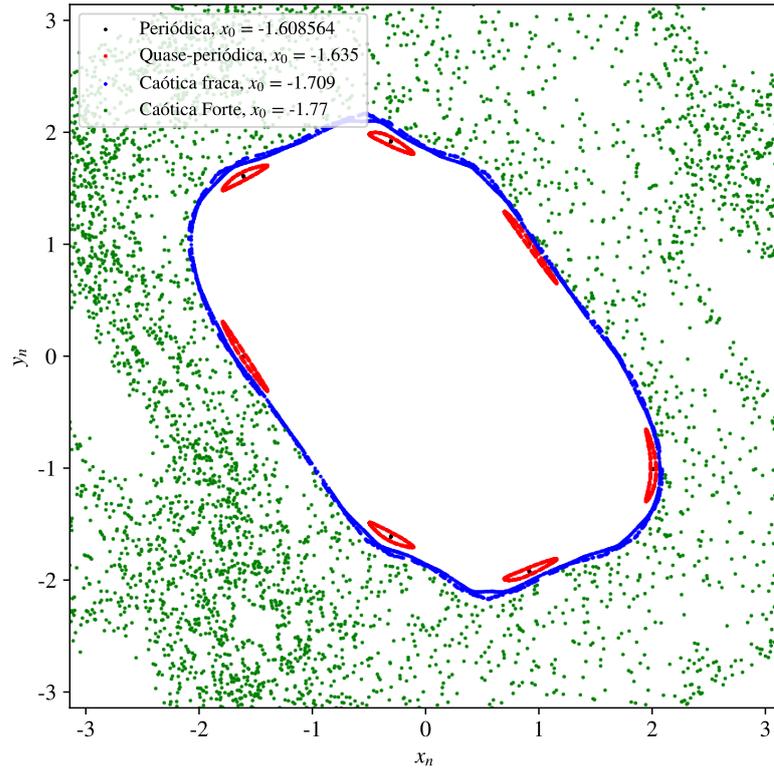


Figura 2.2: Representação no plano  $(x, y)$  de quatro condições iniciais que levam a diferentes regimes de movimento: Órbita periódica (pontos fixos pretos no centro da ressonância  $1/7$ ), quase-periódica ressonante (cadeias de ilhas ressonantes em vermelho), órbita caótica fraca (condição inicial na camada estocástica entre as ressonâncias, em azul) e órbita caótica forte (região visivelmente caótica, com grande espalhamento de pontos, em verde.)

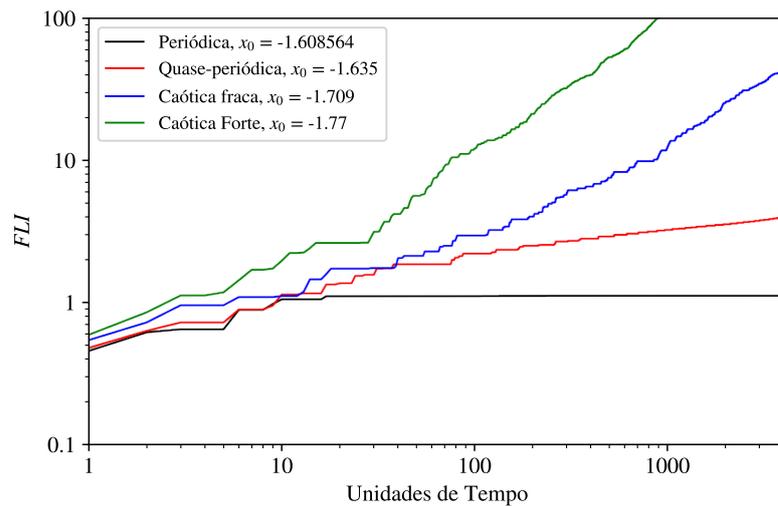


Figura 2.3: Evolução temporal do indicador  $FLI$  para as órbitas representadas em 2.2. Órbita periódica (preto) estabiliza em um valor constante, órbita quase-periódica (vermelho) aumenta linearmente com o tempo, órbita caótica fraca (azul) aumenta com perfil exponencial enquanto a órbita caótica forte (verde) tem perfil exponencial com aumento mais intenso.

Mapa Dinâmico. Uma vez que o indicador discrimina com precisão entre os diferentes regimes de movimento, é possível utilizar a ferramenta para realizar uma caracterização do espaço de fase do sistema, gerando um **Mapa Dinâmico**: seleciona-se um *grid* de  $n \times m$  condições iniciais igualmente espaçadas entre si e realiza-se a integração numérica de cada uma delas. Ao fim de cada integração, um valor do *FLI* será calculado e os  $n \times m$  valores do *FLI* são plotados em função das condições iniciais, de modo a obtermos o Mapa Dinâmico, no qual é possível verificar quais regiões do espaço de fase levam a órbitas caóticas (tons escuros), periódicas e quase periódicas (tons de branco e cinza, respectivamente). Um exemplo desta aplicação pode ser visto na Figura 2.4 para  $401 \times 401$  condições iniciais integradas por  $t = 2^{10}$  unidades de tempo e  $K = 1.3$ :

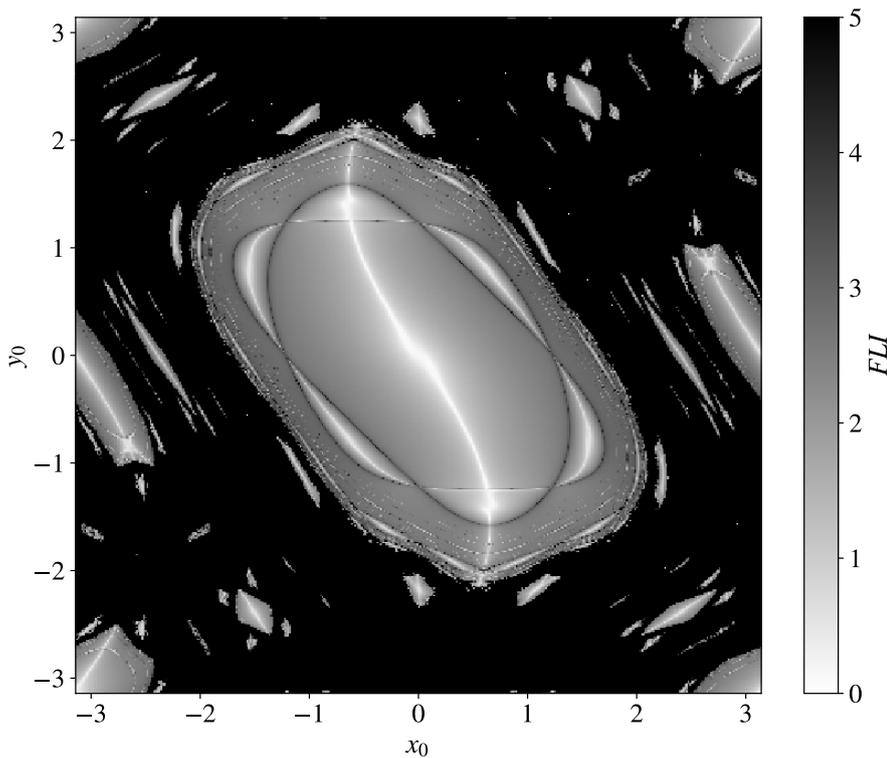


Figura 2.4: Mapa Dinâmico utilizando-se o *FLI* como indicador de caos calculado para uma grade de  $401 \times 401$  condições iniciais. Regiões claras e cinzas correspondem a regiões regulares do espaço de fase, enquanto regiões em preto correspondem a regiões de movimento caótico.

Espectro-*FLI*. Foi construído também um **Espectro-*FLI*** ao longo de uma seção em uma região no Mapa Dinâmico na Figura 2.4 na qual fixou-se o valor de  $y_0 = 0$  e  $x_0$  foi integrado para 1001 condições iniciais igualmente espaçadas entre si. O resultado pode

ser visto na Figura 2.5. Este tipo de análise por seção permite o estudo detalhado do comportamento do indicador ao longo de diferentes regiões do espaço de fase.

No painel inferior da Figura 2.5 as regiões caóticas e regulares são evidenciadas pelo comportamento do indicador. Além de discernir entre os diferentes regimes de movimento, o comportamento do indicador ao longo da seção permite a identificação de pontos de sela de ressonâncias (máximos locais) e centros das ressonâncias (mínimos locais). A ferramenta permite a evidente discriminação de regiões de regime de movimento caótico devido à rápida saturação do valor do FLI para órbitas caóticas.

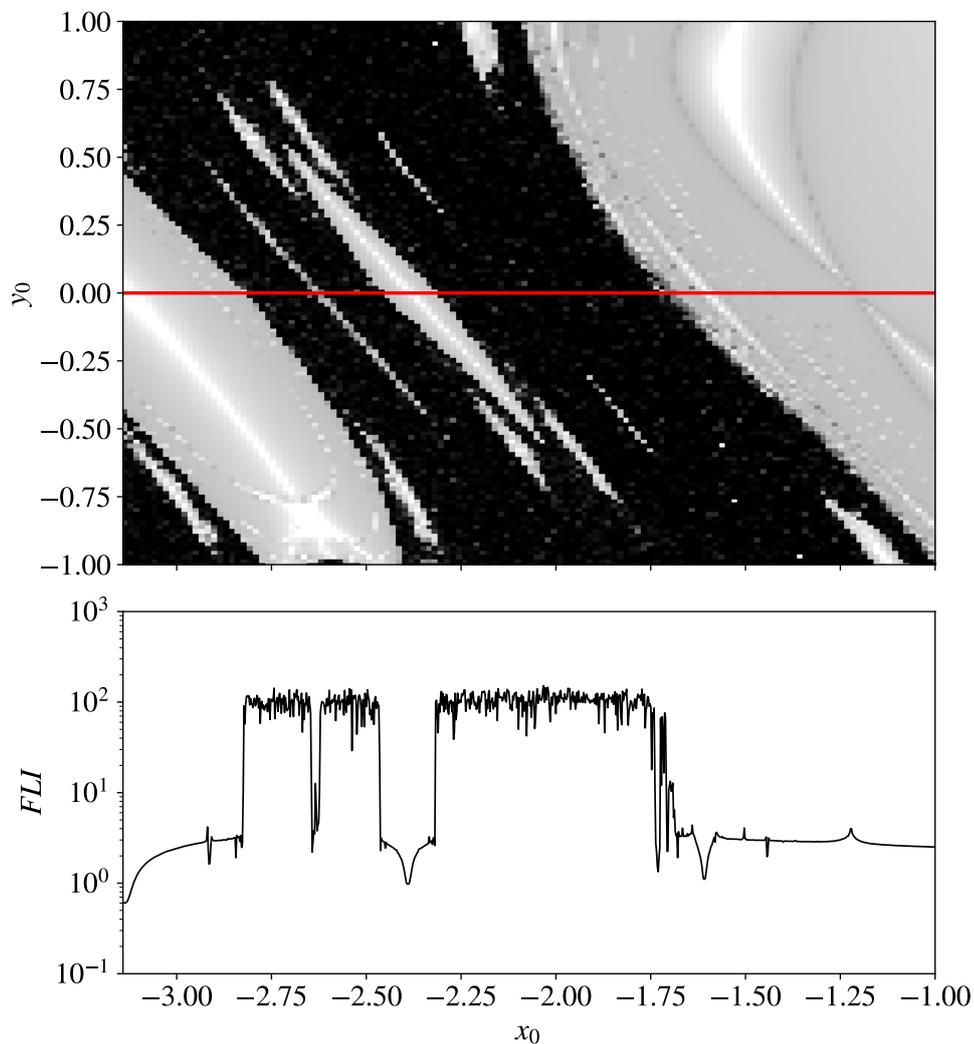


Figura 2.5: Detalhe do Mapa Dinâmico da Figura 2.4 com mapa-*FLI* calculado para 1001 condições iniciais de  $x(0)$  na seção  $y(0) = 0$ . A dinâmica do sistema na região escolhida do espaço de fase é vista em maior riqueza de detalhes, com órbitas periódicas ressonantes representadas por mínimos locais e pontos de sela, máximos locais.

### 2.2.2.2 Mean Exponential Growth of Nearby Orbits (MEGNO)

Além do Fast Lyapunov Indicator, um outro representante bastante utilizado dos métodos variacionais de detecção de fenômenos caóticos é o *Mean Exponential Growth of Nearby Orbits (MEGNO)* introduzido por Cincotta e Simó (2003).

Esta ferramenta tem sido extensamente aplicada no estudo de sistemas dinâmicos (Cincotta e Simó 2000, Martí et al. 2016, Alves Silva et al. 2021) devido à possibilidade de caracterizar órbitas em curtos tempos de integração, assim como de se obter uma estimativa do maior expoente de Lyapunov em tempos menores que os exigidos pela aplicação tradicional do método.

Sua fundamentação é a mesma do Fast Lyapunov Indicator e consiste na integração simultânea das equações de movimento do sistema e das equações variacionais obtidas à partir da evolução do vetor tangente ao fluxo de movimento.

Considere-se um sistema de equações  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  e suas respectivas equações variacionais  $\dot{\mathbf{v}} = D(\dot{\mathbf{x}})v$ . Assim, o MEGNO pode ser definido como

$$Y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\mathbf{v}} t' dt'. \quad (2.7)$$

Além da definição geral do indicador  $Y$ , os autores introduzem o valor médio  $\langle Y \rangle$

$$\langle Y \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t Y(t') dt' \quad (2.8)$$

que, no caso de órbitas periódicas e quase periódicas, tende  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle Y \rangle (t) = 2$ .

No caso de órbitas caóticas, tanto  $Y(t)$  quanto  $\langle Y \rangle (t)$  crescem linearmente com a proporção  $\approx \lambda t$ , onde  $\lambda$  é o máximo expoente de Lyapunov da órbita.

Relação com o FLI Além da relação entre  $\langle Y \rangle (t)$  e o  $\lambda$ , Mestre et al. (2011) obtiveram uma relação analítica entre o MEGNO e o Fast Lyapunov Indicator, na qual o *FLI* era definido simplesmente como  $FLI = \ln v(t)$ .

Após uma breve manipulação algébrica, a equação 2.7 pode ser reescrita de modo a se obter a relação

$$Y(t) = 2[FLI(t) - \langle FLI \rangle], \quad (2.9)$$

onde  $\langle FLI \rangle$  tem o mesmo significado que na Equação (2.8). No caso de Mapas e sistemas discretos, a relação é escrita como

$$Y(t) = 2[FLI(t) - \langle FLI \rangle] + \mathcal{O}(\lambda), \quad (2.10)$$

onde  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov e se torna desprezível na relação acima.

O indicador MEGNO não será utilizado nesta dissertação, entretanto seu comportamento e a relação com o  $FLI$  são demonstrados na Figura 2.6, obtida para as condições iniciais estudadas anteriormente.

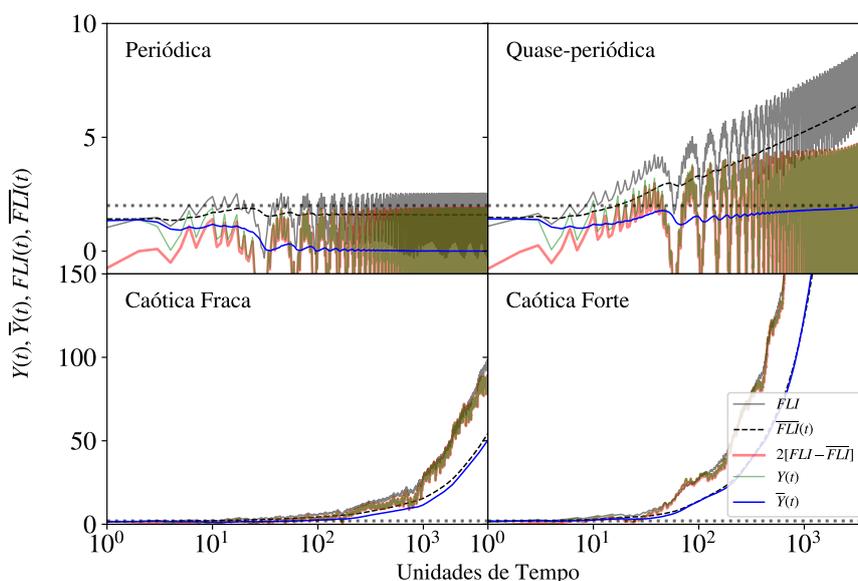


Figura 2.6: Comportamento dos indicadores para quatro órbitas em regimes distintos de movimento, demonstrando a relação entre MEGNO e FLI: Curva contínua em cinza corresponde a  $FLI(t) = \ln v(t)$ ; curva preta tracejada corresponde a  $\overline{FLI}$ ; curva vermelha corresponde à equação 2.10; curva verde corresponde à evolução de  $Y(t)$  e curva azul, à evolução de  $\langle Y(t) \rangle$ . A linha pontilhada horizontal corresponde ao valor  $\langle Y(t) \rangle = 2$ , limítrofe para distinguir entre órbitas regulares e caóticas.

### 2.2.3 Número Espectral (SN)

Mais um método de detecção e quantificação de fenômenos caóticos é o *Método do Número Espectral* representante dos **métodos espectrais** de detecção de fenômenos caóticos (Michtchenko e Ferraz-Mello 2001, Barrio et al. 2009). Este método se baseia na Transformada de Fourier da série temporal obtida através da integração de uma órbita de determinadas condições iniciais.

Sua fundamentação como ferramenta de discriminação entre órbitas regulares e caóticas se dá pelo fato de órbitas regulares serem periódicas e quase periódicas, com frequências independentes constantes no tempo, enquanto no caso de órbitas caóticas, suas frequências

independentes variam no tempo, resultando em trajetórias irregulares (Laskar 1990).

O Método do Número Espectral diferencia órbitas regulares de caóticas tomando como base a quantidade de frequências com amplitude acima de um limite arbitrário chamado *threshold*, em geral o suficiente para não levar em consideração ruídos resultantes das integrações numéricas. Esta quantidade é chamada de Número Espectral, ou número de picos. Nesta dissertação, a aplicação do Método do Número Espectral utilizou um *threshold* de 5% da amplitude da frequência de maior intensidade.

Sua aplicação na série temporal de uma órbita regular resulta em um espectro de potências marcado por um número contável de picos, que estão associados às frequências independentes, em número igual ao de graus de liberdade do sistema. Órbitas periódicas apresentam somente uma das frequências independentes e seus respectivos harmônicos, enquanto órbitas quase-periódicas apresentam também combinações entre as frequências independentes.

No caso de órbitas caóticas, as frequências independentes variam no tempo, resultando em trajetórias irregulares. Quando o Método do Número Espectral é aplicado na série temporal resultante da integração desta órbita, surgem picos de frequências espúrios, fazendo com que o Número Espectral seja elevado, uma vez que suas frequências independentes não são mais constantes.

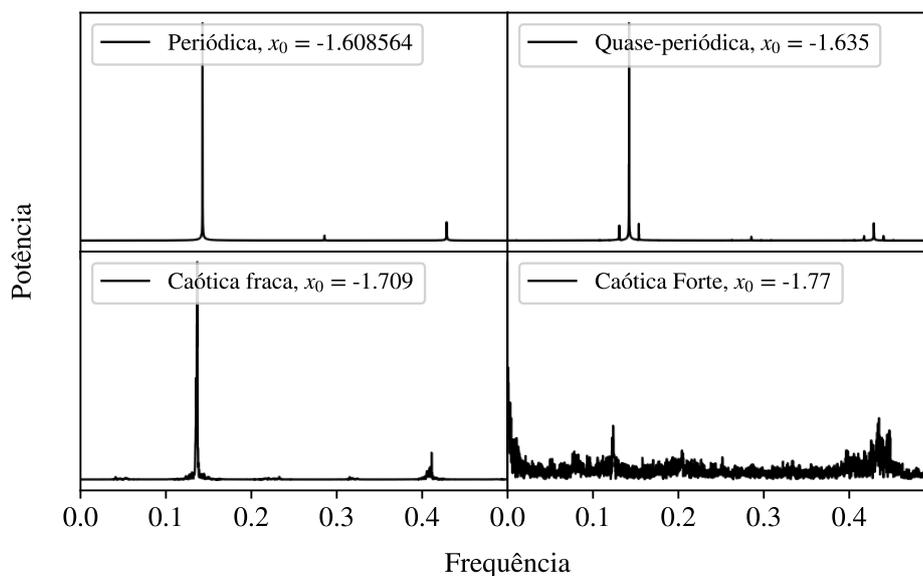


Figura 2.7: Espectros de potência de órbitas em regimes de movimento distintos, do canto superior esquerdo, em sentido horário: Periódica (uma frequência bem definida e seus segundo e terceiro harmônicos), quase-periódica ressonante (harmônicos da frequência do pico principal e suas combinações lineares com a segunda frequência independente), caótica forte (espectro com picos indefinidos, análogo ao ruído branco) e caótica fraca (frequências definidas com presença de picos espúrios na vizinhança dos harmônicos).

O espectro de potências da órbita periódica apresenta três picos bem definidos, que consistem no segundo e terceiro harmônicos de uma frequência fundamental, sendo a amplitude da segunda frequência independente igual a zero. O espectro da órbita quase-periódica ressonante se assemelha com o da órbita periódica, com o acréscimo da combinação linear entre a frequência independente relacionada à ressonância com a frequência de longo período e menor amplitude.

A órbita caótica fraca apresenta as frequências independentes bem definidas, no entanto há o surgimento de picos espúrios em torno delas, devido à lenta variação temporal destas frequências, relacionada ao fato da órbita se iniciar em uma região de caos confinado.

Por fim, o espectro de potências da órbita caótica apresenta um sinal ruidoso, sem a presença de picos de frequências bem definidos, relacionado à rápida variação temporal das frequências independentes.

### 2.2.3.1 Mapa Dinâmico

A Figura 2.8 mostra um mapa dinâmico construído do mesmo modo e com as mesmas condições iniciais usadas para construção da Figura 2.4, mas utilizando-se o Número

Espectral como indicador de caos.

Comparando os dois mapas, pode-se verificar que as principais estruturas dinâmicas estão presentes nas duas Figuras, como as regiões caóticas e ressonâncias, porém algumas diferenças podem ser notadas, principalmente nas regiões imediatamente próximas das ilhas ressonantes e entre regiões com regimes distintos de movimento. Estas diferenças podem estar relacionadas a um Número Espectral elevado devido à contagem dos harmônicos das frequências independentes, como no caso da órbita periódica: seu movimento é dominado por uma frequência bem definida, mas cujo espectro apresenta um número maior de picos, correspondentes aos seus harmônicos.

Por outro lado, esse valor elevado do número espectral indica claramente a não-harmonicidade do movimento, que indica ao surgimento de caos para possíveis pequenas perturbações.

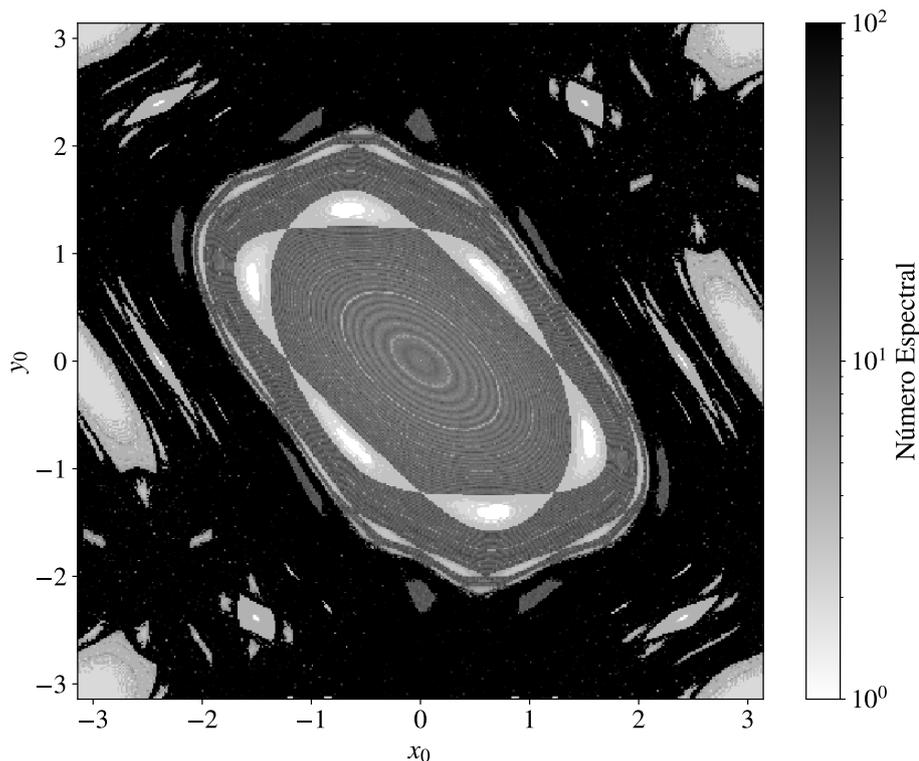


Figura 2.8: Mapa Dinâmico utilizando-se o  $SN$  como indicador de caos calculado para uma grade de  $401 \times 401$  condições iniciais. Regiões claras e cinzas correspondem a regiões regulares do espaço de fase, enquanto regiões em preto correspondem a zonas caóticas. Regiões em cinza indicam aumento das instabilidades no espaço de fase.

### 2.2.3.2 *Espectro de Potências Dinâmico*

Assim como realizado na Figura 2.5, a Análise do Número Espectral também foi aplicada a uma seção do espaço de fase de modo a se construir um **Espectro de Potências Dinâmico** (Espectro Dinâmico daqui em diante) com as condições dispostas para  $x(0)$  em  $y = 0$ .

Nesta representação, a riqueza de detalhes obtida anteriormente é amplificada pela utilização do método espectral ao construirmos um mapeamento de todas as frequências calculadas para cada condição inicial na seção escolhida. Assim, é possível acompanhar o comportamento das frequências ao longo do espaço de fase, observando os momentos em que a condição inicial se localiza em uma região do espaço de fase onde o movimento é regular ou caótico.

O conjunto do Mapa Dinâmico com o Espectro Dinâmico (constituído por todas as frequências calculadas para aquela condição inicial) pode ser visto na Figura 2.9.

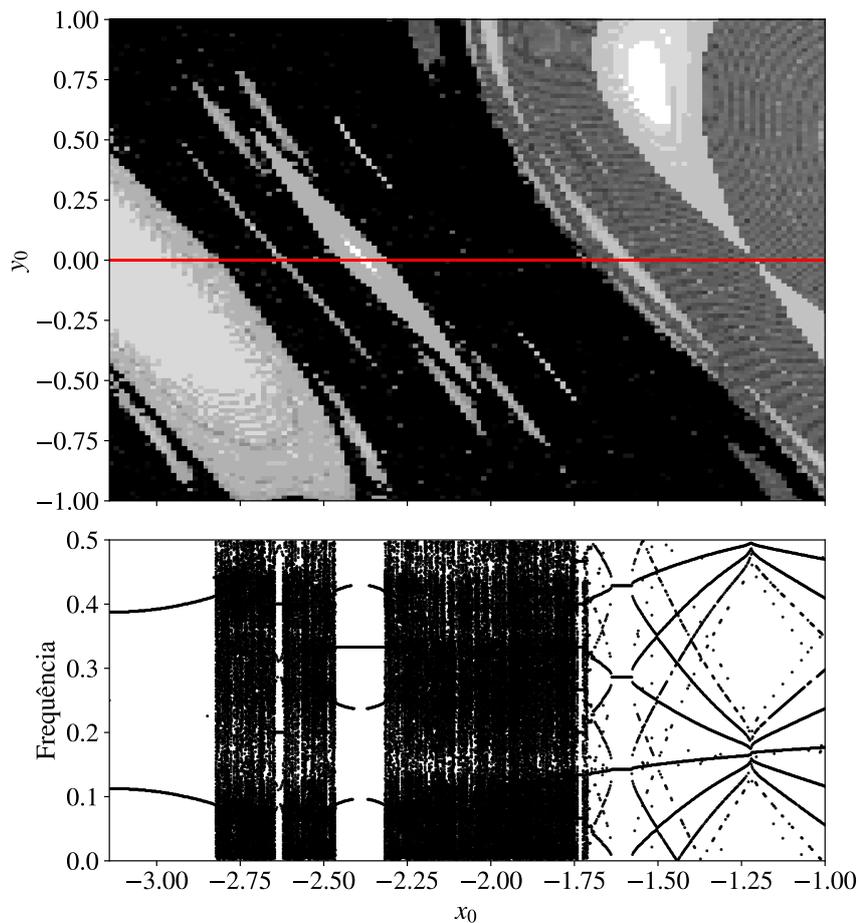


Figura 2.9: Detalhe do Mapa Dinâmico da Figura 2.8 com espectro dinâmico calculado para 1001 condições iniciais de  $x(0)$  na seção  $y(0) = 0$ . A dinâmica do sistema e a variação das frequências independentes são vistas em maior riqueza de detalhes, com órbitas periódicas ressonantes representadas por platôs no espaço de frequências e pontos de sela, como a confluência das frequências.

Assim como visto na Figura 2.5, a utilização do Espectro de Potências Dinâmico é uma poderosa ferramenta para caracterização e compreensão da dinâmica na seção do espaço de fase estudada. Do mesmo modo que a utilização do espectro-*FLI*, as diferentes ressonâncias e pontos de sela podem ser identificadas pelos platôs e pela confluência de frequências, respectivamente.

Além da riqueza de detalhes mostrada pelo Espectro Dinâmico, a ferramenta permite um vislumbre dos mecanismos agindo por trás da dinâmica do sistema, como a relação dos movimentos ressonantes e caóticos com os batimentos entre as frequências.

### 2.2.4 Wavelets (WAM)

Outro representante dos Métodos Espectrais é o Método da Análise de Wavelets, apresentado em Michtchenko e Nesvorný (1996). Sua aplicação é fundamentada na mesma definição do Método do Número Espectral: frequências independentes de uma órbita caótica variam com o tempo, enquanto as frequências das órbitas regulares são constantes no tempo.

O estudo da evolução temporal das frequências independentes do sistema dinâmico já foi aplicado com sucesso por Laskar (1993). No entanto, a aplicação do método partia da premissa de que as frequências estão variando lentamente, uma vez que a escolha da janela na qual realizar as Transformadas de Fourier era definida *a priori*, ocasionando perda de precisão na frequência nos casos em que as frequências independentes variavam rapidamente com o tempo.

Deste modo, Michtchenko e Nesvorný (1996) propuseram outra ferramenta para analisar a variação temporal das frequências independentes do sistema, baseado na Transformada de Wavelets Contínua (CWT), método capaz de acompanhar a evolução da intensidade das frequências do sistema dinâmico em função do tempo.

A CWT pode ser definida como a convolução do sinal analisado com uma *wavelet* (ou pacote de onda) localizada no tempo, que ajusta seu tamanho automaticamente à medida em que percorre o sinal, permitindo o cálculo com maior precisão das frequências em função do tempo.

Matematicamente, a CWT de um sinal real  $x(t)$  é definida por

$$C(a, b) = K(a) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g^* \left( \frac{t - b}{a} \right) dt, \quad (2.11)$$

onde  $g(t)$  é uma *Wavelet* que analisará a função  $x(t)$  e  $*$  indica o complexo conjugado da função.  $K(a)$  é um fator de normalização,  $a$  é um fator de escala relacionado à frequência tal que  $a \propto f^{-1}$  e  $b$  é o tempo..

Esta transformação é considerada como uma medida de correlação entre o sinal  $x(t)$  e a Wavelet  $g(t)$  que pode ser trasladada e dilatada no tempo e na frequência através dos parâmetros  $b$  e  $a$ , respectivamente, de acordo com as variações no sinal  $x(t)$ .

Para os estudos realizados, foi escolhida a Wavelet de Morlet, definida por

$$g(t) = e^{-t^2/2} e^{-i\omega_m t}, \quad (2.12)$$

onde  $\omega_m$  é a frequência central da Wavelet e foi escolhida como  $\omega_m = 2\pi$ . Dentre as vantagens da escolha da Wavelet de Morlet, estão a sua localização simultânea no espaço de tempo e no de frequência, permitindo determinar com precisão a frequência em função do tempo.

Nos estudos realizados com a escolha da Wavelet, a CWT final fica definida como

$$C(a, b) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} \int_{b-\Delta t}^{b+\Delta t} x(t) e^{-(t-b)^2/2a^2} e^{-i\omega_m(t-b)/a} dt, \quad (2.13)$$

de onde podemos obter a frequência  $f$  em função do parâmetro de escala  $a$  e da frequência central da Wavelet,  $f = \omega_m/a$ .

Deste modo, os valores de  $C(a, b)$  são mapeados para valores da escala  $a$  obtidos pela Análise Espectral do sinal  $x(t)$  em cada instante de tempo  $b$ .

A análise do sinal é então realizada da seguinte maneira:

1. Primeiramente é realizada uma Transformada de Fourier do sinal  $x(t)$ , a partir da qual as frequências independentes do sistema são determinadas;
2. A frequência de maior amplitude é fixada em  $f = f_x$ , a CWT é aplicada sobre ela e os coeficientes  $|C(f_x, b)|$  são computados de modo a se obter a amplitude da CWT para  $f_x$  no intervalo de tempo do sinal, o que corresponde à filtragem das baixas frequências presentes no sinal;
3. Uma segunda transformada de Fourier é aplicada na evolução obtida para  $|C(f_x, b)|$  para determinação das baixas frequências;
4. A CWT é aplicada em grid de frequências definidas pelo passo  $i$ ),  $[f - \Delta f, f + \Delta f]$  para o tempo do sinal. Do mapeamento resultante, são calculados os máximos coeficientes de  $|C(f, b)|$  para um ponto fixo do tempo  $b$ , de modo a se obter a frequência correspondente a este máximo para cada ponto do tempo. Assim, será obtido o valor da frequência no instante de tempo  $b$ ,  $f(t) = \max |C(f, t)|$ .

As propriedades matemáticas do método podem ser obtidas em Michtchenko e Nesvorný (1996)

Abaixo, nas Figuras 2.10 até 2.13, as condições iniciais estudadas anteriormente são analisadas pelo Método de Wavelets.

A Figura 2.10 corresponde à análise da órbita periódica, no centro da ressonância  $1/7$ . Os três painéis à esquerda correspondem, de cima para baixo, respectivamente, à evolução temporal do sinal analisado, à evolução temporal do coeficiente correspondente à frequência independente de interesse (neste caso, a frequência de maior amplitude no espectro de potências do sinal) obtido a partir da Transformada de Wavelets e à evolução temporal da frequência independente de interesse (ou do maior coeficiente no instante de tempo  $t$  obtido através da Transformada de Wavelets).

À direita, o painel superior corresponde à Transformada de Fourier do sinal correspondente à variável  $x(t)$  — já analisada na seção anterior sobre o Método do Número Espectral —, enquanto o painel inferior corresponde à Transformada de Fourier da evolução temporal do coeficiente da frequência independente  $|C(f_x, t)|$ .

Conforme o esperado, a frequência fundamental do sistema é constante no tempo e as séries  $x(t)$  e  $|C(f_x, t)|$  são bem comportadas. Como a órbita é periódica, sua dinâmica é regida somente por uma das frequências independentes e seus harmônicos. Deste modo, a segunda frequência independente tem amplitude 0, o que pode ser visto pelo painel inferior à direita, que reproduz o espectro de potências do sinal.

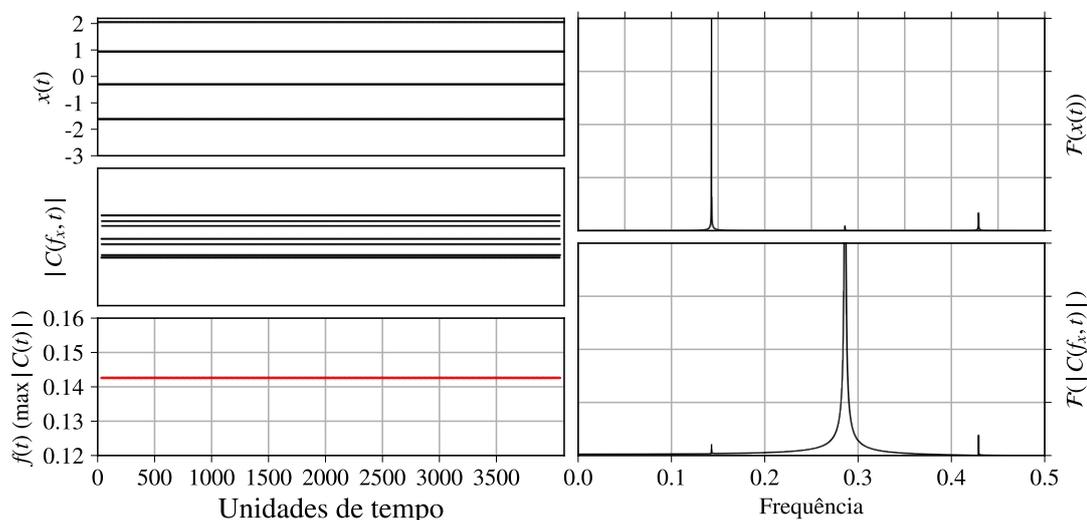


Figura 2.10: Análise de Wavelets da órbita periódica, do canto superior esquerdo, em sentido horário: Sério Temporal obtida  $x(t)$ , Espectro de potência da série  $\mathcal{F}\{x(t)\}$ , Espectro de potência da evolução do coeficiente da frequência de interesse  $|C(f_x, t)|$ , Evolução temporal da frequência de interesse  $\max |C(f, t)|$  e evolução temporal de  $|C(f_x, t)|$ . A escala do eixo  $x$  dos dois painéis à direita é igual.

No caso da órbita quase-periódica ressonante, na Figura 2.11, o coeficiente da frequência estudada apresenta uma oscilação de longo período, confirmada pela transformada de

Fourier de  $|C(f_x, t)|$ . Esta transformada permite definir com precisão a segunda frequência independente, da ordem de dez vezes mais baixa que a frequência de curto período do sistema.

A análise do comportamento das frequências independentes indica uma oscilação regular, de baixa amplitude e período compatível com o da frequência independente mais baixa. Esta oscilação não corresponde à variação real da frequência — que, sendo relativa a uma órbita quase-periódica, deve ser constante —, mas sim a uma característica da ferramenta chamada “vazamento de frequências”, na qual as frequências de longo período do sistema são filtradas, fazendo com que a frequência de interesse  $f(t) = \max |C(f, t)|$  oscile regularmente ao redor de valor médio constante.

Deste modo, para órbitas regulares, é aplicado um filtro de Savitsky-Golay (Savitzky e Golay 1964) — representado pela curva vermelha na evolução da frequência fundamental — de modo a se observar o comportamento real de longo período da frequência de interesse. Para representação fiel da constância da frequência no caso de órbitas regulares, uma janela maior na aplicação do filtro pode ser necessária nos casos em que a frequência fundamental oscila com uma amplitude elevada.

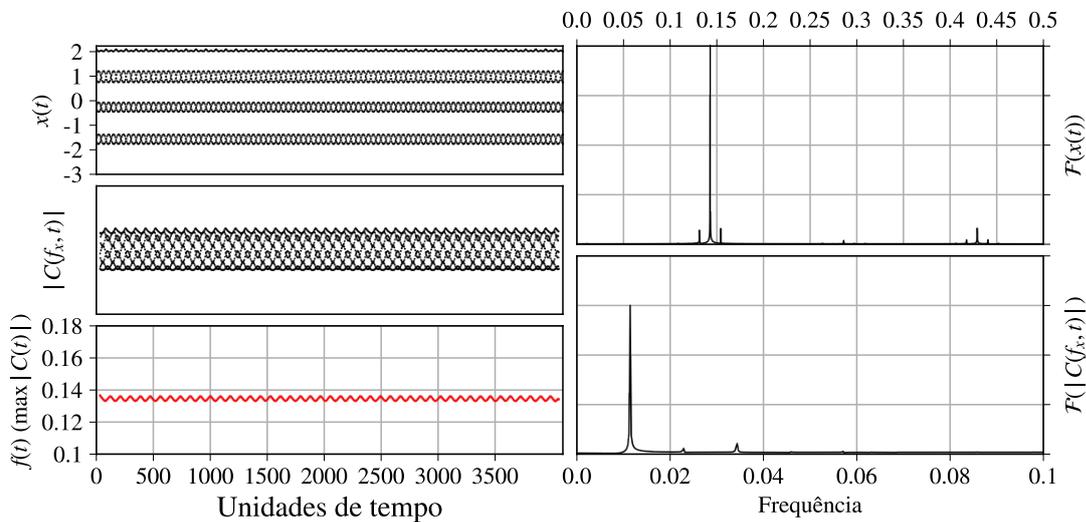


Figura 2.11: Mesmo que 2.10 para órbita quase-periódica ressonante. A escala do eixo  $x$  no painel superior direito, vista acima do gráfico, é distinta da escala do eixo  $x$  no painel inferior direito, de modo a evidenciar a frequência de longo período da órbita. Nas Figuras 2.12 e 2.13 as escalas também são distintas.

A robustez da ferramenta é atestada no estudo de uma órbita caótica fraca, confinada em uma área reduzida do espaço de fase. No primeiro espectro de potências calculado, na Figura 2.12, percebe-se um ruído de baixa amplitude nas imediações da frequência

fundamental e seus harmônicos. Apesar da baixa amplitude, a segunda transformada de Fourier, calculada para a evolução do coeficiente da frequência de interesse, não é capaz de discernir a frequência de longo período do ruído branco de baixa amplitude, caracterizando a órbita como caótica.

Efetivamente, no estudo da evolução da frequência do sistema, a natureza caótica da órbita surge mais nitidamente na forma de oscilações irregulares de baixa amplitude em momentos distintos da iteração.

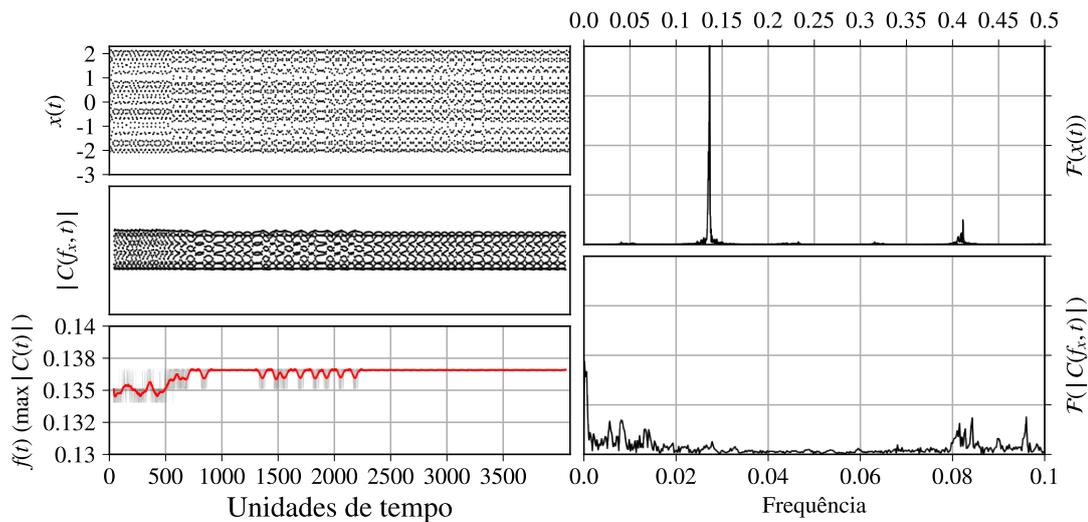


Figura 2.12: Mesmo que 2.11 para órbita caótica fraca.

Por fim, a ferramenta é aplicada a uma órbita originada em uma região de movimento fortemente caótico do espaço de fase e a aplicação do Método da Análise de Wavelets pode ser vista na Figura 2.13

Sua natureza caótica é evidente na evolução temporal da variável  $x(t)$ , assim como pelo seus espectros.

O estudo da variação temporal da frequência fundamental indica uma variação irregular e de grande amplitude, evidenciando a natureza fortemente caótica da órbita. Entretanto, nota-se uma captura na ressonância  $1/8$  ( $f(t) \approx 0.125$ ) em  $t \approx 1800$ , indicando a complexidade de movimentos existentes na órbita caótica forte.

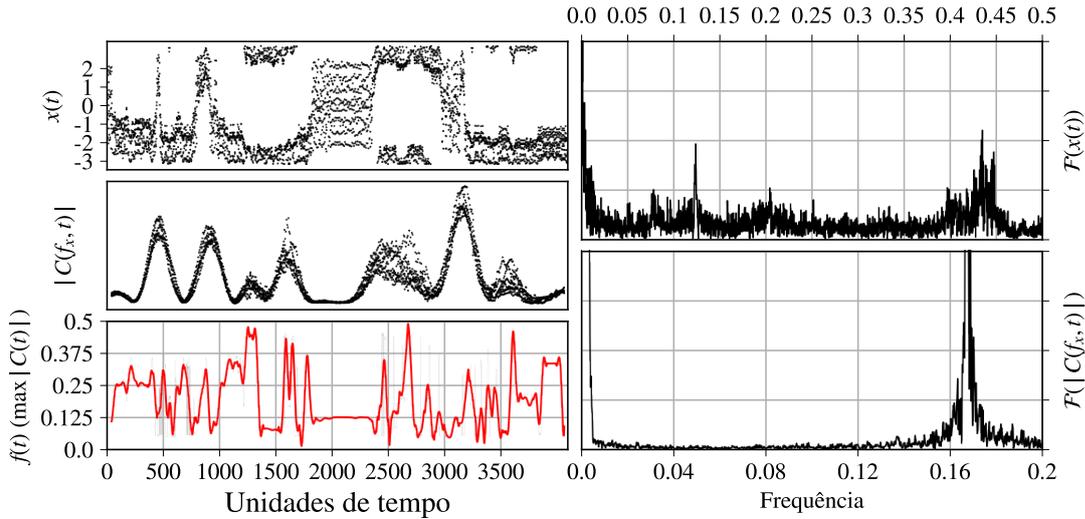


Figura 2.13: Mesmo que 2.11 para órbita caótica forte.

### 2.3 Comparação Entre os Métodos

A necessidade de se utilizar diferentes ferramentas se dá pela quantidade de informações que cada uma delas no fornece, assim como pelas suas limitações e praticidades, como consumo computacional e facilidade de cálculo e interpretação.

As Superfícies de Seção de Poincaré são uma das ferramentas mais tradicionais e intuitivas, permitindo a caracterização de diferentes regimes de movimento no espaço de fase a partir de uma redução da dimensionalidade do sistema.

Entretanto, sua aplicabilidade é reduzida a sistemas de dois graus de liberdade, perdendo sua significância em sistemas de maior complexidade, além de requerer a escolha prévia de um plano no qual realizar a análise, o que exige o conhecimento anterior da dinâmica do sistema de modo a garantir que o plano escolhido seja capaz de cobrir os distintos regimes de movimento possíveis.

Tendo isto em mente, os expoentes de Lyapunov foram introduzidos como método de quantificação de fenômenos caóticos. Além da quantificar a caoticidade de uma órbita, o método permite uma primeira estimativa do tempo de instabilidade a partir da obtenção dos Tempos de Lyapunov, estimativa do tempo necessário para que os fenômenos caóticos de uma órbita se tornem aparentes.

Sua principal desvantagem está no fato dos expoentes de Lyapunov somente estarem definidos no limite em que  $t \rightarrow \infty$ , sendo necessários longos períodos de integração para

que os expoentes e os tempos de Lyapunov sejam precisamente estimados. Por este motivo, o *FLI* e o *MEGNO* são apresentados como alternativas capazes de distinguir entre movimentos regulares e caóticos em menos tempos de integração.

Ferramentas baseadas em métodos variacionais podem ser utilizadas independentemente do número de graus de liberdade e da escolha do sistema de coordenadas, permitindo uma caracterização global e precisa do espaço de fase, evidenciando a clara distinção entre os regimes de movimento.

No entanto, métodos variacionais apresentam suas próprias desvantagens: para realizar o mapeamento do vetor tangente ao fluxo do sistema de equações, é necessário calcular analiticamente a matriz Jacobiana associada ao sistema de equações de movimento, o que pode se mostrar excessivamente trabalhoso no caso de potenciais mais complexos.

Além disso, a aplicação dos métodos variacionais exige, além da integração de  $N$  equações de movimento, a integração de outras  $N$  equações variacionais, o que pode vir a se tornar computacionalmente desgastante no caso de sistemas com muitos graus de liberdade.

Os métodos espectrais apresentam uma alternativa computacionalmente econômica e matematicamente simples aos métodos variacionais. O embasamento do método da Análise do Número Espectral é matematicamente robusto e independe da escolha do sistema de coordenadas: Órbitas regulares são caracterizadas por frequências independentes que não variam no tempo, enquanto as das órbitas caóticas apresentam uma variação temporal.

Uma das principais desvantagens do método do número espectral consiste na escolha adequada de coordenada na qual a Transformada de Fourier será aplicada. Comparando-se o Mapa Dinâmico obtido com o método do Número Espectral (Figura 2.8) com aquele obtido com o Fast Lyapunov Indicator (Figura 2.4), percebe-se a diferença na definição dos resultados: a aplicação do método variacional retorna um Mapa Dinâmico com definição superior e com estruturas mais bem definidas que no obtido utilizando-se o método espectral.

Esta diferença se deve à presença de harmônicos de ordem superior das frequências independentes, o que leva a um grande número de picos detectados, mesmo que a órbita seja regular. Entretanto, a aplicação conjunta de um Espectro de Potências Dinâmico permite a rápida detecção destes casos, verificando-se circunstâncias nas quais o grande número de picos detectados é devido à dinâmica caótica do sistema ou simplesmente aos harmônicos surgidos na FFT da coordenada estudada. Mais ainda, o grande número dos

harmônicos é indicador da não-harmonicidade do movimento.

Além de ser um subproduto natural da aplicação do método do Número Espectral, a utilização do Espectro de Potências Dinâmico permite um vislumbre de diversos detalhes da estrutura do espaço de fase e dos fenômenos físicos presentes no sistema, além de ser capaz de quantificar, com facilidade, ressonâncias e suas ordens, além de harmônicos das distintas frequências que regem o sistema.

Por fim, é apresentado o método da análise de Wavelets, capaz de distinguir com precisão entre regimes de movimento regulares e caóticos, além de diferenciar com facilidade entre fenômenos caóticos fracos e fortes. Sua principal vantagem consiste na detecção da Difusão Caótica no espaço de frequências e na capacidade de detectar variações de grande amplitude nas frequências, diferentemente do método original desenvolvido por Laskar (1990). Além disso, o método filtra as altas frequências (curtos períodos) e isola as baixas frequências (longos períodos), permitindo que baixas frequências sejam isoladas e precisamente identificadas em um sinal.

No entanto, sua aplicação pode se tornar computacionalmente desgastante no caso de séries que tenham sido amostradas em muitos pontos.

Cada uma das ferramentas apresenta suas próprias vantagens e desvantagens, de modo a condicionar suas aplicações a diferentes propósitos e tipos de sistema, como número de graus de liberdade ou intensidade dos fenômenos caóticos. No entanto, assim como afirmam Cincotta e Simó (2000), mesmo que as distintas ferramentas para detecção de fenômenos caóticos sejam de fácil interpretação ou aplicabilidade, o ideal é a utilização conjunta de diferentes ferramentas de modo a reforçar os resultados obtidos.

## Aplicações ao Problema de Três Corpos Restrito, Circular e Planar (*PCR3BP*)

As ferramentas apresentadas no capítulo anterior serão aplicadas no Problema de Três Corpos Restrito, Circular e Planar (PCR3BP) apresentado no Apêndice A, de modo a se caracterizar o espaço de fase do sistema a partir da classificação das órbitas em regulares ou caóticas e identificar os possíveis regimes de movimento.

Todos os estudos foram realizados para um parâmetro de massa  $\mu = 0.0009537$ , aproximadamente aquele do sistema Sol-Júpiter-asteróide.

### 3.1 *Estudo no Espaço de Fase*

O primeiro passo na caracterização do espaço de fase é realizado utilizando-se as Seções de Superfície de Poincaré (S.O.S) para um conjunto de condições iniciais. O estudo foi realizado integrando-se 105 condições iniciais (5 em  $-1 \leq \dot{x}(0) \leq 1$  e 21 em  $0.05 \leq x(0) \leq 0.85$ ) para quatro valores distintos da Constante de Jacobi do sistema adimensional,  $C_J = 3.2, 3.1, 3.0, 2.9$ .

O valor inicial de  $y$  foi fixado em  $y(0) = 0$  e  $\dot{y}(0)$  foi calculado à partir das demais condições iniciais  $\dot{y}(0) = \dot{y}(x, \dot{x}, y, C_J, \mu)$ . Todas as órbitas foram integradas por  $T = 250$  períodos orbitais da binária ao redor do baricentro do sistema.

Os resultados no plano  $(x, \dot{x})$ , que é uma representação tradicional para estudo do espaço de fase do CR3BP, podem ser vistos na Figura 3.1. Para o valor decrescente da Constante de Jacobi, a estrutura do espaço de fase se modifica, surgindo novas ilhas ressonantes e regiões caóticas, ao mesmo tempo em que a geometria das ressonâncias que se mantêm vai se modificando, assim como visto na Figura 2.1.

Nesta representação, as Seções de Poincaré já fornecem uma grande quantidade de informação qualitativa sobre os regimes de movimento existentes: pontos fixos correspondem a órbitas periódicas; curvas contínuas correspondem às órbitas quase-periódicas.

No caso de cadeias de ilhas, o número de ilhas corresponde à ordem  $q$  da ressonância de movimento médio onde há *comensurabilidade* do tipo  $n/n' = (p + q)/p$ . Os números  $p$  e  $q$  são inteiros e  $n'$  e  $n$  são os movimentos médios da binária e da partícula, respectivamente. A relação  $n/n'$  indica que para cada  $p$  órbitas realizadas pela binária ao redor do baricentro, a partícula realiza  $p + q$  órbitas.

A partir de  $C_J = 3.1$ , pontos espalhados aleatoriamente entre as ressonâncias indicam regiões de movimento caótico. À medida que diminui  $C_J$ , regiões de movimento caótico passam a predominar sobre as de movimento regular.

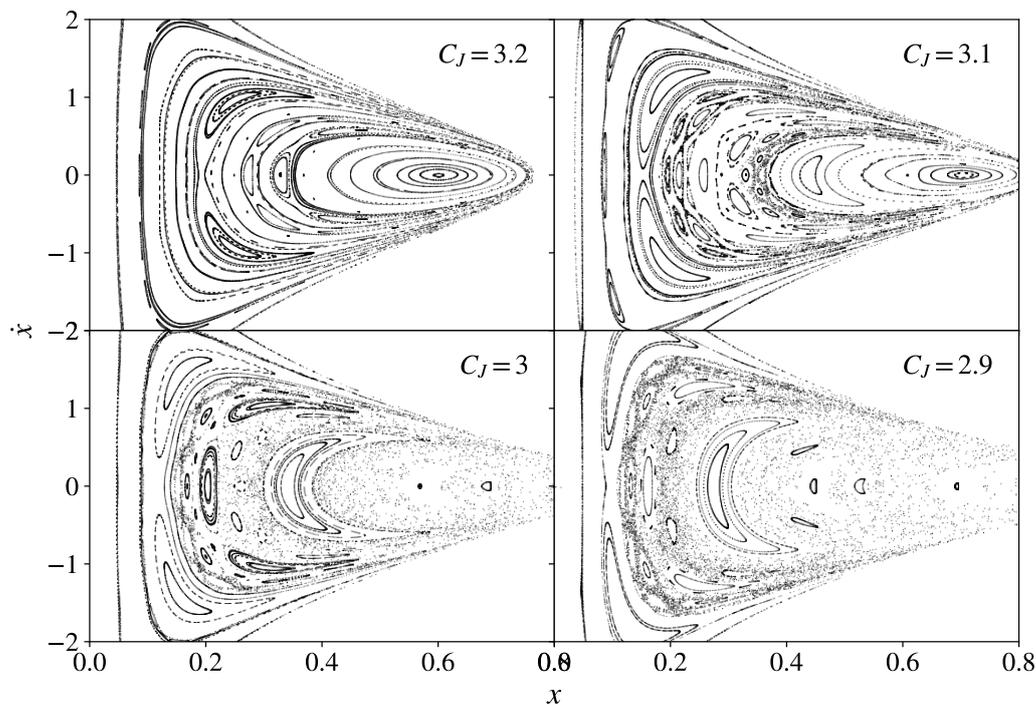


Figura 3.1: Estrutura do espaço de fase no plano  $(x, \dot{x})$  para quatro valores distintos da Constante de Jacobi, explicitado no canto superior direito de cada painel.

De modo a facilitar a comparação entre os espaços de fase para os distintos valores da Constante de Jacobi, os mesmos resultados são dispostos em elementos orbitais, no plano Semi-eixo Maior e Anomalia Verdadeira  $(a, \nu)$ , vistos na Figura 3.2, como realizado por Belbruno et al. (2008).

A utilização do plano de elementos orbitais ao invés do de coordenadas cartesianas permite ainda a distinção de dois regimes quase-periódicos distintos: curvas invariantes, nas quais a Anomalia Verdadeira  $\nu$  está circulando no intervalo  $[-\pi, \pi]$  e órbitas regulares ressonantes, nas quais o ângulo pode ser visto librando nas cadeias de ilhas ressonantes.

Nesta visualização, a posição nominal das ressonâncias se mantém fixa, uma vez que elas são determinadas por  $a$ , e não por  $x$ , o que permite avaliar qualitativamente a mudança na dinâmica do sistema a partir do surgimento e desaparecimento das ressonâncias, bem como da variação da extensão das regiões caóticas.

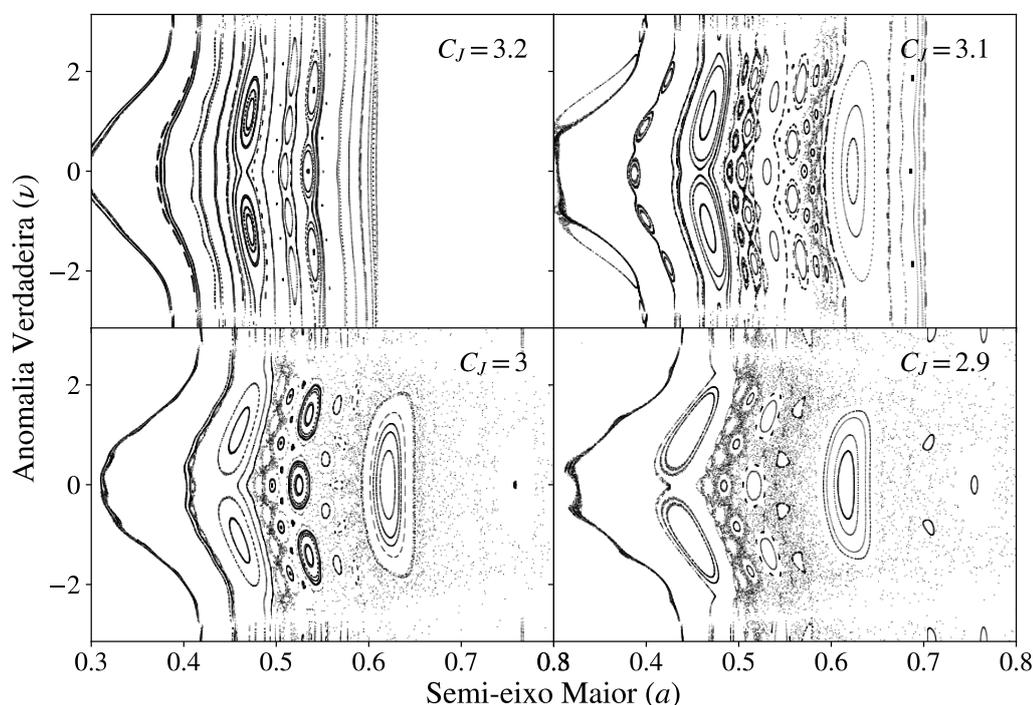


Figura 3.2: Estrutura do espaço de fase no plano  $(a, \nu)$  para quatro valores distintos da Constante de Jacobi, explicitado no canto superior direito de cada painel.

Pela análise qualitativa promovida pela utilização das Seções de Poincaré já se torna possível observar as mudanças estruturais do espaço de fase em função da modificação do parâmetro  $C_J$ : à medida em que o valor deste parâmetro diminui, curvas invariantes se tornam ressonâncias de ordem elevada, continuamente surgindo e sendo substituídas por trajetórias caóticas representadas por pontos aleatoriamente espalhados entre as ilhas ressonantes.

Entretanto, por mais robusta e confiável que a S.O.S seja, sua aplicabilidade é limitada

a sistemas com dois graus de liberdade, não podendo ser extrapolada para situações mais complexas. A ferramenta somente pode ser aplicada no referencial girante do CR3BP, em que há redução de dimensionalidade com relação ao referencial inercial.

Nos casos não-planar e não-circular do problema de três corpos restrito, sua aplicação já não pode ser estendida, fazendo-se necessários outros métodos para distinguir os distintos regimes de movimento e complementar a caracterização do sistema.

### 3.2 Estudo no Espaço de Frequências

Pelas limitações inerentes ao método das Seções de Poincaré, partimos para a caracterização dinâmica do sistema no espaço de frequências utilizando métodos espectrais para a tarefa, permitindo a extrapolação para sistemas de maior complexidade e sem limitação quanto ao número de graus de liberdade.

Deste modo, foi realizado um estudo aprofundado da estrutura do espaço de fase do problema, relacionando a caracterização por meio das seções de Poincaré com a obtida no espaço de frequências.

Foram escolhidos dois valores distintos de  $C_J$ : uma constante cujas órbitas são majoritariamente bem comportadas ( $C_J = 3.23$ ) e outra na qual há maior complexidade de fenômenos ( $C_J = 3.03$ ), como soluções caóticas e transição entre ressonâncias.

As seções de Poincaré foram obtidas a partir da integração de 101 condições iniciais de  $x$ , com  $0.05 \leq x(0) \leq 0.85$ . Em todas as integrações foram fixados os valores  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  e  $\dot{y}(0) = \dot{y}(x, \dot{x}, y, C_J, \mu)$ . Todas as órbitas foram integradas por  $T = 400$  períodos orbitais da binária ao redor do baricentro do sistema. As S.O.S estão apresentadas nas Figuras 3.3 e 3.4.

Além das S.O.S. obtidas pelas condições iniciais na reta definida por  $\dot{x}(0) = 0$  (painéis superiores das Figuras 3.3 e 3.4), para 601 condições iniciais no mesmo intervalo, ao longo da mesma reta, foi calculado o espectro dinâmico para duas coordenadas:  $X(t)$ , que corresponde à coordenada  $x(t)$  no referencial inercial, dominada pela frequência orbital da partícula; e à coordenada  $x(t)$  no referencial girante. Estes espectros dinâmicos são representados pelas curvas preta e vermelha, respectivamente, nos painéis inferiores das Figuras 3.3 e 3.4.

Os painéis à esquerda nas Figuras 3.3 e 3.4 estão no sistema cartesiano, enquanto os

painéis à direita são representados em elementos orbitais.

O referencial inercial ( $X(t)$ ), no qual os elementos orbitais osculantes estão definidos, foi utilizado por corresponder às frequências e aos períodos físicos da órbita da partícula, uma vez que o espectro de potências da coordenada no referencial girante apresenta a segunda frequência independente  $f = 1$ , correspondente à frequência orbital dos corpos massivos  $m_1$  e  $m_2$  ao redor do baricentro do sistema, o que faz com que a frequência correspondente ao movimento médio da partícula esteja descrita em termos de combinações lineares com a frequência  $f = 1$ .

Entretanto, é importante destacar que no referencial inercial não há redução de dimensionalidade devido ao fato da Integral de Jacobi não ser constante, fazendo com que a órbita precessione e, para longos períodos de integração, surja uma frequência independente associada à frequência de precessão da órbita da partícula, fazendo-se fundamental a escolha correta da coordenada a ser analisada pelos métodos espectrais.

Deste modo, a análise frequencial é realizada nos dois referenciais com o objetivo de se estudar o mesmo fenômeno sob dois referenciais distintos.

Para efeitos de comparação entre os espectros dinâmicos obtidos pelo estudo de diferentes coordenadas, no Apêndice B constam os espectros dinâmicos obtidos pela análise espectral das coordenadas  $x(t)$ ,  $X(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $y(t)$ ,  $a(t)$ ,  $e(t)$  e  $\sin(\nu(t))$  para os dois valores da Constante de Jacobi que serão estudados nas próximas subseções.

### 3.2.1 Caracterização Dinâmica para Constante de Jacobi $C_J = 3.23$

Primeiramente é realizada a análise frequencial do espaço de fase dominado pelo movimento regular. No painel superior esquerdo da Figura 3.3 estão as seções de Poincaré no espaço  $(x, \dot{x})$  das 101 órbitas integradas, enquanto no painel superior direito as mesmas seções são plotadas no plano de elementos orbitais.

Seu espaço de fase é principalmente composto por curvas contínuas, ilhas ressonantes, pontos fixos e pontos de sela correspondentes às órbitas periódicas e camadas estocásticas entre ilhas ressonantes ausentes das condições iniciais integradas (confinadas no eixo  $\dot{x}(0) = 0$ ).

No espaço de fase em elementos orbitais, evidencia-se o papel das curvas invariantes de circulação entre  $-\pi \leq \nu \leq \pi$  ao isolar as ilhas ressonantes que libram ao redor de  $q$  ângulos, sendo  $q$  a ordem da ressonância.

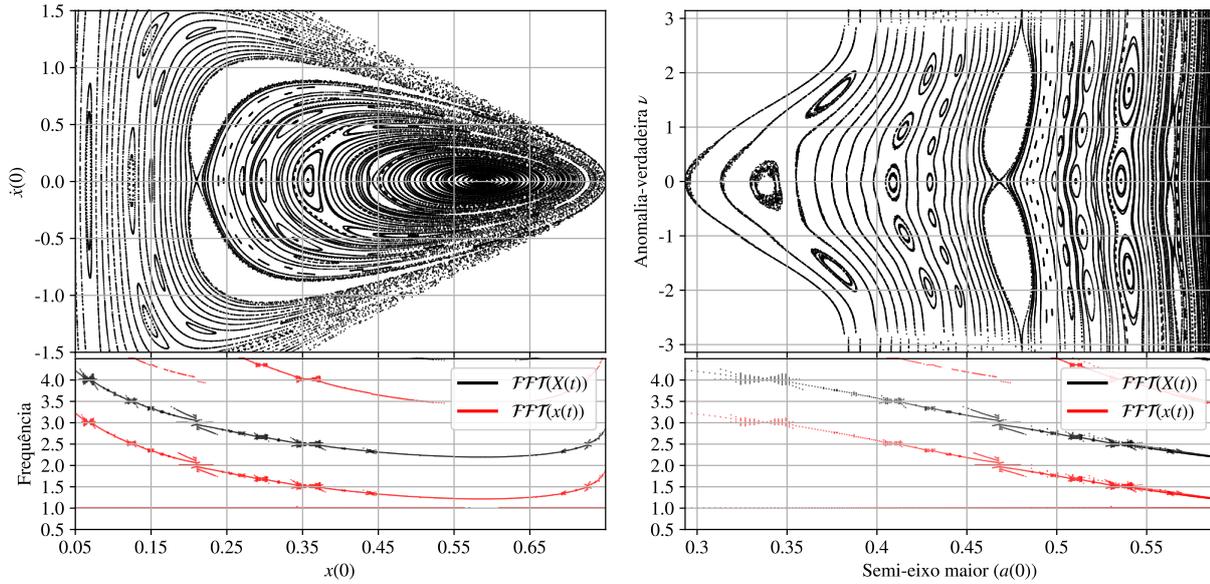


Figura 3.3: Caracterização da estrutura do espaço de fase para  $C_J = 3.23$ . Painéis superiores: Seções de Poincaré no plano  $(x, \dot{x})$  (painel superior esquerdo) e no plano  $(a, \nu)$  (painel superior direito). Painéis inferiores apresentam Espectro dinâmico da coordenada  $X(t)$  no referencial inercial (curva em preto) e  $x(t)$  no referencial girante (curva em vermelho) ao longo  $\dot{x}(0) = 0$  e  $\nu(0) = 0$ .

A utilização do espectro dinâmico como ferramenta para expandir o entendimento acerca da estrutura do espaço de fase se mostra útil ao permitir a visualização clara da variação das frequências independentes do sistema ao longo de uma seção do plano.

A análise da variação da frequência orbital nos dois referenciais permite a definição dos distintos regimes de movimento visíveis nas seções de Poincaré: Órbitas ressonantes são vistas, no espaço de frequências, como a “convergência” das combinações lineares da frequência orbital da partícula ( $n$ ) com os harmônicos da frequência orbital da binária ( $n'$ ), situação na qual a combinação crítica da frequência de batimento vai a zero ( $n'(p+q) - np \approx 0$ ). Nesta região de convergência, a ressonância é representada como um *plateau* no qual a frequência se mantém constante em toda a extensão da ressonância.

Pontos de sela são representados como descontinuidades na evolução da frequência orbital da partícula, como pode ser visto em  $x = 0.2$ , relativo à ressonância 3/1. Regiões nas quais a frequência varia de maneira contínua, sem *plateaus* ou descontinuidades correspondem às órbitas quase-periódicas não-ressonantes, relativas às curvas de circulação nas seções de Poincaré no espaço de elementos orbitais.

### 3.2.2 Caracterização Dinâmica para Constante de Jacobi $C_J = 3.03$

O mesmo estudo foi realizado para um valor da constante de Jacobi para o qual surgem regimes de movimento caótico. Nos painéis superiores da Figura 3.4, analisando-se a estrutura das S.O.S da esquerda para a direita, é visível que não há mais curvas de circulação após a camada estocástica da ressonância  $3/1$ . Entre a ressonância  $3/1$  e a  $5/2$  surge uma quantidade de ilhas ressonantes de ordem elevada. Após a ressonância  $5/2$ , surge um mar de caos eventualmente interrompido por ressonâncias de ordem  $q = 1$ , como a  $2/1$  e a  $3/2$ .

Entretanto, é a partir da aplicação do espectro dinâmico que detalhes sobre a dinâmica do sistema podem ser analisadas com maior precisão e mais informações podem ser adquiridas.

Os Espectros estão apresentados nos painéis inferiores da Figura 3.4. Evidencia-se que regiões caracterizadas como caóticas, tanto pelos pontos das Superfícies de Poincaré espalhadas no plano quanto pela quantidade de picos calculados pelo Método do Número Espectral, como por exemplo entre as ressonâncias  $5/2$  e  $9/4$ , contém um baixo espalhamento no espaço de frequências, indicando que, apesar de caótica, órbitas nesta região vagam pela camada estocástica entre as ressonâncias sem escapar para órbitas circumbinárias.

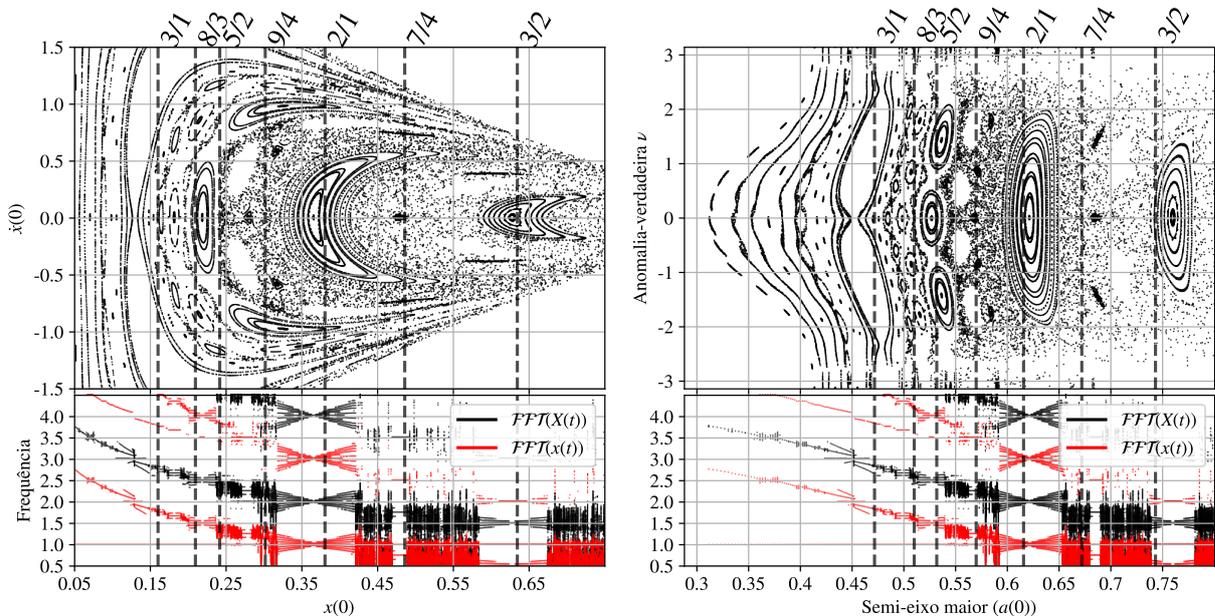


Figura 3.4: Mesma que 3.3, para  $C_J = 3.03$ , com o acréscimo da localização nominal das ressonâncias obtida pela Terceira Lei de Kepler.

Do mesmo modo, o espalhamento nas frequências na região após a ressonância  $2/1$

indica a existência de órbitas que escapam da região interna para a região externa do sistema, uma vez que a frequência orbital da partícula atinge valores de  $n < 1$ .

### 3.3 Estudo de Órbitas Individuais

Após a caracterização geral do sistema utilizando-se as ferramentas apresentadas, somos capazes de escolher condições iniciais específicas e estudá-las a fundo com as ferramentas implementadas.

Deste modo, quatro valores distintos de  $x(0)$  foram integrados por  $T = 1.000$  períodos da binária, com o valor de  $C_J = 3.03$  e as demais condições iniciais fixadas em  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$  e  $\dot{y}(0)$  calculada em função das demais.

As quatro condições iniciais em  $x(0)$  foram escolhidas de modo a representar quatro regimes distintos de movimento:

- Uma condição inicial localizada no centro da ressonância  $2/1$ , dando origem a uma órbita periódica ( $x(0) = 0.3654$ ),
- Uma condição inicial localizada dentro, mas não no centro da ressonância  $5/2$ , dando origem a uma órbita quase-periódica ( $x(0) = 0.202$ ),
- Uma condição inicial localizada na vizinhança da ressonância  $5/2$ , na camada estocástica, dando origem a uma órbita caótica fraca, com movimentação restringida pelas ressonâncias vizinhas ( $x(0) = 0.2008$ ),
- Uma órbita fortemente caótica, inicialmente localizada numa região dominada por movimentos fortemente caóticos entre as ressonâncias  $3/2$  e a  $7/4$  ( $x(0) = 0.49$ ).

Para todas as condições iniciais, foram plotadas as órbitas no plano em distintos momentos da integração, tanto no referencial inercial  $(X, Y)$  quanto no girante  $(x, y)$  nas Figuras 3.5, 3.7, 3.9 e 3.11, para ajudar na interpretação física dos fenômenos que ocorrem na órbita.

Todas as órbitas foram analisadas pelas ferramentas de detecção de caos apresentadas no capítulo anterior: Seção de Poincaré, evolução temporal do FLI, Método do número espectral e evolução temporal da frequência independente (definida aqui como a frequência

de maior amplitude do espectro de  $X(t)$ , correspondendo, para curtos períodos de integração, à frequência orbital da partícula). Os resultados obtidos podem ser visualizados nas Figuras 3.6, 3.8, 3.10 e 3.12.

### 3.3.1 Órbita Periódica

Na Figura 3.5 é possível verificar a dinâmica da partícula no plano orbital. No referencial girante, a órbita da partícula localizada no centro da ressonância 2/1 passa a se repetir rapidamente e mantém sua forma até o final da integração.

No referencial inercial, a órbita precessiona em sentido horário com um período da ordem de milhares de períodos orbitais da binária, devido ao fato de a quantidade dada pela Equação (A.9) somente ser constante no referencial girante (Murray e Dermott 2009).

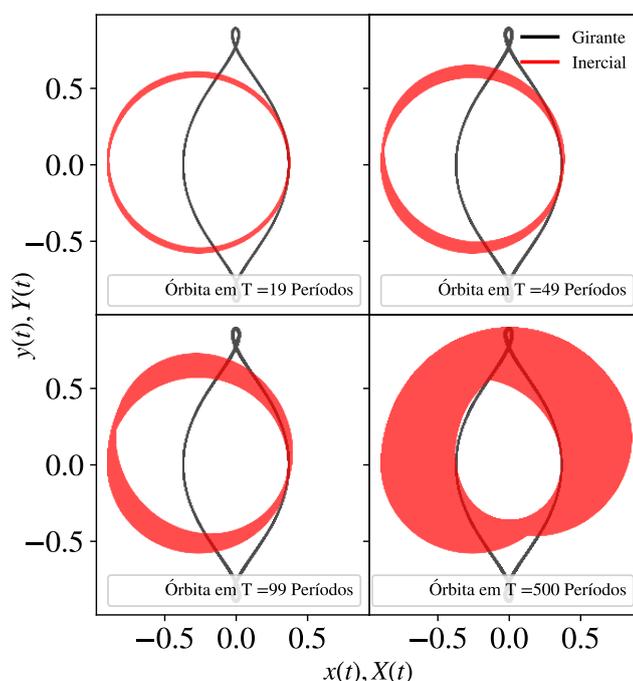


Figura 3.5: Representação da órbita periódica no plano em quatro instantes distintos da integração, no referencial inercial (vermelho) e girante (preto)

A caracterização dinâmica da órbita periódica tem resultados convergentes por todos os métodos aplicados: A seção de Poincaré é constituída por um único ponto fixo no centro da ressonância, em  $a = 0.62$ , enquanto o  $FLI$  rapidamente converge para um valor constante no tempo em  $FLI \approx 4$ .

Pela análise espectral, é obtido um espectro composto somente pela frequência orbital e

seus harmônicos, coerente com a evolução temporal da frequência, que se mantém constante em todo o tempo com valor de  $f = 2$  (em unidades da frequência orbital da binária).

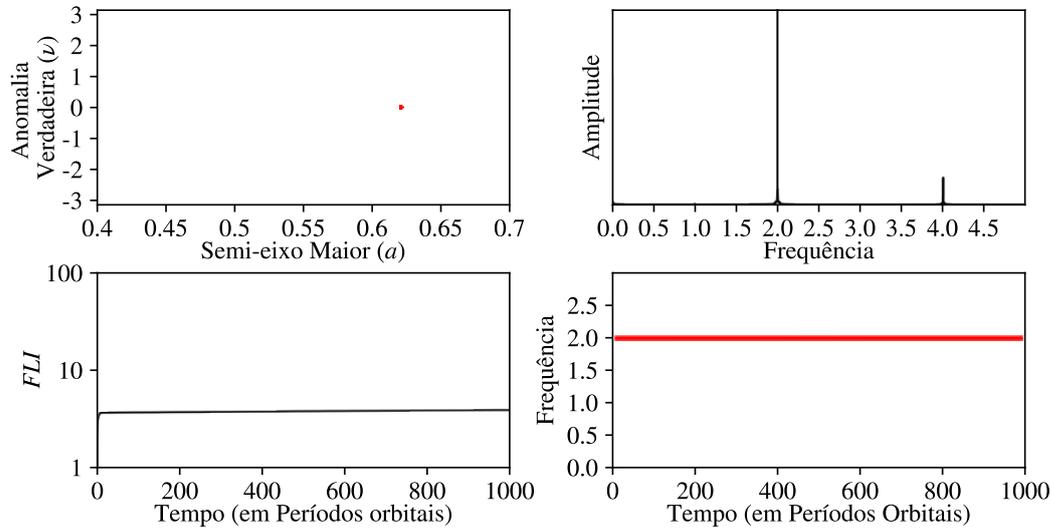


Figura 3.6: Aplicação das ferramentas de detecção de caos em uma órbita periódica: Do canto superior esquerdo, em sentido anti-horário: Seção de Superfície de Poincaré, evolução temporal do  $FLI$ , evolução temporal da frequência orbital e espectros de potência obtidos pela FFT de  $X(t)$

### 3.3.2 Órbita Quase-Periódica

A órbita quase-periódica apresenta uma dinâmica mais complexa no plano orbital, que pode ser vista na Figura 3.7. No referencial girante, a órbita leva aproximadamente um décimo do tempo total de integração para adquirir sua forma final, enquanto no referencial inercial, a órbita precessiona com um período próximo ao da órbita periódica, mas em sentido anti-horário.

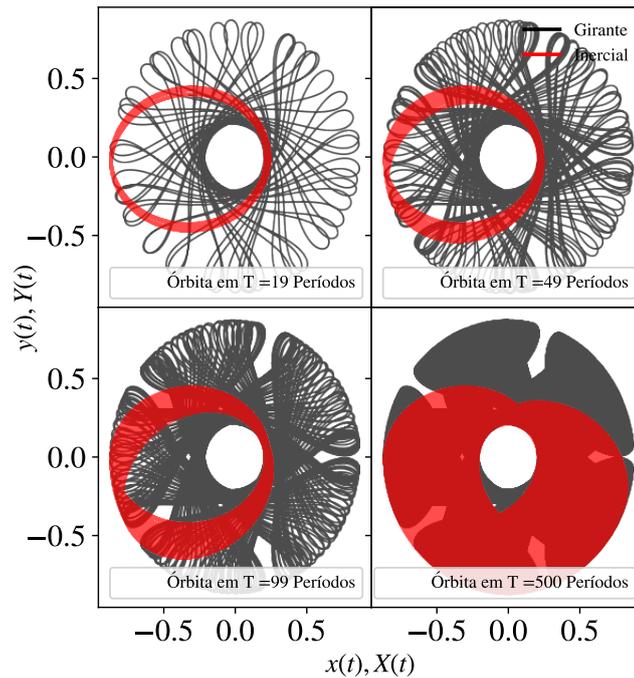


Figura 3.7: Representação da órbita quase-periódica no plano em quatro instantes distintos da integração, no referencial inercial (vermelho) e girante (preto)

Na caracterização dinâmica, sua seção de Poincaré é composta por três ilhas descritas por curvas contínuas, em número correspondente à ordem da ressonância  $5/2$ , que é  $q = 3$ . O indicador de Lyapunov tende assintoticamente a um valor fixo, com uma taxa de crescimento continuamente menor, até se estabilizar em  $FLI \approx 7$ .

Pelos métodos espectrais, os resultados são coerentes com a teoria: o espectro de potências de  $X(t)$  é composto pela frequência orbital e suas combinações lineares com a frequência de batimento  $5n - 2n'$  e seus respectivos harmônicos.

A evolução da frequência estudada apresenta uma oscilação periódica ao redor de um valor constante da frequência orbital da partícula. Essa oscilação é fruto do “vazamento de frequências” característico da ferramenta (*Leakage*), e tem o período da frequência de batimento.

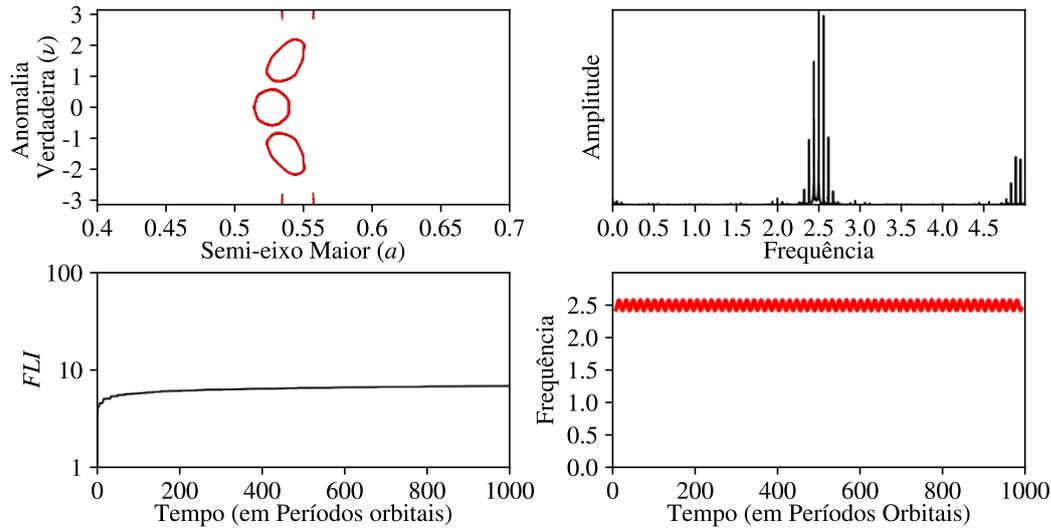


Figura 3.8: Aplicação das ferramentas de detecção de caos em uma órbita quase-periódica: Do canto superior esquerdo, em sentido anti-horário: Seção de Superfície de Poincaré, evolução temporal do  $FLI$ , evolução temporal da frequência orbital e espectros de potência obtidos pela FFT de  $X(t)$

### 3.3.3 Órbita Caótica Confinada (Caos Fraco)

A representação no plano orbital da órbita caótica fraca, vista na Figura 3.9, não difere substancialmente daquela vista na órbita quase-periódica, tornando a caracterização ambígua. Neste caso, a aplicação dos métodos de detecção de caos se faz necessária, o que pode ser visto na Figura 3.10.

Com uma condição inicial na imediação da órbita quase-periódica, é obtida uma órbita caótica na camada estocástica entre as ressonâncias  $5/2$ ,  $7/3$  e  $8/3$ . Sua seção de Poincaré indica que a órbita difunde na camada estocástica, iniciando-se na proximidade da ressonância  $5/2$  mas rapidamente difundindo para a região entre esta ressonância e a ressonância  $8/3$ , sem se afastar de nenhuma delas ao longo de todo o tempo de integração. Seu indicador de Lyapunov cresce constantemente até se aproximar de 100.

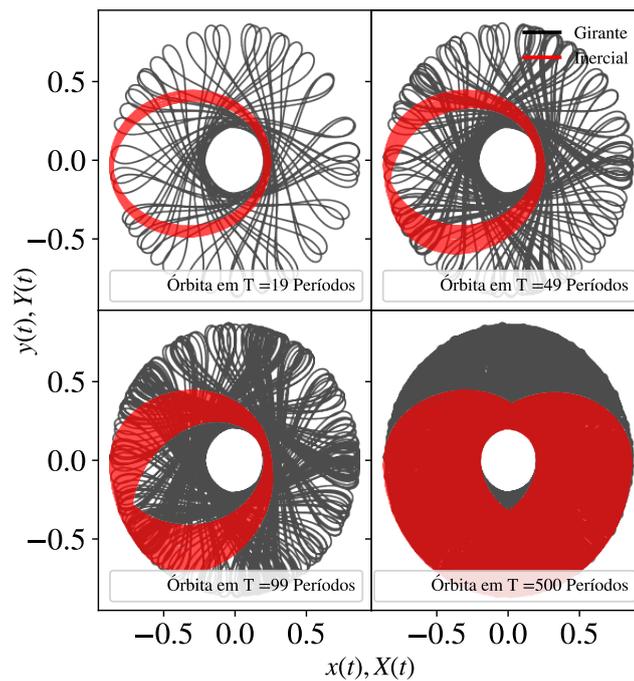


Figura 3.9: Representação da órbita caótica fraca no plano em quatro instantes distintos da integração, no referencial inercial (vermelho) e girante (preto)

A dispersão da frequência orbital no espectro de potência, visto no painel superior direito da Figura 3.10, apesar de indicar um comportamento caótico devido à grande quantidade de picos detectados, confirma uma difusão confinada no espaço de fase e no espaço de frequências, assim como pode ser visto pela oscilação irregular, mas de baixa amplitude, da frequência orbital no painel inferior direito da Figura 3.10.

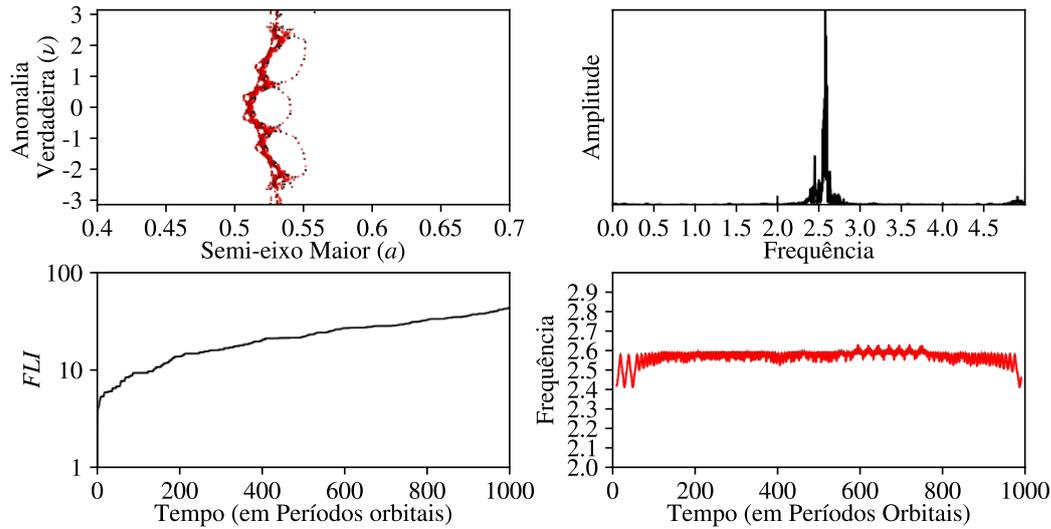


Figura 3.10: Aplicação das ferramentas de detecção de caos em uma órbita caótica fraca: Do canto superior esquerdo, em sentido anti-horário: Seção de Superfície de Poincaré, evolução temporal do  $FLI$ , evolução temporal da frequência orbital e espectros de potência obtidos pela FFT de  $X(t)$

### 3.3.4 Órbita Caótica Não-Confinada (Caos Forte)

As órbitas no plano para a condição inicial que leva ao movimento caótica-forte, vistas na Figura 3.11 são inequívocas na representação de uma órbita que se inicia próxima da ressonância  $7/4$  e lá fica até por volta de cem períodos orbitais, para depois difundir de modo imprevisível e livremente pelo plano.

A aplicação das ferramentas nesta órbita indica uma trajetória consistentemente caótica. Sua seção de Poincaré é composta por pontos aleatoriamente dispersos no espaço de fase, confirmando que a partícula ficou temporariamente na vizinhança da ressonância  $7/4$ , de ordem  $q = 3$  em  $a \approx 0.7$ , assim como seu indicador de Lyapunov apresenta saltos e momentos nos quais apresenta perfil de crescimento exponencial.

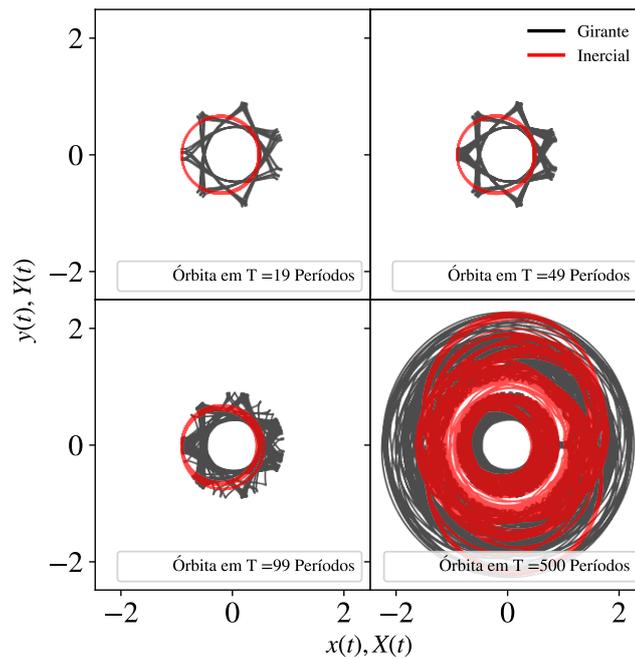


Figura 3.11: Representação da órbita caótica forte no plano em quatro instantes distintos da integração, no referencial inercial (vermelho) e girante (preto)

A análise espectral não permite uma total compreensão da dinâmica da partícula ao longo do tempo, uma vez que, à parte alguns picos bem definidos, o sinal é composto essencialmente por ruído branco.

No entanto, a análise de Wavelets permite verificar a complexidade dos fenômenos envolvidos, como a breve captura na ressonância  $7/5$  em  $150 \leq t \leq 200$ , que somente pôde ser marginalmente visualizada com a seção de Poincaré em  $a \approx 0.71$ .

Além disso, há transições abruptas e ejeções do sistema para uma órbita circumbinária, na qual a partícula passa aproximadamente cem períodos orbitais na região próxima à ressonância  $2/3$  em  $500 \leq t \leq 600$ , para depois voltar à região interna antes de ser ejetada e difundir para longe do baricentro.

Retornando à evolução temporal do  $FLI$  no painel inferior esquerdo da Figura 3.12, apesar de apresentar um valor final elevado e inequivocamente característico de um movimento caótico, há concordâncias entre o comportamento do indicador variacional e o espectral, evidenciadas nos *plateaus* verificados no  $FLI$  que podem ser relacionados às capturas temporárias da partícula expostas pela Análise de Wavelets.

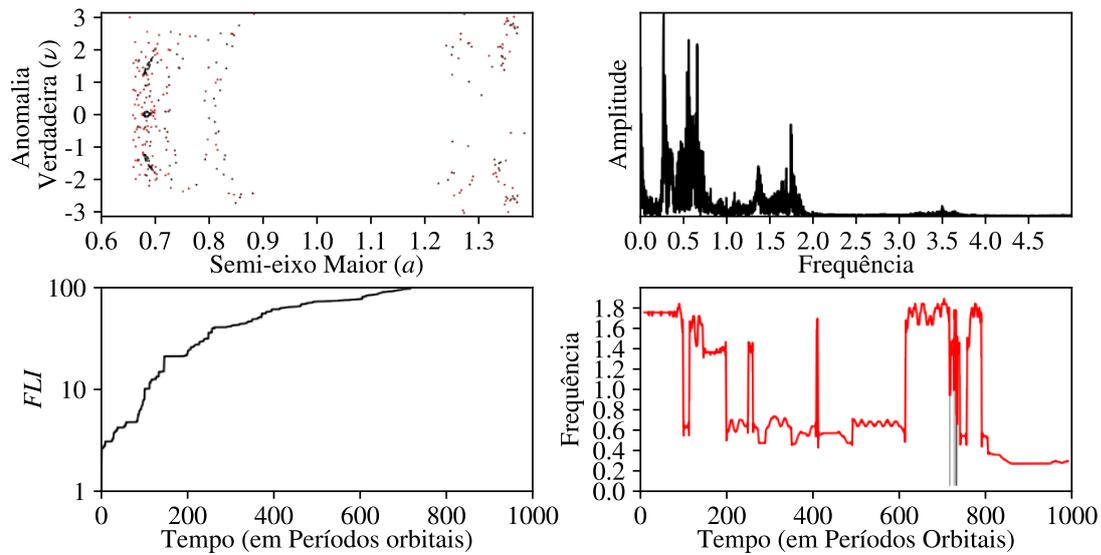


Figura 3.12: Aplicação das ferramentas de detecção de caos em uma órbita caótica forte: Do canto superior esquerdo, em sentido anti-horário: Seção de Superfície de Poincaré, evolução temporal do  $FLI$ , evolução temporal da frequência orbital e espectros de potência obtidos pela FFT de  $X(t)$

## Difusão Caótica

No estudo dos sistemas dinâmicos, a construção de mapas dinâmicos a partir da aplicação de ferramentas para detecção de fenômenos caóticos são de grande importância na compreensão e determinação dos distintos regimes de movimento existentes em um sistema, como visto nos Capítulos 2 e 3.

A utilização destes mapas e a aplicação das diferentes ferramentas permite a identificação de distintas estruturas dinâmicas no sistema, assim como a determinação de regiões onde há diferentes regimes de movimento.

A caracterização de movimentos em caóticos ou regulares, no entanto, nem sempre traz informações sobre a real estabilidade ou caoticidade deste movimento, uma vez que a utilização de ferramentas distintas pode apresentar resultados conflituosos entre si, como por exemplo um elevado Expoente de Lyapunov (baixo tempo de Lyapunov, definido como  $\tau_{lyap}$ ) mas um baixo número espectral, o que torna necessária a utilização conjunta de diferentes métodos.

Por outro lado, há situações nas quais uma partícula é caracterizada como caótica, tanto com um alto número espectral quanto com um elevado expoente de Lyapunov (curto  $\tau_{lyap}$ ), mas pode passar longos períodos de tempo sem sofrer um evento catastrófico, como uma ejeção do sistema devido a um encontro próximo com um corpo massivo ou a colisão com um dos corpos.

No âmbito dos regimes de movimento caracterizados como caóticos, os tempos de Lyapunov foram a primeira tentativa de quantificação dos tempos de instabilidade de um sistema: uma estimativa de quanto tempo é necessário para que a informação sobre as condições iniciais de uma órbita não possa mais ser resgatada, limitando sua previsibilidade. No entanto, frequentemente são encontrados objetos cujos tempos de Lyapunov são

substancialmente inferiores aos seus próprios tempos de vida (Milani e Nobili 1992).

Um objeto em uma órbita caótica pode apresentar um comportamento aparentemente regular por longos períodos de tempo antes que sua órbita se torne claramente caótica, apresentando transições súbitas entre ressonâncias e se afastando exponencialmente de suas condições iniciais.

Do mesmo modo, uma órbita caracterizada como caótica pode apresentar momentos nos quais a partícula é capturada nas ressonâncias e lá se mantenha por longos períodos de tempo até que passe a apresentar comportamento caótico novamente.

Assim, torna-se necessário o estudo de um processo de natureza difusiva responsável por instabilidades de longo período em sistemas dinâmicos, chamada “Difusão Caótica”, que leva a partícula a apresentar um comportamento irregular após longos períodos de tempo (Morbidelli 2002).

O trabalho de Lecar et al. (1992) foi um dos pioneiros na abordagem do problema dos tempos de Lyapunov subestimados e relacioná-los aos tempos reais de instabilidade.

Em um trabalho essencialmente empírico, os autores consideravam o “Tempo de Instabilidade de Larga Escala” ( $\tau_{inst}$ ) como aquele no qual a órbita sofria uma abrupta perturbação, como por exemplo a intersecção entre a órbita da partícula com a do corpo perturbador. Como resultado, foi obtida uma correlação entre  $\tau_{inst}$  e  $\tau_{lyap}$ , do tipo  $\tau_{inst} \propto \tau_{lyap}^{1.8}$ .

A partir deste trabalho, a difusão caótica em sistemas dinâmicos foi abordada por diferentes teorias e com o uso de diversas ferramentas, com a intenção de dar um significado físico para os tempos de Lyapunov, mais precisamente tentando relacioná-los aos *tempos de difusão* e aos Tempos de Instabilidade de Larga Escala.

Dois referenciais distintos comumente utilizados serão revisados neste capítulo, o espaço de ações e o espaço de frequências. Algumas das principais ferramentas usadas na abordagem para o problema da Difusão Caótica em cada um dos referenciais serão apresentadas e, ao fim, serão apresentadas comparações entre os tempos de Lyapunov e os Tempos de Difusão Caótica calculados a partir destas distintas ferramentas, além de compará-los com os “Tempos de Instabilidade Macroscópica” obtidos por integrações diretas.

## 4.1 Difusão no Espaço de Ações

No trabalho de Murray e Holman (1997), houve a tentativa de desenvolver um modelo analítico para o cálculo dos tempos de Lyapunov e a relação com os Tempos de Instabilidade. A partir do desenvolvimento de um modelo Hamiltoniano para o problema de três corpos restrito e elíptico, foi possível obter estimativas analíticas para  $\tau_{lyap}$  de uma partícula se movendo na região das Falhas de Kirkwood.

Além disso, os autores partiram para uma abordagem estatística dos fenômenos caóticos em vez de acompanhar órbitas individuais, modelando a evolução da distribuição de probabilidade das ações da Hamiltoniana, utilizando a equação de *Fokker-Planck* (Lichtenberg e Lieberman 1992).

No modelo aplicado, foi assumida a hipótese de que, dentro das Ressonâncias de Movimentos Médios, as ações variam como movimento aleatório. Essa hipótese é de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria da difusão caótica, uma vez que os autores somente puderam obter resultados coerentes com Lecar et al. (1992) no caso em que há sobreposição de ressonâncias, que levam a regimes de movimento fortemente caóticos (Regime de Chirikov).

Efetivamente, Varvoglis e Anastasiadis (1996) afirmam que o processo de transporte caótico somente pode ser tratado como um processo de Markov pela equação de *Fokker-Planck* em regiões altamente estocásticas do espaço de fase. Nestas circunstâncias, os tempos de instabilidade seguem a definição de Lecar et al. (1992) do cruzamento de órbitas.

No caso em que a difusão não é normal (ou na forma de passeio aleatório), a equação de *Fokker-Planck* não pode ser aplicada e os autores postulam, ainda, que corpos em “caos estável” estão relacionados a “vôos de Levy”, onde há grandes saltos no espaço de fase.

Em Batygin et al. (2015), os autores consideram o Tempo de Lyapunov como sendo o tempo entre dois encontros sucessivos com a camada estocástica no espaço de fase, resultado obtido analiticamente a partir de um modelo para a Hamiltoniana.

Ainda no âmbito dos modelos analíticos de difusão caótica, Cachucho et al. (2010) estudaram a ressonância de três corpos (5, -2, -2) de um sistema composto por Sol-Júpiter-Saturno-Asteróide, e as difusões *através* e *ao longo* das linhas ressonantes no espaço de ações. A estimativa das taxas de difusão se basearam na teoria de Chirikov (1979) e em um modelo analítico da Hamiltoniana e das Ressonâncias, mais complexo que os abordados

anteriormente, de modo a exibir diferentes fenômenos como difusão rápida e lenta.

No artigo, os autores apresentam que a difusão no semi-eixo maior é relacionado à difusão através das ressonâncias (**Difusão de Chirikov**), enquanto a difusão na excentricidade é relacionada à difusão ao longo das ressonâncias (**Difusão de Arnold**), mas que as taxas e modelos utilizados para abordar a difusão podem ser sensíveis à hamiltoniana e à geometria das ressonâncias.

#### 4.1.1 Modelos Numéricos

Além dos estudos desenvolvidos com base em métodos analíticos, estudos numéricos são de fundamental importância para se quantificar processos difusivos de modo mais genérico e sem a necessidade de se estudar hamiltonianas ou geometrias específicas das ressonâncias.

Froeschlé et al. (2005), Lega et al. (2007) e Martí et al. (2016) estimam um coeficiente de difusão caótica à partir do método de *ensembles*, integrando um número  $n_{ens}$  de partículas na vizinhança imediata de uma condição inicial e obtendo-se a média do desvio quadrático médio de todas as partículas no espaço de fase. O coeficiente de difusão é então obtido através do ajuste linear na evolução temporal da variância de alguma das variáveis de ação do sistema, assumindo-se  $\sigma^2(t) \approx 2Dt^\alpha$ , onde  $\sigma^2(t)$  é a evolução temporal da variância,  $D$  é o coeficiente de difusão e  $\alpha$  é o regime de difusão no qual a partícula se encontra, sendo  $\alpha = 1$  o caso do movimento browniano,  $\alpha < 1$  o do movimento subdifusivo e  $\alpha > 1$  o caso superdifusivo (Cordeiro e Mendes de Souza 2005).

Apesar de não haver um modelo analítico para a difusão caótica e de partir de uma hipótese não universal (da difusão como passeio aleatório), os autores conseguiram diferenciar regimes de difusão caótica, assim como verificaram difusões rápida e lenta.

No entanto Cincotta et al. (2018) indicam que, apesar de se mostrar uma útil ferramenta para estudo dos processos dinâmicos nas regiões caóticas, a maioria dos fenômenos caóticos não segue um movimento aleatório. Assim, a caracterização de coeficientes de difusão a partir da evolução da variância não é uma boa alternativa para se obter detalhes da difusão.

Além disso, apontam que uma das dificuldades do método é o consumo de recursos computacionais, uma vez que são necessários grandes *ensembles* e grandes tempos de integração para detectar alguns dos fenômenos difusivos que ocorrem mais lentamente (Difusão de Arnold).

Neste contexto, Giordano e Cincotta (2018) apresentaram uma nova ferramenta base-

ada na evolução temporal da Entropia de Shannon, a ser apresentado adiante. Por este método, os autores obtiveram coeficientes de difusão e tempos de instabilidade compatíveis com os obtidos por integração direta, mas com menores tempos de integração. Além disso, a dependência dos resultados ao número de partículas dos *ensemble* é baixa, não sendo necessária a integração de várias partículas para cada condição inicial.

## 4.2 Difusão no Espaço de Frequências

Além do estudo da difusão caótica no espaço das ações, há também estudos da difusão das frequências, como apresentado em Laskar (1990), Laskar (1993), Michtchenko e Nesvorný (1996) e Vela-Arevalo e Marsden (2004), que se baseia no fato de frequências associadas a órbitas regulares não variarem no tempo, enquanto as frequências de órbitas caóticas são dependentes do tempo, permitindo o estudo dos fenômenos difusivos no espaço de frequências, como demonstrado no Capítulo 2.

Laskar (1993) cita que uma das principais vantagens do estudo das difusões no espaço de frequências é a independência da escolha das variáveis de ação, uma vez que as frequências podem ser facilmente calculadas sem a necessidade de uma troca ou escolha de um conjunto de variáveis de ação convenientes para o estudo da dinâmica do problema.

Laskar (1990) utilizou, com sucesso, a variação temporal das frequências fundamentais como método de estimar o tamanho das regiões caóticas no Sistema Solar. Do mesmo modo, em Laskar (1993), o autor obteve uma relação empírica entre a difusão da frequência no tempo com aquela no espaço em relação às ações do sistema, resultando na relação típica de processos difusivos:

$$\left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_j^2} \right| = \alpha \left| \frac{\partial f_i}{\partial t} \right|, \quad (4.1)$$

onde o termo à esquerda corresponde ao módulo da segunda derivada da frequência independente  $f_i$  com relação à ação  $y_j$ , e o termo à direita corresponde à derivada temporal da variação desta mesma frequência independente  $f_i$ . Assim, relaciona-se a variação das frequências no espaço de fase com aquela no domínio temporal.

A variação espacial da frequência pode ser obtida pela segunda derivada do Espectro Dinâmico ao longo de uma seção do espaço de fase (e.g. Figuras (3.3) e (3.4)), enquanto a variação temporal pode ser obtida por uma Transformada de Fourier Modificada (FMTM, Laskar 1990) ou pela Análise de Wavelets (WAM, Michtchenko e Nesvorný 1996).

Além da facilidade de tratamento, a análise da difusão no espaço de frequências permite com maior facilidade a visualização da Teia de Ressonâncias do sistema, mostrando as interações entre as ressonâncias de diversas ordens no espaço de frequências.

O método da análise da difusão no espaço de frequências permite a distinção de dois modos de difusão caótica: a difusão de Chirikov e a difusão de Arnold (Laskar 1993, Price-Whelan et al. 2015).

### 4.3 Ferramentas Escolhidas para Estudo da Difusão Caótica

#### 4.3.1 Análise Freqüencial

O método desenvolvido por Laskar (1993) para estudar a evolução temporal das frequências fundamentais do sistema, por exigir a escolha prévia da janela temporal dentro da qual realizar a análise, limita sua aplicação a sistemas que apresentem fenômenos caóticos fracos, com frequências que variam lentamente no tempo.

A partir desta limitação, Michtchenko e Nesvorný (1996) aplicaram a Transformada Contínua de Wavelets (CWT) definida no Capítulo 2 desta monografia. Este método automaticamente ajusta o tamanho das janelas de tempo e de frequência, permitindo o estudo de fenômenos caóticos fortes, como variações abruptas das frequências em curtos períodos de tempo.

Vela-Arevalo e Marsden (2004) aplicaram o método de Wavelets ao estudo da difusão das frequências independentes a sistemas dinâmicos diversos, como o problema de três corpos restrito e circular e em problemas da Física Atômica (Vela-Arevalo e Wiggins 2001).

#### 4.3.2 Difusão por Entropia de Shannon

O Método da Entropia de Shannon proposto por Giordano e Cincotta (2018) considera um plano representativo no espaço de duas ações ( $I, J$ ) escolhidas em um sistema com  $N$ -graus de liberdade e centrado em  $I_{min} < I_0 < I_{max}$  e  $J_{min} < J_0 < J_{max}$  e subdividido em um *grid* de  $q$  células de mesmo tamanho.

Ao longo da integração das equações de movimento para um conjunto de condições iniciais  $[I_0, J_0]$ , as ações  $I(t)$  e  $J(t)$  se moverão pelo espaço de ações  $(I, J)$ , passando a ocupar  $q_0(t) \leq q$  células do *grid* no instante  $t$ . Assim como no caso da Difusão como Passeio Aleatório, as equações de movimento são resolvidas para um *ensemble* de  $n_{ens}$

condições iniciais na proximidade de  $[I_0, J_0]$ .

A entropia de Shannon é, então, definida como  $S(t) = -\sum_{k=1}^q \mu_k(t) \ln \mu_k(t)$ , onde  $\mu_k(t)$  é a probabilidade de ocupação da  $k$ -ésima célula do *grid*. Beaugé e Cincotta (2019) obtiveram computacionalmente que para casos em que o número de pontos  $N$  na trajetória  $\gamma$  descrita pelo par de ações  $[I(t), J(t)]$  é muito maior que o número de células  $q$ , vale a aproximação  $S(t) \approx \ln q_0(t)$ , onde  $q_0(t)$  é a quantidade de células ocupadas no *grid* pela trajetória  $\gamma$  até o instante  $t$ .

Por fim, é definido o coeficiente de difusão  $D_S$ :

$$D_S = \frac{\Sigma(I, J)}{q} q_0(t) \left\langle \frac{dS(t)}{dt} \right\rangle \approx \frac{\Sigma(I, J)}{q} \left\langle \frac{dq_0(t)}{dt} \right\rangle \quad (4.2)$$

onde  $\langle dS_i(t)/dt \rangle$  é a média da derivada temporal da entropia  $S(t)$  de todas as partículas do Ensemble e  $\Sigma(I, J)$  é a área do espaço de fase definido pela dinâmica do par de ações  $(I, J)$  da partícula nominal.

Deste modo, o coeficiente de difusão é estimado à partir da taxa com que um par  $(I, J)$  se espalha pelo espaço de fase.

A fundamentação do método se dá pela seguinte observação: órbitas periódicas e quase periódicas tendem a ocupar regiões limitadas e bem definidas no espaço de fase, confinadas neste subespaço, enquanto órbitas caóticas tendem a ocupar uma área maior do espaço de fase. Órbitas caóticas fracas, por estarem confinadas no espaço de fase, também apresentam pouca variação em  $q_0(t)$ .

#### 4.3.2.1 Aplicação do Método da Entropia de Shannon

Como primeiro contato com a ferramenta, as condições iniciais utilizadas no capítulo anterior  $(x(0) = 0.3654, 0.202, 0.2008, 0.49)$  foram integradas por  $T = 1000$  períodos orbitais da binária ao redor do centro de massa, ou aproximadamente 11500 anos. As condições iniciais  $y(0)$  e  $\dot{x}(0)$  foram fixadas em 0 e  $\dot{y}$  foi calculada a partir das demais condições iniciais e da constante de Jacobi  $C_J = 3.03$ .

Para cada condição inicial integrada, outras seis condições iniciais na proximidade imediata de cada uma delas foi integrada, de modo a se estudar a estabilidade da região do espaço de fase e a sensibilidade da ferramenta.

O par de pseudo-ações utilizado foram o Semi-eixo maior e a Excentricidade da partícula, e o *grid* definido foi  $[a_{min}, a_{max}] \times [e_{min}, e_{max}]$  com  $q = 400 \times 400$  células.

Na Figura 4.1 é possível verificar o comportamento do coeficiente de Difusão de Shannon definido pela Equação (4.2) para as quatro órbitas integradas. A curva correspondente ao coeficiente da órbita periódica tende assintoticamente a zero, de forma monotônica.

Para as órbitas quase-periódica e caótica fraca, o comportamento qualitativo e quantitativo é essencialmente o mesmo nas duas. No entanto, para a órbita caótica confinada, há pequenas flutuações ao longo do tempo. Ao final, o valor do Coeficiente de Difusão de Shannon  $D_S$  das órbitas é aproximadamente duas ordens de grandeza superior ao da órbita periódica.

Por fim, a aplicação da ferramenta na trajetória de uma partícula localizada em uma região de movimento fortemente caótico apresenta um comportamento errático, relacionado às capturas (momentos onde  $D_S$  diminui até interceptar as curvas das órbitas quase-periódica e caótica-fraca) e ejeções (momentos nos quais o valor sobe).

Ao fim da integração, o valor final para o coeficiente é de aproximadamente três ordens de grandeza superior ao atingido pelas órbitas quase-periódica e caótica-fraca, e cinco ordens de grandeza superior ao obtido no estudo da órbita periódica, indicando a sensibilidade da ferramenta na caracterização de diferentes regimes de movimento. Os resultados obtidos estão de acordo com aqueles apresentados em Beaugé e Cincotta (2019).

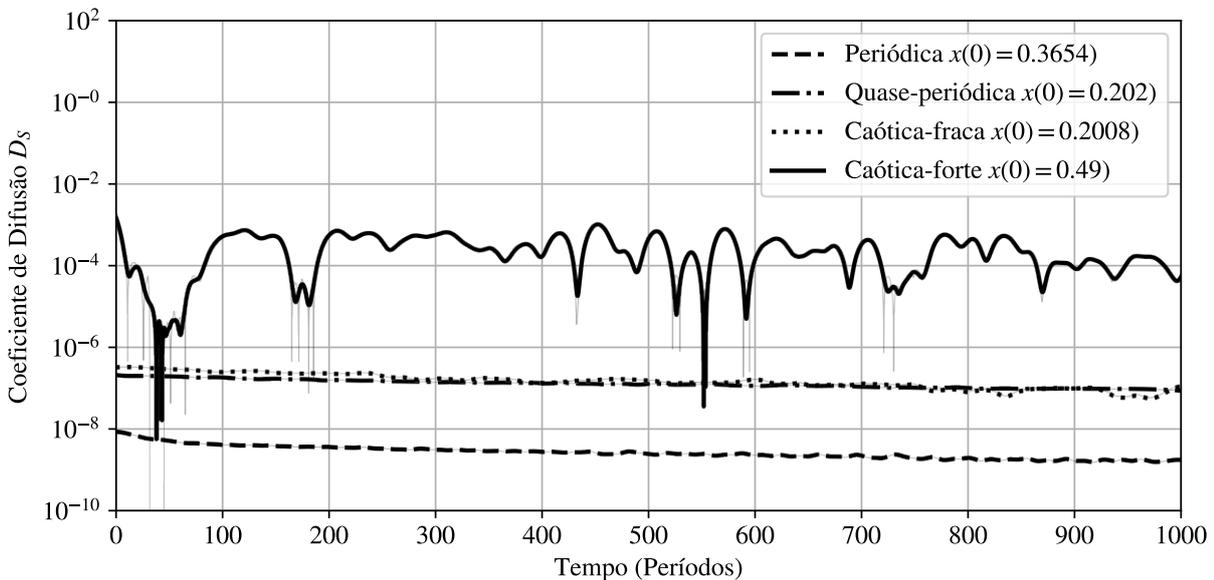


Figura 4.1: Evolução temporal do coeficiente de difusão obtido pela entropia de Shannon para diferentes condições iniciais.

### 4.3.3 Comportamento dos Indicadores

Baseando-nos no estudo empreendido na Subseção 3.3 do Capítulo 3, é realizada uma primeira análise quantitativa da difusão no espaço de fase para cada uma das condições iniciais estudadas.

Nas Figuras 4.2 a 4.5 podem ser vistas, da esquerda para a direita, em sentido horário: Seção de Poincaré, evolução da frequência orbital, evolução do indicador de Lyapunov  $FLI$  e evolução do Coeficiente de Difusão obtido a partir da Entropia de Shannon  $D_S(t)$ .

No caso das seções de Poincaré, foi aplicada uma escala de cor relativa ao instante do tempo de integração em que a trajetória da partícula cruza o plano definido para construção da S.O.S. Deste modo, torna-se possível quantificar, pelas superfícies, os instantes do tempo em que a partícula esteve em dada região do espaço de fase, permitindo a verificação da escala de tempo da difusão no espaço de fase. Pontos pretos correspondem a instantes do tempo próximos de  $t = 0$ , enquanto pontos avermelhados correspondem a instantes avançados no tempo e somente são relevantes para visualização nos casos caóticos (Figuras 4.4 e 4.5).

Na Figura 4.2, pode-se verificar o comportamento dos indicadores para uma órbita periódica localizada no centro da ressonância 2/1.

A análise realizada é a mesma que descrita para a Figura 3.6. Soma-se ao comportamento bem definido de cada um dos indicadores descritos anteriormente, o comportamento assintótico de  $D_S$ , caracterizado por manter valores da ordem de  $D_S \approx 10^{-8}$  durante todo o período de integração.

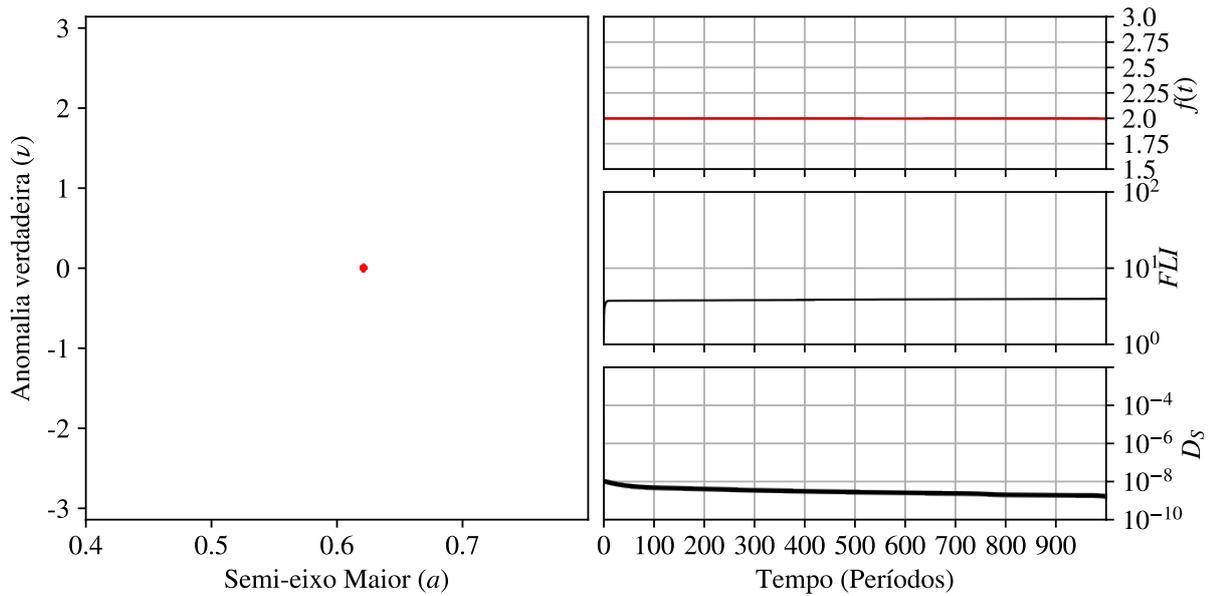


Figura 4.2: Da esquerda para a direita, em sentido horário: Seção de Poincaré com escala de cor codificada pelo tempo de integração, evolução da frequência orbital  $f(t)$ , evolução do  $FLI$  e evolução de  $D_S$  para  $x(0) = 0.3654$

No caso da órbita quase-periódica localizada na região da ressonância  $5/2$ , o comportamento dos indicadores é análogo ao da órbita periódica e pode ser verificado na Figura 4.5.

Sua seção de Poincaré é definida por um conjunto de três curvas contínuas, em número igual à ordem  $q = 3$  da ressonância  $5/2$ ; sua frequência orbital oscila ao redor de um valor constante no tempo igual ao movimento próprio kepleriano  $n$ , conforme verificado nas Figuras 2.11 e 3.8.

O *Fast Lyapunov Indicator* cresce continuamente, com baixo coeficiente angular, chegando ao fim da integração com valor  $FLI < 10$ . O valor do coeficiente de difusão é aproximadamente duas ordens de grandeza superior ao obtido na análise da órbita periódica, entretanto a curva decresce sem oscilações.

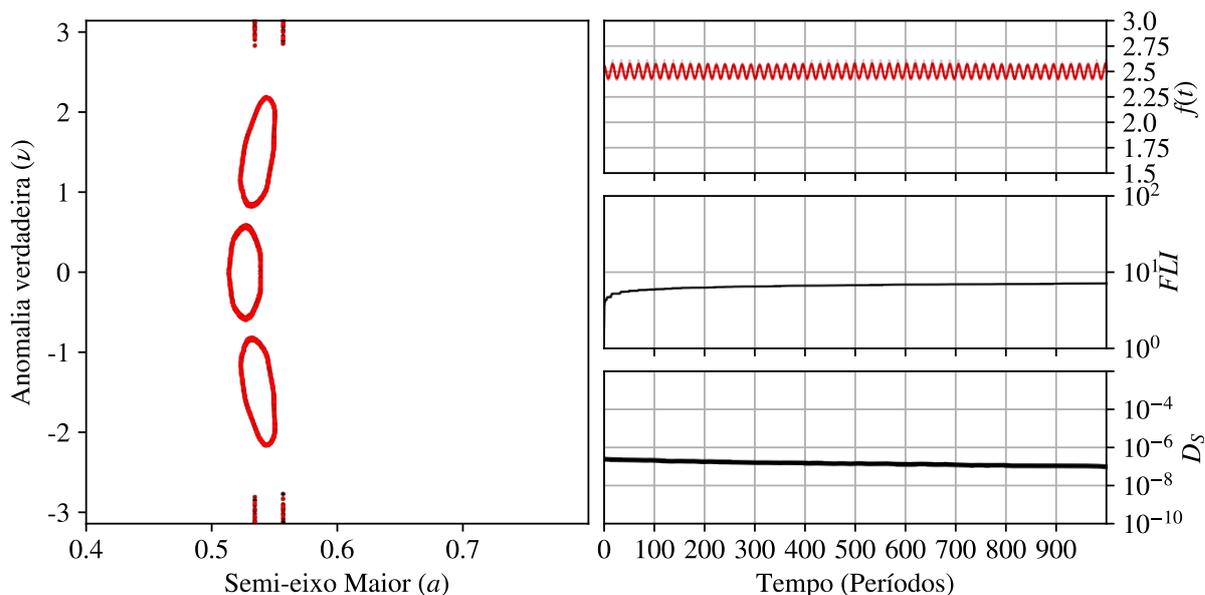


Figura 4.3: O mesmo que 4.2, para  $x(0) = 0.202$

A órbita na camada estocástica da ressonância  $5/2$  é vista na Figura 4.4. O mapa de cor da seção de Poincaré indica que a partícula passa parte do início da integração oscilando entre a ressonância  $5/2$  e a  $8/3$ , até que difunda pela camada estocástica entre as duas ressonâncias pelo restante da integração, conforme indicado pela cor vermelha.

A evolução temporal da frequência orbital oscila de maneira irregular, mas com baixa amplitude durante todo o período de integração, apresentando curtas capturas nas ressonâncias  $5/2$  e  $8/3$ . Seu  $FLI$  chega ao fim da integração com valor próximo de  $FLI = 100$ , característico de regimes de movimento caóticos.

O coeficiente  $D_S$  apresenta um comportamento aproximado com o da órbita quase periódica. No entanto, a segunda metade da evolução do coeficiente apresenta flutuações de baixa amplitude com relação ao da órbita ressonante.

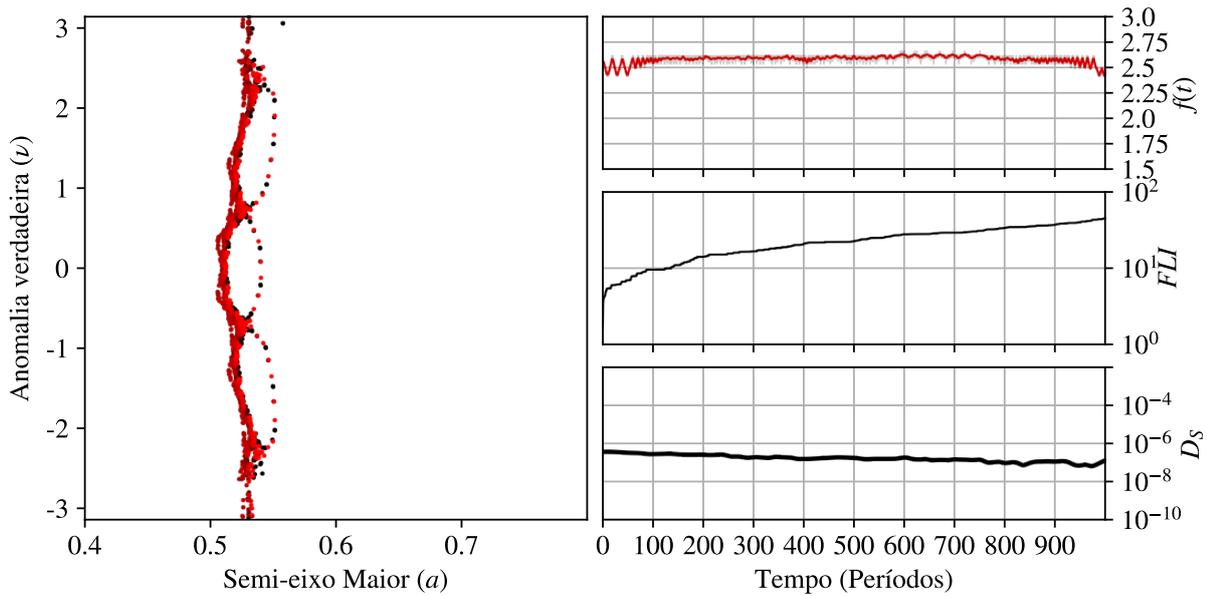


Figura 4.4: O mesmo que 4.2, para  $x(0) = 0.2008$

Na análise da órbita caótica na Figura 4.5, sua seção de Poincaré apresenta a complexidade de fenômenos existente na órbita: Apesar do espalhamento nos pontos, verifica-se uma captura temporária da órbita na ressonância  $7/4$  no início da integração. A variação da frequência orbital evidencia a profundidade de fenômenos, como transições súbitas entre as regiões interna e externa do sistema, assim como capturas em ressonâncias, vistas no intervalo  $500 \leq t \leq 600$  (captura na ressonância  $2/3$ ).

A evolução do  $FLI$  corrobora a complexidade de fenômenos existente na órbita: apesar do elevado valor final, coerente com uma órbita altamente caótica. Entretanto, evidenciam-se regiões nas quais o valor do  $FLI$  se mantém constante, indicativo de capturas em ressonâncias ou de instantes do tempo nos quais a partícula difunde lentamente no espaço de fase.

O comportamento de  $D_S$  é o mesmo daquele realizado na análise da Figura 4.1: O valor final é aproximadamente três ordens de grandeza superior àquele calculado para as órbitas quase-periódica e caótica-fraca. Este exemplo realça o fato de que  $D_S$  não é um indicador de caos, mas sim uma ferramenta para quantificação da difusão caótica.

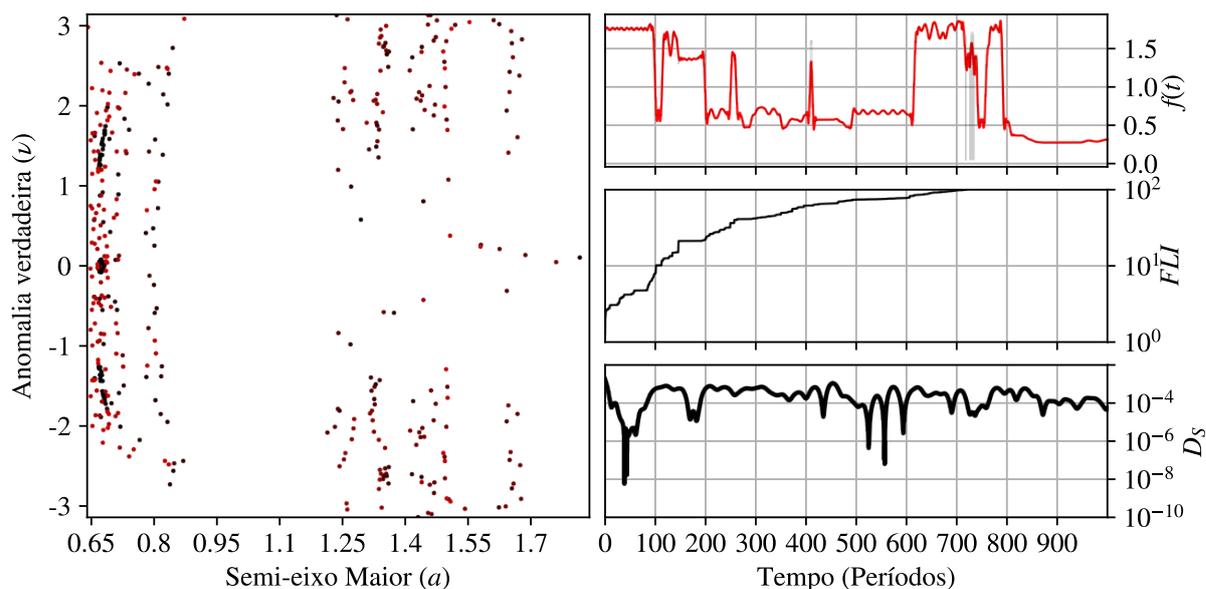


Figura 4.5: O mesmo que 4.2, para  $x(0) = 0.724$ . No estudo detalhado da órbita caótica forte, fica evidente a complexidade de fenômenos existentes.

## 4.4 Definição dos Coeficientes de Difusão

Após a verificação do comportamento dos indicadores de caos, abaixo são apresentadas formas encontradas na literatura de se estimar coeficientes de difusão caótica por distintas abordagens.

### 4.4.1 Difusão em Frequências

#### 4.4.1.1 Equação da Difusão

A primeira quantificação da difusão no espaço de frequências foi definida por Laskar (1993) e corresponde à relação definida na Equação (4.1), que correlaciona a variação espacial das frequências independentes do sistema em função de uma ação definida e a variação temporal destas frequências para uma dada condição inicial.

O lado esquerdo da Equação (4.1) corresponde à segunda derivada do espectro dinâmico em relação à coordenada em função da qual ela está sendo estudada, como no caso da Figura 2.9, levando-se em consideração somente a variação da frequência de maior amplitude calculada para a condição inicial integrada. Assim, o primeiro coeficiente definido é obtido pela equação

$$\delta\delta f(x) = h^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}, \quad (4.3)$$

onde  $h = \Delta x$  é o espaçamento entre as condições iniciais nas quais a segunda derivada foi calculada.

Um exemplo da obtenção deste coeficiente pode ser visto na Figura 4.6 para o espectro dinâmico da Figura 3.3 com  $C_J = 3.23$ , de modo a se verificar com maior facilidade o funcionamento do indicador. A explicação detalhada pode ser vista na legenda.

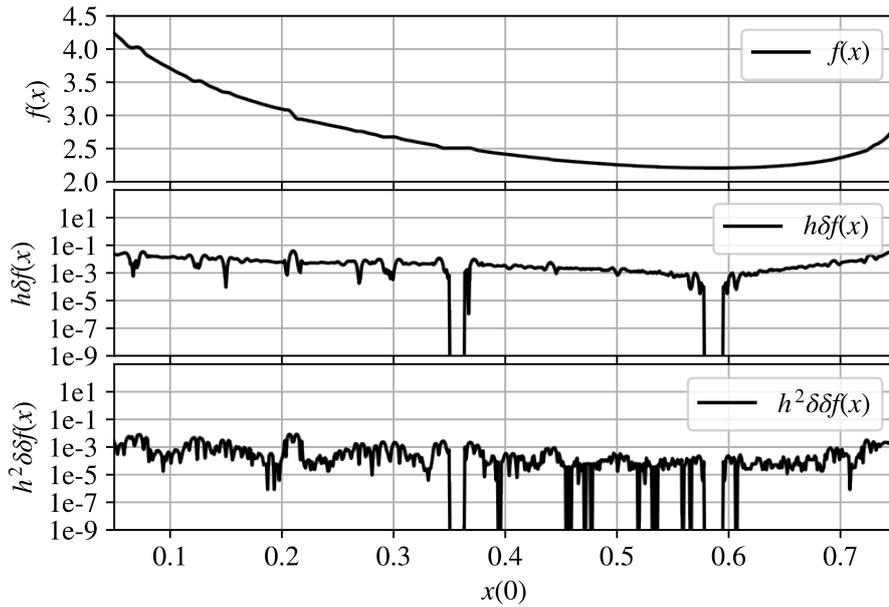


Figura 4.6: Passos realizados para obtenção do coeficiente de difusão de frequência no espaço de fase definido pela Equação (4.3). Painel superior corresponde ao espectro dinâmico construído considerando-se somente a frequência de maior amplitude do espectro. Painel central corresponde à primeira derivada do espectro com relação à coordenada  $x$ , e o painel inferior corresponde à segunda derivada.

Já o lado direito, corresponde à variação temporal da frequência ao longo da órbita obtida para aquela condição inicial. Esta variação temporal pode ser explorada de distintas maneiras, levando à formulação de diferentes coeficientes, apresentados abaixo.

O mais usual é o apresentado em Laskar (1993) e utilizado extensamente na literatura (Wachlin e Ferraz-Mello 1998, Robutel e Gabern 2006, Price-Whelan et al. 2015, Muñoz-Gutiérrez e Giuliatti Winter 2017), e é definido como

$$\delta_t f(t) = | \nu^1 - \nu^2 |, \quad (4.4)$$

onde  $\nu^1$  e  $\nu^2$  são as frequências de maior amplitude calculadas em dois espectros de potência obtidos pela aplicação da Transformada de Fourier em duas janelas temporais consecutivas,

cada uma de tamanho  $T/2$ , sendo  $T$  o tempo de integração total da partícula para dada condição inicial.

Nos casos em que a partícula escapou ou colidiu com algum dos corpos, o  $T$  utilizado na análise ficou definido como  $T = \tau_{escape}$ .

Robutel e Gabern (2006) introduziram a *Variação relativa das frequências independentes*, que é definida como  $D_{rel} = | \nu^1 - \nu^2 | / \nu^1$ . Há ainda outras definições e variações da definição original de Laskar (1993), mas não serão abordadas aqui.

Uma forma mais detalhada e precisa de se obter a difusão das frequências independentes consiste no estudo de sua variação ao longo do tempo (como realizado por Laskar (1990), Michtchenko e Nesvorný (1996) e Vela-Arevalo e Marsden (2004)), utilizando-se o lado direito da Equação 4.1:

$$\delta f(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t}, \quad (4.5)$$

a partir da qual uma quantificação global da difusão da frequência pode ser estimada a partir da média da difusão ao longo do tempo,  $D_{freq} = \langle \delta f(t) \rangle$ .

Ainda utilizando-se a variação temporal das frequências independentes obtida a partir do método de Wavelets, nas próximas aplicações será também utilizado o indicador

$$\delta_{CWT} f(t) = | \nu_{CWT}^1 - \nu_{CWT}^2 |, \quad (4.6)$$

adaptado do método de Laskar (Equação 4.4) onde  $\nu_{CWT}^1$  é o valor médio da variação temporal da frequência independente na primeira metade do intervalo de integração e  $\nu_{CWT}^2$  é o mesmo correspondente à segunda metade do intervalo de integração.

Nas próximas seções, a relação definida pela Equação (4.6) será utilizada em detrimento daquela definida em (4.5) de modo a diminuir artefatos devidos a eventuais erros numéricos.

#### 4.4.1.2 Difusão Como Variação Quadrática Média de Frequências

Ainda no âmbito da estimativa de um coeficiente de difusão obtido no espaço de frequências, Cincotta e Simó (2000) indicam que, apesar de distinguir com precisão entre regiões regulares ou caóticas do espaço de fase, o uso dos métodos frequenciais, bem como dos coeficientes de difusão estimados a partir deles, não estão de acordo com as teorias clássicas de difusão (Chirikov 1979), segundo a qual o coeficiente de difusão deve estar relacionado com um valor quadrático médio, ao invés de um valor médio simples.

Deste modo, Marzari et al. (2003) introduz um coeficiente de difusão baseado na variação temporal da frequência, obtido pelo desvio padrão da frequência estudada:

$$D_{SD} = \frac{\sigma_f}{f}, \quad (4.7)$$

onde  $\sigma_f$  é o desvio padrão da frequência e  $f$  é a frequência estudada no início da integração.

Novos Coeficientes de Difusão: Além disso, neste capítulo serão introduzidos outros três coeficientes de difusão baseados na premissa proposta por Cincotta e Simó (2000):

- $D_{var}$ , que corresponde à fórmula (4.7), mas utilizando-se a variância,
- $D_1 = [f(T) - f(0)]^2/T$ ,
- $D_2 = [f(T) - \overline{f(t)}]^2/T$

onde  $T$  é o tempo total de integração (ou o tempo de escape  $\tau_{escape}$ ),  $f(0)$  é a frequência inicial e  $\overline{f(t)}$  é a frequência média.

Os indicadores  $D_1$  e  $D_2$  foram definidos partindo-se da teoria de difusão caótica utilizada por Froeschlé et al. (2005) e Lega et al. (2007).

Deste modo, foram apresentadas sete formas distintas de se estimar um coeficiente de difusão caótica, partindo-se de variadas premissas e abordagens.

#### 4.4.2 Difusão em Ações

No estudo da difusão caótica no espaço de ações, devido às limitações expostas no início do capítulo, dois coeficientes serão utilizados:

- O coeficiente de difusão obtido à partir da utilização da entropia de Shannon, anteriormente definido pela equação (4.2),  $D_S$ ,
- E os expoentes de Lyapunov, definidos como a taxa de divergência entre duas partículas infinitesimalmente próximas inicialmente, podendo ser interpretados como uma primeira estimativa da taxa de difusão de um sistema uma vez que têm a unidade de  $1/\text{tempo}$ , coerente com coeficientes de difusão tradicionais.

## 4.5 Estudo dos Coeficientes de Difusão no Espaço de Fase

Para análise do comportamento dos coeficientes e caracterização dinâmica de uma região do espaço de fase, o estudo foi realizado da mesma forma que em Cincotta e Giordano (2018) e Alves Silva et al. (2021): um conjunto de  $n = 201$  de condições iniciais no intervalo  $0.05 \leq x(0) \leq 0.75$  foi integrado para valores fixos de  $y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  e  $\dot{y}(0)$  calculado a partir das demais condições iniciais e da constante de Jacobi escolhida  $C_J = 3.03$ . O parâmetro de massa foi escolhido como  $\mu = 0.0009537$ , aproximadamente aquele de um sistema Sol-Júpiter-Asteróide.

Com estes parâmetros, dois conjuntos de integrações foram realizados para cada condição inicial:

1. Uma integração longa, por  $T = 10000$  períodos da binária ao redor do baricentro, em cuja série resultante o Método da Análise de Wavelets foi aplicado de modo a determinar com precisão a evolução de uma das frequências independentes do sistema,
2. Cinco integrações mais curtas, por  $T = 1000$  períodos orbitais, para a condição inicial e um *ensemble* de quatro outras partículas na vizinhança imediata da condição inicial nominal, de modo a se aplicar o método da Entropia de Shannon.

Nos dois casos, para cada uma das integrações realizadas (incluindo-se para as integrações das partículas no *ensemble*) foram calculados também o Número Espectral, o *Fast Lyapunov Indicator*, os tempos de Lyapunov, os Tempos de Escape e as frequências fundamentais do sistema, bem como as frequências fundamentais  $\nu^1$  e  $\nu^2$  calculadas em dois intervalos consecutivos, conforme exigido para cálculo de um coeficiente de difusão definido na Equação (4.4).

O estudo do comportamento dos coeficientes de difusão é realizado em três etapas:

1. Baseado nas definições iniciais da difusão no espaço de frequências definidas por Laskar (1993) e expostas na relação da Equação 4.1,
2. Baseado na definição de Marzari et al. (2003) e na premissa de Cincotta e Simó (2000) de que a difusão em frequências deve ser obtida a partir de uma diferença quadrática média,

3. E baseado na variação do comportamento do Coeficiente de Difusão obtido a partir da Entropia de Shannon e nos expoentes de Lyapunov.

Em todas as curvas construídas com os coeficientes de difusão, a distribuição dos pontos foi suavizada pela aplicação de um Filtro de Savitzky-Golay (Savitzky e Golay 1964) que realiza uma interpolação local levando em consideração uma janela de 11 pontos vizinhos e um polinômio de ordem 5.

#### 4.5.1 Caracterização Dinâmica Inicial do Espaço de Fase

Primeiramente foi realizada uma caracterização preliminar do espaço de fase utilizando-se as ferramentas apresentadas anteriormente: as Seções de Poincaré, o *Fast Lyapunov Indicator* e o Número Espectral. Os resultados da análise sobre uma seção do plano  $x(0) - \dot{x}(0)$  podem ser vistos na Figura 4.7

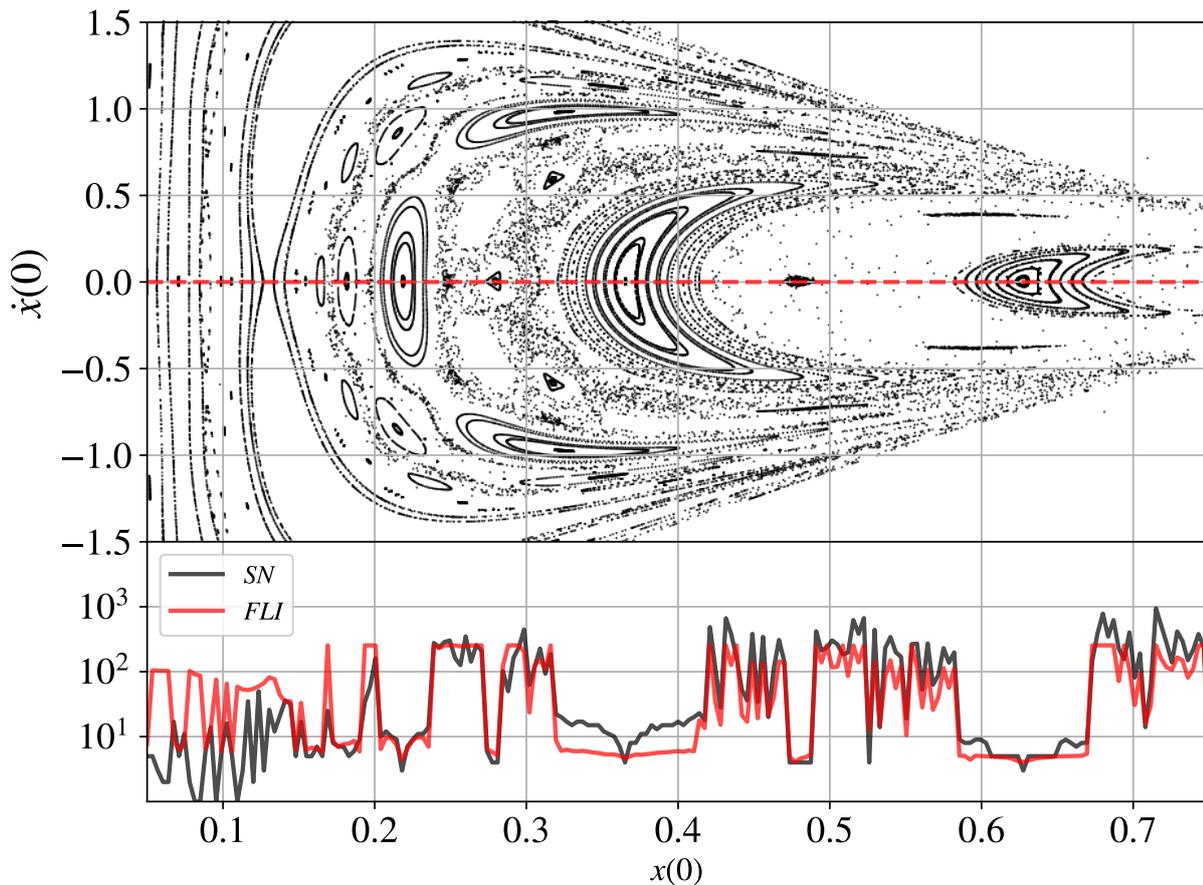


Figura 4.7: Caracterização de uma seção do espaço de fase do PCR3BP pela aplicação das Seções de Poincaré (painel superior), FLI e SN (curvas vermelha e preta do painel inferior, respectivamente).

Conforme indicado nos capítulos anteriores, os métodos apresentados são de fácil apli-

cação e alta confiabilidade. Entretanto, alguns problemas podem surgir: uma vez que a aplicação das seções de Poincaré é condicionada ao número de graus de liberdade do sistema e restrita ao aspecto qualitativo, surge a necessidade de se utilizar outras ferramentas para investigar em detalhes o espaço de fase.

Desta necessidade, foram aplicados o FLI e o SN. Apesar de haver grande concordância na caracterização das regiões do espaço de fase em grande parte da seção, o comportamento dos indicadores passa a divergir na proximidade da massa primária  $m_1$ : o FLI tende a caracterizar órbitas na região das curvas invariantes como caóticas, enquanto o SN as caracteriza como regulares, conforme a realidade.

Isso se dá pelo fato do indicador variacional crescer linearmente com o tempo, com um elevado coeficiente angular. Deste modo, após longos períodos de integração, mesmo que o perfil de crescimento do  $FLI$  seja linear, seu valor final é elevado, levando à caracterização das curvas de circulação como caóticas.

Do mesmo modo, há circunstâncias nas quais o SN interpreta uma grande quantidade de harmônicos bem definidos como um alto número espectral, levando à caracterização de uma órbita regular como caótica.

Mesmo que o surgimento de harmônicos de maior ordem esteja relacionado com o aumento das instabilidades, estas órbitas ainda são regulares. Desta forma, faz-se necessária a aplicação de métodos de se quantificar a estabilidade real da região, a partir do estudo da difusão caótica.

#### 4.5.2 Verificação da Relação $\delta\delta f(x) \propto \delta_t f(t)$ de Laskar

Primeiramente, a parte à esquerda Equação 4.2 foi estimada a partir de três espectros dinâmicos:

- Utilizando-se a média das frequências de todas partículas do ensemble,
- Utilizando-se somente a frequência da condição inicial nominal, no centro do ensemble,
- Utilizando-se o valor médio da evolução temporal da frequência obtida pelo Método da Análise de Wavelets, calculada a partir do resultado da integração longa.

Estes resultados encontram-se nos três painéis à esquerda na Figura 4.8, de cima para baixo, respectivamente.

Para a parte à direita, a estrutura foi parecida e estimada de três modos:

- A partir da média das frequências fundamentais  $\bar{\nu}^1$  e  $\bar{\nu}^2$ , calculadas em dois intervalos consecutivos de todas partículas do ensemble, sendo  $\bar{\nu}^i$  a média da frequência no  $i$ -ésimo intervalo de todas as partículas do ensemble,
- Utilizando-se somente as frequências fundamentais  $\nu^1$  e  $\nu^2$  da condição inicial nominal, no centro do ensemble,
- Utilizando-se a frequência média em dois intervalos consecutivos da evolução temporal da frequência obtida pelo Método da Análise de Wavelets, calculada a partir do resultado da integração longa.

Estes resultados encontram-se nos três painéis à direita da mesma Figura. Os pontos triangulares, pretos, correspondem aos valores calculados e a curva contínua, em verde, corresponde à aplicação do filtro de Savitzky-Golay considerando os 11 pontos vizinhos.

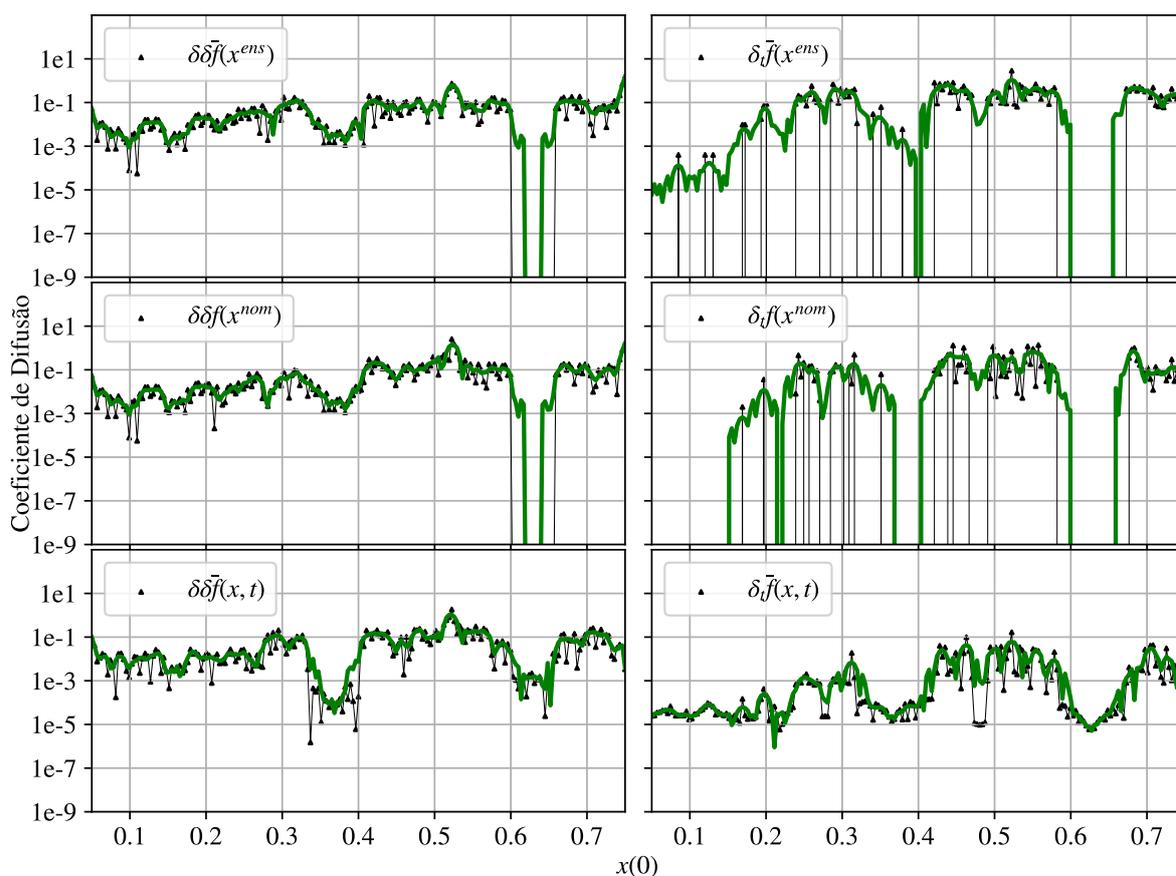


Figura 4.8: Obtenção da relação  $\delta\delta f(x) \propto \delta_t f(t)$  descrita por Laskar (1993) de três formas distintas: Utilização da frequência média das partículas de um Ensemble (painel superior), utilização da frequência da partícula originada na condição inicial no centro do Ensemble (painel central) e utilização da evolução temporal da frequência (painel inferior). Painéis à esquerda correspondem à variação espacial das frequências, enquanto painéis à direita correspondem à variação temporal das frequências.

Verifica-se que os resultados obtidos pela utilização de todas as partículas do ensemble ou somente com a partícula referente à condição inicial nominal apresentam poucas diferenças entre si. A utilização de uma só partícula apresenta maior espalhamento na análise temporal das frequências, mas não diverge substancialmente do resultado obtido pela utilização do ensemble na caracterização dinâmica do espaço de fase.

No entanto, na região próxima de  $m_1$ , dominada por órbitas periódicas não-ressonantes, onde as frequências variam lentamente, a utilização somente da partícula na condição inicial nominal indica coeficientes  $\delta_t f(t) = 0$ , enquanto a utilização do ensemble suaviza o comportamento do indicador temporal.

A aplicação da Análise de Wavelets para estudo da difusão das frequências em função das regiões no espaço de fase (Painel inferior esquerdo na Figura 4.8) retorna uma curva

com perfil semelhante àquele obtido pela Análise Espectral nos dois painéis superiores, apresentando maior sensibilidades às regiões de movimento regular.

Já na análise temporal da frequência orbital (Painel inferior direito na Figura 4.8), verifica-se que a distribuição dos pontos calculados ao redor da curva suavizada em verde apresenta um menor espalhamento. Nesta figura é possível discernir com maior riqueza de detalhes as regiões relativas às ressonâncias, camadas estocásticas e zonas caóticas. Além disso, o resultado obtido permite quantificar a difusão nas regiões de caos confinado como sendo até duas ordens de grandeza inferiores àquela das regiões de movimento fortemente caótico.

Comparando-se os resultados com os demonstrados na Figura 4.7, percebe-se a concordância qualitativa das curvas nas regiões amplamente caóticas, bem como são claras e bem marcadas as regiões de estabilidade. No entanto, nas regiões onde há caos confinado, os métodos variacional e espectral não permitem uma caracterização intuitiva do regime de movimento predominante, o que pode ser facilmente percebido na utilização dos coeficientes de difusão.

Destaca-se também que a relação obtida por Laskar (1993) não se verifica completamente nos dois pares de painéis superiores (obtidos utilizando-se a Análise Espectral tradicional). Esta discrepância é devida ao fato dos painéis à esquerda serem obtidos a partir de um espectro dinâmico previamente calculado, o que resulta na propagação de suas limitações e dependências a parâmetros como o tempo total de integração  $T$  e o passo de amostragem  $\Delta t$  das séries temporais analisadas.

### 4.5.3 Coeficiente de Difusão Como Variação Quadrática Média

A segunda parte do estudo consiste na análise dos coeficientes de difusão caótica obtidos exclusivamente pela análise estatística da evolução temporal das frequências fundamentais, a partir da Equação 4.7 e três variantes distintas já definidas anteriormente.

Na Figura 4.9 pode ser visualizada a caracterização da seção do espaço de fase a partir de um coeficiente de difusão caótica obtido por quatro análises distintas da evolução temporal da frequência fundamental do sistema.

Assim como na Figura 4.8, os pontos triangulares, pretos, correspondem aos valores calculados e a curva contínua, em verde, corresponde à aplicação do filtro de Savitzky-Golay considerando os 11 pontos vizinhos.

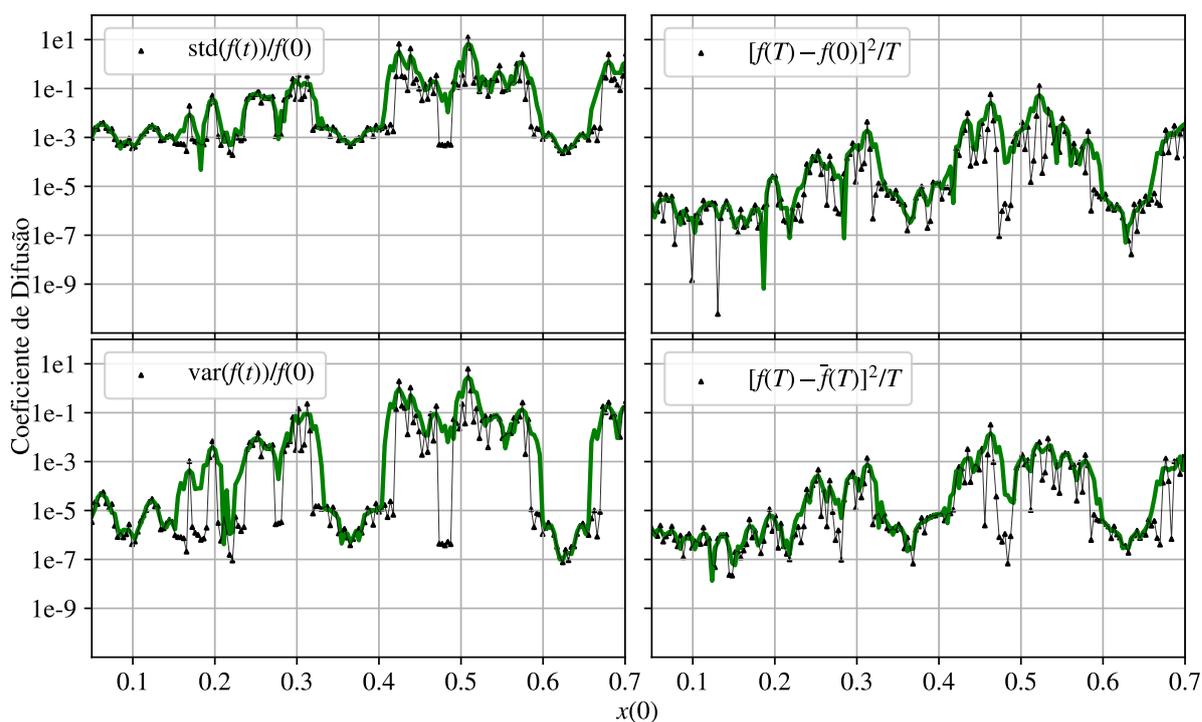


Figura 4.9: Estimativa do Coeficiente de Difusão Caótica a partir da variação temporal da frequência fundamental utilizando-se o Desvio Padrão (painel superior esquerdo), a variância (painel inferior esquerdo), desvio quadrático médio com relação à frequência inicial (painel superior direito) e desvio quadrático médio com relação à frequência média (painel inferior direito)

Nos painéis à esquerda, utilizando-se o desvio padrão (painel superior) e a variância (painel inferior) da evolução da frequência, conforme utilizado por Marzari et al. (2003), as regiões regulares e fortemente caóticas são facilmente discerníveis, especialmente ao utilizar-se a variância como método para quantificar a difusão caótica. Regiões onde a movimentação caótica se encontra confinada apresentam coeficientes de difusão da ordem de 100 vezes inferiores aos das regiões dominadas pelos regimes fortemente caóticos de movimento.

Já no cálculo do coeficiente pela abordagem de Cincotta e Simó (2000) e Lega et al. (2007), apesar de haver um maior espalhamento nos dados, regiões de movimento regular são facilmente distinguíveis de regiões caóticas, assim como zonas do espaço de fase onde há difusão caótica confinada podem ser vistas com maior clareza, sem ter sua *caoticidade* superestimada, como por exemplo em  $x(0) \approx 0.2$ , que corresponde a uma região confinada entre as ressonâncias  $8/3$  e  $5/2$  e que apresenta uma baixa difusão no espaço de fase.

#### 4.5.4 Difusão de Shannon no Espaço de Ações

Por fim, foi realizado o estudo do comportamento do Coeficiente de Difusão obtido a partir da Entropia de Shannon, mostrado na Figura 4.10.

No estudo do comportamento de  $D_S$  foram estimados os coeficientes de quatro modos distintos, dois utilizando-se o ensemble de partículas e dois utilizando-se somente a partícula central do ensemble: Para cada um dos conjuntos o coeficiente foi estimado como sendo o valor médio da evolução temporal de  $D_S$  ( $\langle D_S(t) \rangle$ ) e o valor final do coeficiente ao final da integração  $T$  ( $D_S(T)$ ).

Na figura, as regiões caracterizadas como regulares são coincidentes com locais de difusão mínima, bem como regiões fortemente caóticas apresentam elevadas taxas de difusão.

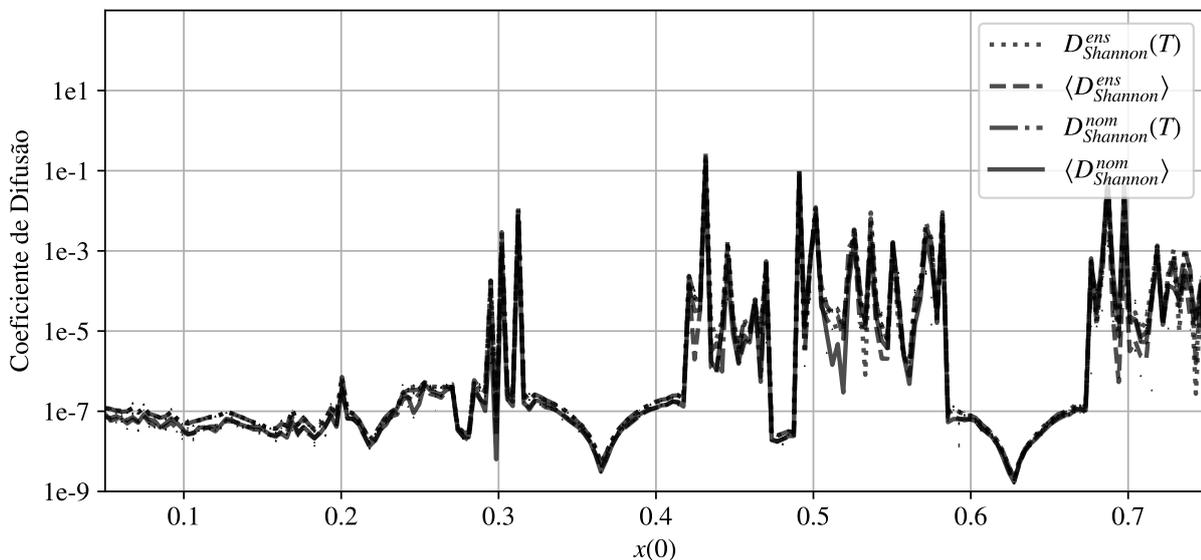


Figura 4.10: Comportamento do coeficiente de Difusão de Shannon obtido pela Equação 4.2 ao longo de uma seção do espaço de fase

Regiões caracterizadas como fracamente caóticas, nas quais a partícula difunde em um regime confinado, apresentam baixos coeficientes de difusão, uma vez que uma órbita iniciada ali tende a se manter na vizinhança da condição inicial.

Em geral, percebe-se que o coeficiente de difusão das regiões onde a partícula apresenta baixa difusão, é da ordem de três ordens de grandeza inferior àqueles obtidos no estudo de regiões caóticas, o que indica que a ferramenta parece mais sensível às regiões onde há caos fraco do que as baseadas no estudo no espaço frequencial. No entanto, o comportamento do coeficiente de difusão é errático em regiões de movimento fortemente caótico, apresentando

grandes saltos.

Além disso, evidencia-se que o comportamento do indicador, conforme obtido por Giordano e Cincotta 2018 não é substancialmente alterado pela utilização de partículas individuais ou ensembles, bem como apresenta um comportamento parecido ao utilizarmos tanto o valor médio da evolução temporal do coeficiente quanto seu valor final.

#### 4.6 Estimativa dos Tempos de Difusão

A grande utilidade de estimar coeficientes de difusão caótica se dá pela possibilidade de se obter um vislumbre dos tempos de difusão nas diferentes regiões do espaço de fase, que são intimamente ligados com os Tempos de Instabilidade de Larga Escala (Milani e Nobili 1992).

Entretanto, não há uma definição única de cada estimativa. Além dos tempos de Lyapunov  $\tau_{lyap}$ , resultado direto do cálculo dos expoentes de Lyapunov, há na literatura distintos modos de se estimar os tempos de difusão a partir dos coeficientes de difusão calculados por diferentes abordagens.

Abaixo estão listadas algumas estimativas para os Tempos de Difusão/Instabilidade obtidos para distintos métodos e que serão aplicadas nessa seção:

1. Price-Whelan et al. (2015) introduz uma definição parecida, definida por

$$\tau_{dif} = T\nu^1 / (|\nu^1 - \nu^2|)$$

e baseada na estimativa de Robutel e Gabern (2006). Assim, esta estimativa será definida  $\tau_{relative}$ , conforme aplicada por Munõz-Gutiérrez e Giuliatti Winter (2017).

2. Na utilização do Desvio Quadrático Médio da evolução temporal das frequências independentes, seguindo a aplicação de Froeschlé et al. (2005), Lega et al. (2007) e Cincotta e Giordano (2018), o tempo de instabilidade será definido como  $\tau_{var} = 1/D_{var}$  para o coeficiente estimado por Marzari et al. (2003)  $D_{var}$  e  $\tau_{MSD} = 1/D_{MSD}$ , onde  $D_{MSD} = D_2$ .
3. Da parte da difusão no espaço de ações, a utilização da Entropia de Shannon foi introduzida juntamente da estimativa dos tempos de difusão como sendo somente  $\tau_{dif} = 1/D_S$  (Beaugé e Cincotta 2019), distinta daquela proposta por Alves Silva et al. (2021).

Os resultados obtidos para estimativa dos Tempos de Difusão a partir dos diferentes coeficientes de difusão e das definições acima podem ser vistos na Figura 4.11.

Deste parágrafo em diante, “Tempos de Instabilidade” se referem aos tempos de instabilidade macroscópica obtidos a partir das integrações, enquanto os “tempos de difusão” são considerados como os tempos de instabilidade estimados a partir dos coeficientes de difusão apresentados.

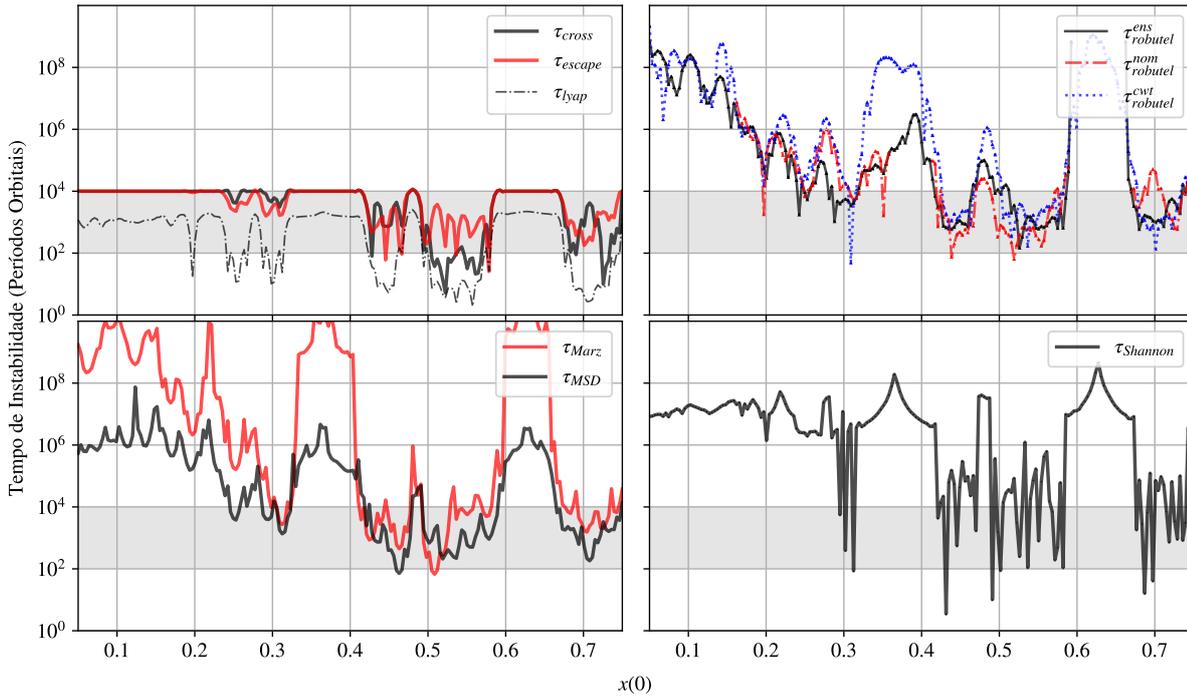


Figura 4.11: Tempos de instabilidade obtidos por diferentes métodos. Painel superior esquerdo: integração direta (curva vermelha representa tempos de escape/colisão, curva preta sólida representa tempos de intersecção entre órbitas e curva preta tracejada corresponde aos tempos de Lyapunov. Painel superior direito: Tempos de difusão obtidos pela definição de Price-Whelan et al. (2015) de  $\tau_{robotel}$  utilizando-se um ensemble de partículas (curva preta sólida), uma partícula no centro do ensemble (curva pontilhada vermelha) e utilizando-se os resultados obtidos a partir da WAM. Painel inferior esquerdo: tempos de difusão obtidos a partir do coeficiente de difusão de Marzari (curva em vermelho,  $\tau_{var}$ ) e do desvio quadrático médio (curva preta,  $\tau_{MSD}$ ). Painel inferior direito: tempos de difusão obtidos pela utilização da entropia de Shannon. A região em cinza corresponde aos tempos de instabilidade típicos obtidos pela integração direta.

No painel superior esquerdo podem ser observados os tempos de colisão/escape  $\tau_{escape}$ , os Tempos de intersecção de órbitas  $\tau_{cross}$  e os tempos de Lyapunov  $\tau_{lyap}$  (curvas vermelha, preta e preta tracejada, respectivamente) obtidos por meio das integrações diretas das equações de movimento por longos períodos.

Os tempos de Lyapunov apresentam correlações variadas com os tempos de instabili-

dade macroscópica. Em regiões de regime de movimento regular, seu valor é constantemente dez vezes inferior aos resultados das integrações diretas. Para regiões de caos confinado,  $\tau_{Lyap}$  apresenta relação exponencial, semelhante ao regime de Nekhoroshev descrito em Morbidelli e Froeschlé (1996). Nas regiões onde predominam regimes de movimento fortemente caóticos, os tempos de Lyapunov apresentam correlação polinomial com os tempos de instabilidade, conforme apontado por Lecar et al. (1992), além de correlação pontual com os  $\tau_{cross}$ . Entretanto, conforme discutido por Morbidelli e Froeschlé (1996), a correlação polinomial tem amparo essencialmente empírico, enquanto a correlação exponencial tem origem no estudo de sistema hamiltonianos.

A estimativa dos tempos de instabilidade obtidos a partir da teoria de Laskar (1993) apresenta grande concordância com os resultados obtidos pela integração direta, mesmo com a utilização de partículas individuais integradas por curtos períodos ao invés da utilização de ensembles. A utilização dos resultados obtidos pelo WAM também se mostram coerentes com o obtido pelos outros métodos.

Os tempos de difusão obtidos a partir da teoria de Chirikov (1979) e Cincotta e Simó (2000) apresentam correlação variável com os tempos de instabilidade: Em regiões de movimento fracamente caótico, os tempos de difusão  $\tau_{MSD}$  baseados em Froeschlé et al. (2005) apresentam uma correlação com os tempos de intersecção de órbitas  $\tau_{cross}$ , conforme postulado por Lecar et al. (1992), enquanto, em regiões de movimento fortemente caótico, apresentam maior correlação com os tempos de escape  $\tau_{escape}$ . Por outro lado, os tempos de difusão obtidos pelo coeficiente de Marzari et al. (2003),  $\tau_{Marz}$ , apresentam uma semelhança qualitativa com os tempos de instabilidade, com um comportamento errático, à parte da região entre as duas ressonâncias de ordem  $q = 1$  localizadas em  $0.4 \leq x(0) \leq 0.55$ .

Estes resultados são de fundamental importância por permitir o vislumbre de um vínculo entre o resultado empírico obtido por Lecar et al. (1992) com aquele desenvolvido pela teoria da difusão de Chirikov (1979), indicando que a abordagem proposta por Cincotta e Simó (2000) para correlacionar a difusão no espaço de frequências com tempos de instabilidade macroscópica do sistema devem ser abordadas por meio do desvio quadrático médio.

Os tempos de difusão obtidos à partir da análise da entropia de Shannon apresentam relativa concordância nas regiões de caos fraco e difusão lenta, mas não determinam corretamente tempos de difusão nas regiões de movimento fortemente caótico. Este com-

portamento está relacionado à constante de escala presente na Equação 4.2 e devido ao fato de que as partículas localizadas em regiões fortemente caóticas não apresentam ergodicidade, mas sim uma complexidade de fenômenos nas vizinhanças imediatas das ressonâncias (Alves Silva et al. 2021)

## 4.7 Conclusões

Conforme Cincotta e Simó (2000), a utilização de diferentes ferramentas para realizar a caracterização dinâmica de sistemas garante maior precisão no processo.

Entretanto, deve-se ter em mente aspectos relativos ao custo-benefício computacional e dos limites de aplicabilidade das ferramentas.

O estudo da difusão caótica no espaço de frequências se mostrou vantajoso em diversos aspectos: sua formulação é simples e matematicamente robusta, a implementação computacional dos métodos já está bem estabelecida e sua utilização não exige longos tempos de integração. Além disso, resultados pelo uso de partículas individuais integradas por curtos períodos de tempo retornam resultados confiáveis e coerentes com aqueles obtidos pela integração direta.

A utilização do método de Wavelets é computacionalmente mais caro, no entanto permite a clara visualização da diversidade de fenômenos que possa existir em uma órbita. Sua aplicação à teoria da difusão de Laskar (1993) retornou resultados condizentes com os obtidos pela utilização da Análise Espectral usual. Entretanto, foi a utilização conjunta das teorias de Chirikov (1979) e Marzari et al. (2003), em concordância com o postulado por Cincotta e Simó (2000), que apresentou resultados mais robustos e fieis aos dados das integrações diretas, indicando que o estudo do desvio quadrático médio das frequências independentes seja um caminho natural para estudo da difusão caótica.

Por fim, a utilização da entropia de Shannon como método para quantificação da difusão caótica tem sido continuamente aperfeiçoada e tem apresentado resultados robustos e elucidativos (Beaugé e Cincotta 2019, Alves Silva et al. 2021), contudo a escolha prévia do *grid* de ações, assim como a determinação do par de ações a ser estudado, pode levar a artefatos e flutuações que acabem por exigir a utilização de um *ensemble* de partículas, mesmo que seja possível obter resultados confiáveis com um baixo número delas, fazendo com que a utilização do método de Shannon passe a ter um maior custo computacional,

principalmente em regiões onde predominam os regimes de movimento caótico.

Além das vantagens citadas, o estudo da difusão caótica no espaço de frequências se mostra especialmente adequado considerando-se que o surgimento de fenômenos caóticos está diretamente relacionado à não-harmonicidade das órbitas estudadas.

Deste modo, a utilização do espaço de frequências como ponto de partida na caracterização global do espaço de fase permite imediatamente um vislumbre do mecanismo interno que dá origem à destruição da estabilidade nas distintas regiões.

No entanto, é importante destacar que a escolha das ferramentas a se utilizar também depende da natureza do problema e dos diferentes regimes de movimento que existem no sistema.

Em situações nas quais houver um interesse em identificar e estudar regiões de movimento regular, todas as ferramentas apresentaram resultados convergente na caracterização de ressonâncias, especialmente o método baseado na entropia de Shannon, capaz de distinguir claramente entre regiões de movimento periódico e quase-periódico, assim como de caracterizar claramente os centros das ressonâncias.

Do mesmo modo, os métodos baseados no estudo dinâmico no espaço de frequências apresentam resultados coerentes no estudo das regiões de movimento fraco e fortemente caóticos do espaço de fase.

Por fim, face à limitação de recursos computacionais e aos aspectos fenomenológicos das ferramentas e referenciais expostos, fica indicado que a utilização do método de Wavelets é o que apresentou melhor concordância com os resultados esperados.



## Conclusão

Nesta dissertação foram expostas distintas ferramentas para detecção de caos e estudo da difusão caótica.

No Capítulo 2 foram apresentadas propriedades, limitações, vantagens e desvantagens destas ferramentas. As Superfícies de Seção de Poincaré (Henon e Heiles 1964) apresentam uma maneira intuitiva e robusta de diferenciar entre os distintos regimes de movimento, mas são limitadas a sistemas com dois graus de liberdade com conservação da energia total.

Enquanto os métodos variacionais tendem a caracterizar com maior resolução as estruturas dinâmicas no espaço de fase (Froeschlé et al. 1997, Cincotta e Simó 2003), seus representantes são computacionalmente caros.

Do mesmo modo, os métodos espectrais são de fácil aplicação e matematicamente robustos, no entanto padecem da desvantagem de permitir o surgimento de artefatos relacionados à natureza das órbitas estudadas, fazendo com que sua aplicação seja dependente da escolha da coordenada estudada.

A principal vantagem dos métodos variacionais consiste no rápido resgate dos Tempos de Lyapunov, enquanto a vantagem do Método do Número Espectral consiste na clara determinação das regiões de movimento caótico e dos mecanismos que geram caos com um baixo custo computacional e fácil implementação.

O subproduto natural do Método do Número espectral é o Espectro Dinâmico, poderosa ferramenta que permite a detecção de artefatos e acompanhar o comportamento das frequências independentes do sistema em função das coordenadas do espaço de fase, bem como a determinação da extensão das regiões caóticas (Laskar 1990). Por este estudo, é possível compreender o comportamento das frequências no espaço de fase.

Aliado ao Método da Análise de Wavelets (Michtchenko e Nesvorný 1996), torna-se

possível o estudo do comportamento das frequências independentes também no domínio temporal, o que permite relacionar as componentes frequenciais no espaço de fase com sua dinâmica ao longo do tempo, resultado fundamental dos estudos de Laskar (1993).

No Capítulo 3, a aplicação da Análise de Wavelets (Michtchenko e Nesvorný 1996) juntamente do Espectro Dinâmico permite o estudo da difusão de órbitas no espaço de frequências, de fundamental importância na determinação da real estabilidade das órbitas e das distintas regiões do espaço de fase, como aquelas nas quais a órbita se encontra confinada e difunde lentamente.

Neste contexto, no Capítulo 4 são apresentadas duas abordagens distintas para o problema da Difusão: a difusão estudada no espaço de ações e no espaço de frequências, utilizando-se o Método da Entropia de Shannon (Giordano e Cincotta 2018) como representante das ações, e a análise frequencial e de Wavelets no espaço de frequências.

Os resultados foram convergentes entre si na determinação da estabilidade das distintas regiões do espaço de fase. Além disso, fomos capazes de recuperar a fundamental relação de Laskar (1993), relacionando a difusão de frequências no espaço de ações com aquela no domínio temporal.

A estimativa dos tempos de difusão trouxe luz às estruturas do espaço de fase que não puderam ser elucidadas a partir da aplicação dos métodos de detecção de caos como o FLI e o SN, indicando regiões nas quais órbitas são caracterizadas como caóticas, mas que lá permanecem por tempos comparáveis ao tempo total de integração, relacionando-se com os “Tempos de Instabilidade Macroscópica”.

O estudo da difusão no espaço de frequências, além de se relacionar com aquele no espaço de ações, se mostrou robusto em curtos tempos de integração, utilizando-se tanto uma partícula individual quanto um conjunto de partículas, fazendo com que sua aplicação retorne resultados coerentes com os obtidos pelas integrações diretas em um tempo menor de integração, por um método de fácil implementação.

A utilização da evolução temporal das frequências orbitais como ferramenta para se quantificar a difusão caótica nas diversas regiões do espaço de fase, ao juntarmos as teorias de Chirikov (1979) e Marzari et al. (2003), conforme proposto por Cincotta e Simó (2000), nos permitiu obter estimativas qualitativa e quantitativamente coerentes para os tempos de instabilidade, de acordo com os tempos de instabilidade macroscópica. Novos estudos deverão ser realizados para se verificar a sensibilidade desta ferramenta aos tempos de

integração.

No nosso estudo, a análise da difusão caótica pela aplicação da entropia de Shannon se mostrou computacionalmente desgastante. Além disso, a necessidade de se escolher um conjunto apropriado de ações, bem como de se definir previamente o *grid* no qual a análise vai ser realizada, pode levar ao surgimento de artefatos. Entretanto, o método tem sido estudado mais a fundo, assim como suas aplicações tem sido expandidas (Alves Silva et al. 2021) e novos testes devem ser realizados, uma vez que a ferramenta se mostra promissora na estimativa dos tempos de instabilidade.

Por fim, finalizamos o estudo reforçando os resultados apresentados por Cincotta e Simó (2000), de que a utilização conjunta de diferentes ferramentas permite a compreensão mais precisa e aprofundada sobre as diferentes estruturas dinâmicas e comportamentos presentes no sistema, e que mais testes e aplicações devem ser feitos como forma de se confirmar os resultados obtidos aqui, de modo a permitir a caracterização dinâmica de sistemas dinâmicos mais complexos. Além disso, a escolha das ferramentas utilizadas depende da natureza do problema estudado bem como da variedade de regimes dinâmicos que se espera observar em seu estudo.



## Referências Bibliográficas

- Alves Silva R., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Cincotta P. M., Giordano C. M., Instability times in the HD 181433 exoplanetary system, *A&A*, 2021, vol. 652, p. A112
- Applegate J. H., Douglas M. R., Gursel Y., Sussman G. J., Wisdom J., The outer solar system for 200 million years., *AJ*, 1986, vol. 92, p. 176
- Barrio R., Borczyk W., Breiter S., Spurious structures in chaos indicators maps, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, vol. 40, p. 1697
- Batygin K., Deck K. M., Holman M. J., Dynamical Evolution of Multi-resonant Systems: The Case of GJ876, *AJ*, 2015, vol. 149, p. 167
- Beaugé P. M., Cincotta P. M., Shannon entropy applied to the planar restricted three-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2019, vol. 131, p. 21
- Belbruno E., Topputo F., Gidea M., Resonance transitions associated to weak capture in the restricted three-body problem, *Advances in Space Research*, 2008, vol. 42, p. 1330
- Cachucho F., Cincotta P. M., Ferraz-Mello S., Chirikov diffusion in the asteroidal three-body resonance (5, -2, -2), *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2010, vol. 108, p. 35
- Carpino M., Milani A., Nobili A. M., Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer planets, *A&A*, 1987, vol. 181, p. 182
- Chirikov B. V., A universal instability of many-dimensional oscillator systems, *Phys. Rep.*, 1979, vol. 52, p. 263

- Cincotta P. M. C. G., Simó C., Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2003, vol. 182, p. 151
- Cincotta P. M., Giordano C. M., Phase correlations in chaotic dynamics: a Shannon entropy measure, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, vol. 130, p. 74
- Cincotta P. M., Giordano C. M., Martí J. G., Beaugé C., On the chaotic diffusion in multidimensional Hamiltonian systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, vol. 130, p. 7
- Cincotta P. M., Simó C., Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I, *A&AS*, 2000, vol. 147, p. 205
- Cordeiro R. R., Mendes de Souza L. A., Anomalous diffusion in the first-order Jovian resonance, *A&A*, 2005, vol. 439, p. 375
- Ferraz-Mello S., *Caos e Planetas: Dinâmica Caótica de Sistema Planetários*. Livraria da Física, 2021, 244 p.
- Ferraz-Mello S., Beaugé C., Michtchenko T. A., Extrasolar multiplanet systems, 2008, p. 24
- Fouchard M., Lega E., Froeschlé C., Froeschlé C., On the Relationship Between Fast Lyapunov Indicator and Periodic Orbits for Continuous Flows., *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2002, vol. 83, p. 205
- Froeschlé C., Guzzo M., Lega E., Local And Global Diffusion Along Resonant Lines in Discrete Quasi-integrable Dynamical Systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2005, vol. 92, p. 243
- Froeschlé C., Lega E., Gonczi R., Fast Lyapunov indicators. Application to asteroidal motion., *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1997, vol. 67, p. 41
- Giordano C. M., Cincotta P. M., The Shannon entropy as a measure of diffusion in multi-dimensional dynamical systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, vol. 130, p. 35

- 
- Henon M., Heiles C., The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments, *AJ*, 1964, vol. 69, p. 73
- Laskar J., The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus*, 1990, vol. 88, p. 266
- Laskar J., Frequency analysis for multi-dimensional systems: global dynamics and diffusion, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993, vol. 67, p. 257
- Laskar J., , 2013 *Is the Solar System Stable?*. Springer Basel Basel pp 239–270
- Lecar M., Franklin F., Murison M., On Predicting Long-Term Orbital Instability: A Relation Between the Lyapunov Time and Sudden Orbital Transitions, *AJ*, 1992, vol. 104, p. 1230
- Lega E., Froeschlé C., on the relationship between fast lyapunov indicator and periodic orbits for symplectic mappings, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2001, vol. 81, p. 129
- Lega E., Froeschlé C., Guzzo M., , 2007 in Benest D., Froeschle C., Lega E., eds, , Vol. 729, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag. p. 29
- Lega E., Guzzo M., Froeschlé C., A numerical study of the hyperbolic manifolds in a priori unstable systems. A comparison with Melnikov approximations, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2010, vol. 107, p. 115
- Lépine J. R. D., Michtchenko T. A., Barros D. A., Vieiva R. S., The Dynamical Origin of the Local Arm and the Sun's Trapped Orbit, *The Astrophysical Journal*, 2017, vol. 843, p. 48
- Lichtenberg A. J., Leiberman M., *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer, 1992, 714 p.
- Martí J. G., Cincotta P. M., Beaugé C., Chaotic diffusion in the Gliese-876 planetary system, *MNRAS*, 2016, vol. 460, p. 1094
- Marzari F., Tricarico P., Scholl H., Stability of Jupiter Trojans investigated using frequency map analysis: the MATROS project, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2003, vol. 345, p. 1091

- Mestre M. F., Cincotta P. M., Giordano C. M., Analytical relation between two chaos indicators: FLI and MEGNO, *MNRAS*, 2011, vol. 414, p. L100
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Resonant Structure of the Outer Solar System in the Neighborhood of the Planets., *The Astronomical Journal*, 2001, vol. 122, p. 474
- Michtchenko T. A., Nesvorný D., Wavelet analysis of the asteroidal resonant motion, *Astronomy and Astrophysics*, 1996, vol. 313, p. 674
- Milani A., Nobili A. M., An example of stable chaos in the Solar System, *Nature*, 1992, vol. 357, p. 569
- Morbidelli A., *Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics*, 2002
- Morbidelli A., Froeschlé C., On the Relationship Between Lyapunov Times and Macroscopic Instability Times, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1996, vol. 63, p. 227
- Munõz-Gutiérrez M. A., Giulietti Winter S., Long-term evolution and stability of Saturnian small satellites: Aegaeon, Methone, Anthe and Pallene, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017, vol. 470, p. 3750
- Murray C., Dermott S. F., *Solar System Dynamics*. Cambridge, 2009, 592 p.
- Murray N., Holman M., Diffusive chaos in the outer asteroid belt., *AJ*, 1997, vol. 114, p. 1246
- Price-Whelan A. M., Johnston K. V., Valluri M., Pearson S., Küpper A. H. W., Hogg D. W., Chaotic dispersal of tidal debris, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, vol. 455, p. 1079
- Robutel P., Gabern F., The resonant structure of Jupiter's Trojan asteroids - I. Long-term stability and diffusion, *MNRAS*, 2006, vol. 372, p. 1463
- Roig F., Nesvorný D., Ferraz-Mello S., Asteroids in the 2 : 1 resonance with Jupiter: dynamics and size distribution, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2002, vol. 335, p. 417

- 
- Savitzky A., Golay M. J. E., Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures., *Analytical Chemistry*, 1964, vol. 36, p. 1627
- Sussman G. J., Wisdom J., Numerical Evidence That the Motion of Pluto Is Chaotic, *Science*, 1988, vol. 241, p. 433
- Todorović N., Wu D., Rosengren A. J., The arches of chaos in the Solar System, *Science Advances*, 2020, vol. 6, p. eabd1313
- Varvoglis H., Anastasiadis A., Transport in Hamiltonian Systems and its Relationship to the Lyapunov Time, *AJ*, 1996, vol. 111, p. 1718
- Vela-Arevalo L., Marsden J., Time-frequency analysis of the restricted three-body problem: Transport and resonance transitions, *Classical and Quantum Gravity*, 2004, vol. 21
- Vela-Arevalo L., Wiggins S., Time-Frequency Analysis of Classical Trajectories of Polyatomic Molecules, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, vol. 11, p. 1359
- Wachlin F. C., Ferraz-Mello S., Frequency map analysis of the orbital structure in elliptical galaxies, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1998, vol. 298, p. 22
- Wisdom J., Chaotic behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gap, *Icarus*, 1983, vol. 56, p. 51



# Apêndice



## Fundamentação Teórica

### *A.1 Problema de Três Corpos Restrito Circular e Planar (PCR3BP)*

Os desenvolvimentos dispostos neste apêndice se basearam majoritariamente em Murray e Dermott (2009).

Uma órbita Kepleriana no espaço, ou seja, a trajetória realizada por um dos dois corpos que interagem gravitacionalmente seguindo a Lei da Gravitação Universal de Newton, pode ser definida por seis elementos orbitais, obtidos a partir dos vetores de posição e da velocidade dos corpos:

- Semi-eixo Maior ( $a$ ), que define o tamanho da órbita,
- Excentricidade ( $e$ ), que define o formato da órbita,
- Inclinação ( $i$ ), que define a inclinação do plano orbital com o plano de referência,
- Argumento do Periastro ( $\omega$ ), que define a orientação da elipse no plano orbital e a posição do periastro,
- Anomalia Verdadeira ( $\nu$ ), que define a posição dos corpos na órbita com relação ao periastro da órbita,
- Longitude do Nodo ascendente ( $\Omega$ ), que define o ponto de intersecção entre o plano orbital e o plano de referência.

No problema de dois corpos, como por exemplo Júpiter orbitando ao redor do Sol, todos os elementos se mantêm constantes no tempo, com exceção de  $\nu$ , que circula entre  $[0, 2\pi]$  com período igual ao período orbital dos corpos.

No entanto, este quadro se altera com a introdução de um terceiro corpo no sistema. Nesta situação, o acréscimo de, por exemplo, Saturno, induz perturbações gravitacionais em Júpiter que alteram o comportamento de seus elementos orbitais. Neste caso, os elementos não mais se mantêm constantes, mas passam a variar no tempo. Este novo conjunto de elementos orbitais se chama osculador.

Neste contexto, é apresentado o Problema de Três Corpos Restrito e Circular, no qual dois corpos com massas  $m_1$  e  $m_2$  se orbitam mutuamente em uma órbita kepleriana circular. Um terceiro corpo com massa  $m_3 \ll m_1, m_2$  está em movimento no potencial gravitacional gerado pelas massas  $m_1$  e  $m_2$ . A massa  $m_3$  pode ser considerada desprezível e não perturba as órbitas dos corpos  $m_1$  e  $m_2$ , como no caso de um sistema Sol–Júpiter–Asteróide.

Desta forma, conhecendo-se a dinâmica de  $m_1$  e  $m_2$  como sendo regida pelas leis de Kepler, podemos estudar o movimento de  $m_3$  pelas equações obtidas a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton. Neste caso, as equações de movimento podem ser escritas no referencial do centro de massa comum de  $m_1$  e  $m_2$ , no qual cada massa terá coordenadas  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ,  $i = 1, 2$ , onde  $\xi$  e  $\eta$  definem o plano referencial coincidente com aquele da órbita kepleriana dos dois corpos massivos e  $\zeta$  é a direção perpendicular a este plano.

Podemos tornar o problema adimensional ao tomarmos as unidades de distância em função da separação entre  $m_1$  e  $m_2$  como sendo  $a = 1$ , as unidades de massa como sendo  $m_1 + m_2 = 1$  e a unidade de tempo  $\sqrt{G} = 1$ . Neste caso, o período orbital da binária ao redor do baricentro do sistema será  $T = 2\pi$ . Desta forma, temos as massas  $\mu_1 = m_1$  e  $\mu_2 = 1 - \mu_1$ , assim como movimento médio  $n = 2\pi/T = 1$ .

Deste modo, no sistema inercial  $(\xi, \eta, \zeta)$  definido acima, as equações de movimento da massa  $m_3$  serão

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}, \\ \ddot{\eta} &= \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}, \\ \ddot{\zeta} &= \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3},\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde  $r_i^2 = (\xi_i - \xi)^2 + (\eta_i - \eta)^2 + (\zeta_i - \zeta)^2$ ,  $i = 1, 2$ .

Deste modo, o movimento da terceira massa pode ser estudado ao considerarmos um sistema de referência girante no qual a direção de referência é definida como a linha que une  $m_1$  a  $m_2$ . Neste sistema, a separação entre as massas não se altera com o tempo, bem

como suas velocidades angulares serão iguais e constantes, assim como suas posições são fixas.

Consideremos este novo sistema de coordenadas girante com a mesma origem do sistema  $\xi - \eta$ , rotacionando com um movimento médio uniforme  $n$ . Neste caso, um eixo  $x$  é definido tal que  $(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0)$  e  $(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$ . Neste novo referencial teremos

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2, \\ r_2^2 &= (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde  $(x, y, z)$  são as coordenadas da massa  $m_3$  com relação ao referencial girante, ou *sinódico* e estão relacionadas ao sistema de coordenadas inercial pela matriz de rotação

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) & 0 \\ \sin(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde  $n$  é o movimento médio da binária (que, no caso adimensional, corresponde a  $n = 1$  conforme definido anteriormente).

Definindo-se a matriz de rotação como  $\mathcal{M}$  e diferenciando-se o sistema de equações duas vezes, obteremos os sistemas de equações

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Na mudança de coordenadas do referencial inercial para o referencial girante centrado no baricentro do sistema, surgem termos  $(n\dot{x}, n\dot{y})$  e  $(n^2x, n^2y)$  referentes às forças de Coriolis e força centrífuga, respectivamente, ambos com unidades de aceleração.

Substituindo-se na equação (A.1) as coordenadas do sistema inercial  $(\xi, \eta, \zeta)$  e suas derivadas pelas novas relações obtidas em (A.3) e (A.4) e após uma manipulação algébrica, serão obtidas as novas equações de movimento no sistema girante:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= - \left[ \mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x + \mu_1}{r_2^3} \right], \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y, \\ \ddot{z} &= - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

As acelerações podem ser reescritas como gradiente da função escalar  $\Omega$

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \\ \Omega &= \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r^1} + \frac{\mu_2}{r^2}, \end{aligned} \tag{A.6}$$

onde  $\Omega$  é considerado um “pseudo-potencial”.

### A.1.1 Integral de Jacobi

Multiplicando-se as equações (A.6) por  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$  respectivamente e somando-se os termos resultantes, será obtida a relação

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\dot{z} = \frac{d\Omega}{dt} \tag{A.7}$$

que, quando integrada no tempo, resulta na relação

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega - C_J, \tag{A.8}$$

onde  $C_J$  corresponde a uma constante de integração. Uma vez que  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$ , teremos então que  $v^2 = 2\Omega - C_J$  ou, em termos expandidos,

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2. \tag{A.9}$$

Esta relação demonstra que a quantidade  $2\Omega - v^2 = C_J$  é uma constante de movimento chamada *Constante de Jacobi* ou *Integral de Jacobi* e não é sinônimo da conservação da energia.

No problema de dois corpos, devido à existência de integrais de momento angular e de energia, o movimento de uma partícula pode ser completamente resolvido. Já no Problema de Três Corpos Circular e Restrito, a medição da posição e da velocidade iniciais da partícula determinam um valor para a Constante de Jacobi, mas por ela ser a única integral do movimento, soluções analíticas para o movimento orbital não podem ser obtidas, somente numericamente.

No entanto, a partir da integral de Jacobi é possível determinar em quais regiões do espaço o movimento da partícula é permitido ou “proibido”. Os limites das regiões podem

ser definidos ao se considerar as localidades no espaço nas quais a velocidade da partícula é nula, ou seja:

$$n^2(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) = 2\Omega = C_J. \quad (\text{A.10})$$

A Equação (A.10) define um conjunto de superfícies para determinados valores de  $C_J$  conhecidas como “Curvas de Velocidade Zero” e são fundamentais para se definir restrições ao movimento da partícula uma vez que, da relação  $2\Omega - v^2 = C_J$ , seu movimento só pode ocorrer para valores de  $2\Omega \geq C_J$ , uma vez que em caso contrário, a velocidade  $v$  seria complexa.

A importância das Superfícies de Velocidade Zero se dá devido ao fato de que, mesmo o problema de três corpos sendo não-integrável — ou seja, não é possível obter soluções para o movimento de uma partícula para condições iniciais arbitrárias —, a existência da Integral de Jacobi permite que as regiões do espaço nas quais a partícula poderia estar estejam bem definidas com relação às regiões “proibidas”.

Mais ainda, a análise da Integral de Jacobi evidencia a existência das configurações de equilíbrio, que são fundamentais em uma primeira análise sobre regiões de estabilidade no sistema, permitindo a rápida verificação de regiões de equilíbrio estável e instável.

Abaixo podem ser visualizadas quatro curvas de nível para diferentes valores do parâmetro de massa, nas coordenadas  $(x, y)$  e também em elementos orbitais,  $(a, e)$ .

As curvas coloridas correspondem àquelas com valor de energia igual ao valor da Constante de Jacobi para cada um dos pontos de equilíbrio de Lagrange —  $L_1$  (curva amarela),  $L_2$  (curva verde),  $L_3$  (curva azul) e  $L_{4,5}$  (rosa). A curva vermelha apresenta um valor arbitrário escolhido. Mais detalhes sobre os Pontos de Lagrange não fazem parte do conteúdo desta dissertação, no entanto informações podem ser obtidas em Murray e Dermott (2009).

Superfícies de Velocidade-Zero e curva referente a  $C_J = C_{L_1, L_2, L_3, L_{4,5}}$

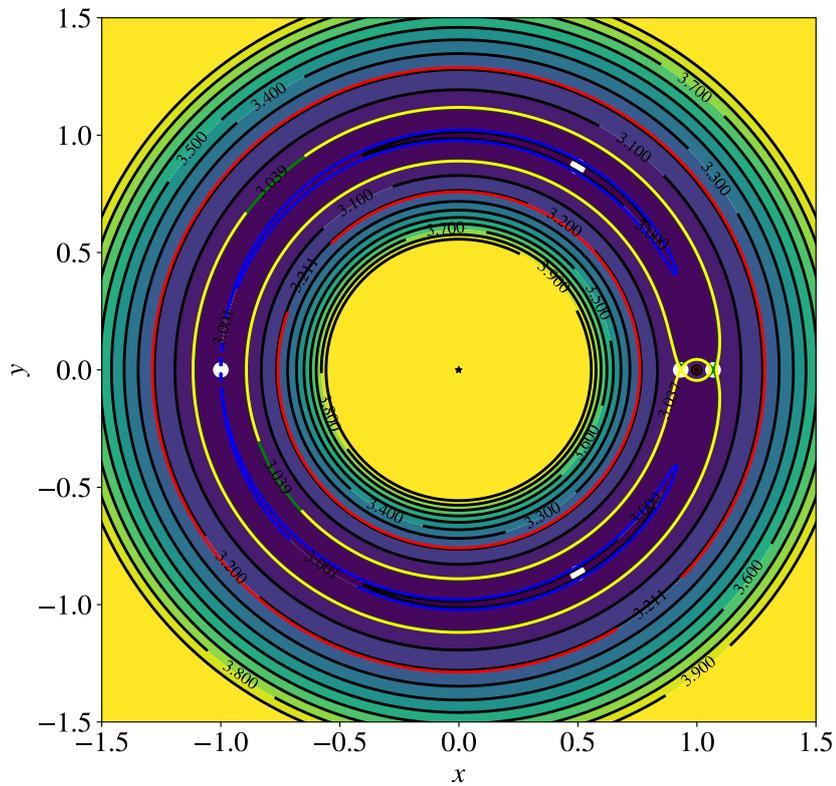


Figura A.1: Superfícies de Velocidade Zero calculadas para as diferentes regiões do PCR3BP no plano  $(x, y)$ . Curvas coloridas correspondem aos valores da constante de Jacobi para os pontos de Lagrange  $L_1$  (curva amarela),  $L_2$  (curva verde),  $L_3$  (curva azul) e  $L_{4,5}$  (rosa). A curva vermelha apresenta um valor arbitrário escolhido

Superfícies de Velocidade-Zero e curva referente a  $C_J = C_{L_1, L_2, L_3, L_4, 5}$

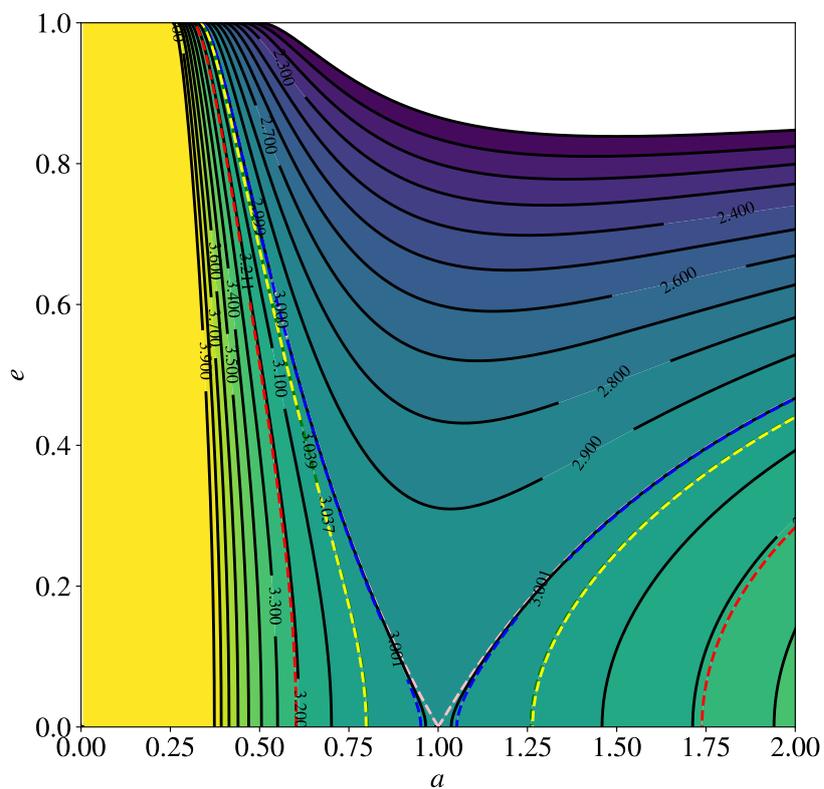


Figura A.2: Mesmo que a Figura A.1, mas no plano de elementos orbitais  $(a, e)$ , construindo a partir do parâmetro de Tisserand.



## Espectros Dinâmicos de Outras Variáveis

Neste apêndice constam os espectros dinâmicos construídos para as mesmas condições iniciais daqueles vistos nas Figuras 3.3 e 3.4. No entanto, a análise espectral é aplicada em outras séries temporais além de  $x(t)$  e  $X(t)$ , sendo elas  $\dot{x}(t)$ ,  $y(t)$ ,  $a(t)$ ,  $e(t)$  e  $\sin(\nu(t))$ .

O objetivo é verificar o comportamento do espectro dinâmico com relação à sua aplicação em outras variáveis, bem como compreender o efeito da escolha das variáveis na caracterização dinâmica do sistema.

Apesar da estrutura do espectro dinâmico indicar caminhos para o surgimento dos fenômenos caóticos, como a quebra da harmonicidade das soluções, o estudo frequencial de diversas variáveis permite a identificação de circunstâncias nas quais o número excessivo de picos detectados se dá por esta quebra da harmonicidade ou por um excesso de combinações lineares entre as coordenadas utilizadas para construção de uma nova variável.

### B.1 Espectros Dinâmicos para $C_J = 3.23$

Na Figura B.1, é apresentado um conjunto de espectros dinâmicos construídos analisando-se variáveis cartesianas (painéis à esquerda) e elementos orbitais (painéis à direita).

O painel superior esquerdo apresenta o mesmo espectro dinâmico exposto na Figura 3.3, com a coordenada  $x(t)$  nos referenciais girante e inercial (curvas preta e vermelha).

Os painéis central e inferior esquerdos apresentam os espectros dinâmicos calculados para as coordenadas  $\dot{x}(t)$  e  $y(t)$ , ambas com o mesmo perfil do calculado para  $x(t)$ : todas os espectros de coordenadas no referencial girante apresentam três frequências visíveis, sendo elas a frequência orbital da binária  $f = 1$ , suas combinações lineares com os harmônicos da frequência orbital da partícula  $n$  e as combinações lineares de  $n$  com a frequência

de batimento presente, enquanto o espectro dinâmico das variáveis no referencial inercial apresentam somente os harmônicos da frequência orbital  $n$  da partícula e suas combinações lineares com a frequência de batimento.

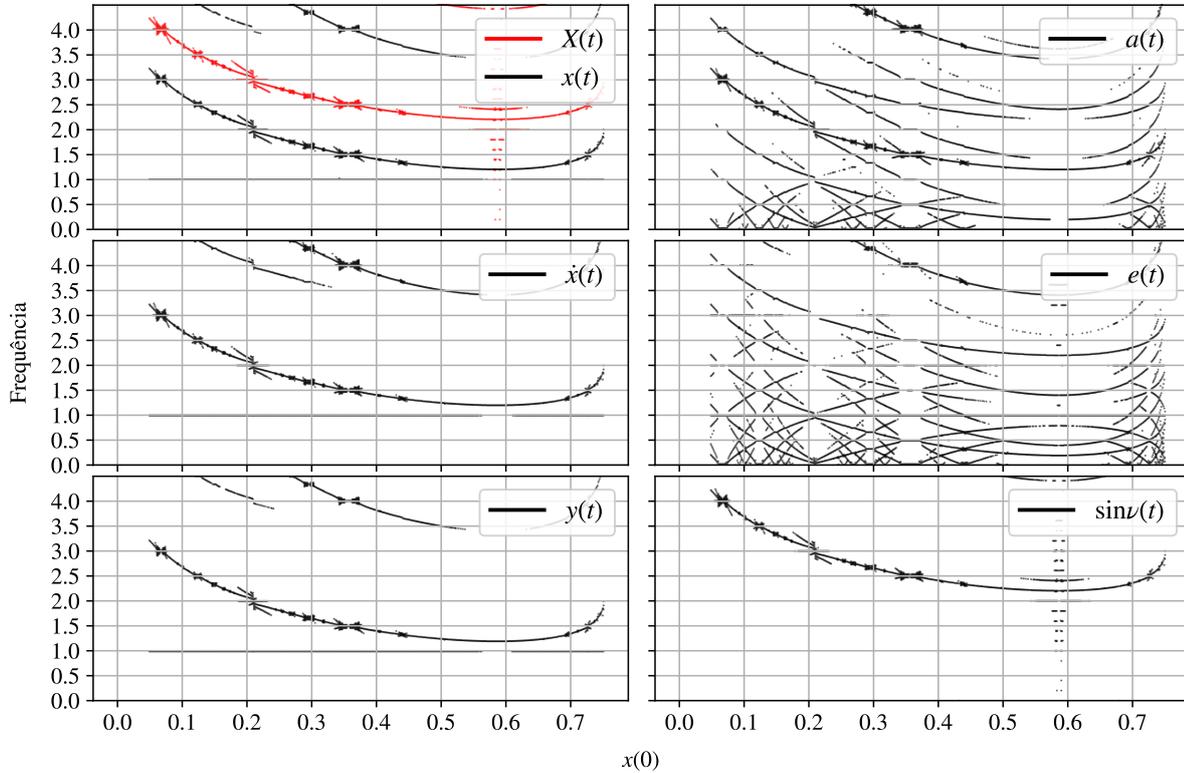


Figura B.1: Espectro dinâmico obtido pela análise espectral de sete variáveis distintas, do canto superior esquerdo, em sentido horário:  $x(t)$  e  $X(t)$  (curva preta e curva vermelha, respectivamente),  $a(t)$ ,  $e(t)$ ,  $\sin(\nu(t))$ ,  $y(t)$  e  $\dot{x}(t)$

Na análise espectral dos elementos orbitais, o espectro dinâmico de cada um dos elementos apresenta características distintas entre si.

O espectro dinâmico obtido pela análise da evolução temporal do semi-eixo maior  $a(t)$  (painel superior direito) apresenta uma grande complexidade de estruturas, como um grande número de harmônicos da frequência orbital  $n$  da partícula, além das combinações lineares com a frequência da partícula  $f = 1$ . Além disso, as frequências de batimento surgem na parte inferior do painel, representadas pelas baixas frequências.

O espectro obtido pela análise da evolução temporal da excentricidade  $e(t)$  (painel central direito) apresenta perfil semelhante com o painel acima, entretanto há um maior nível de detalhamento com relação às frequências de batimento e seus harmônicos.

Por fim, o espectro dinâmico resultante da aplicação da análise espectral na variável

$\sin(\nu(t))$ , visto no painel inferior direito. Conforme esperado, diferentemente da análise dos dois outros elementos orbitais, a frequência dominante é a frequência orbital  $n$  da partícula, conforme evidenciado na análise espectral da coordenada no referencial inercial  $X(t)$ . A análise desta coordenada apresenta poucos componentes relativos a harmônicos da frequência orbital ou suas combinações lineares com a frequência de batimento.

## B.2 Espectros Dinâmicos para $C_J = 3.03$

Os resultados e discussões relativos à construção dos Espectros Dinâmicos para outras variáveis temporais no caso de uma Constante de Jacobi  $C_J$  para qual surgem fenômenos caóticos (Figura B.2) são semelhantes aos descritos na seção anterior, com exceção do Espectro Dinâmico obtido pela análise da evolução temporal da excentricidade  $e(t)$  (painel central direito), no qual há predominância das frequências de batimento do sistema e seus harmônicos.

As regiões caóticas são coincidentes para todas as variáveis, no entanto a utilização dos elementos orbitais tende a superestimar o número de picos calculado

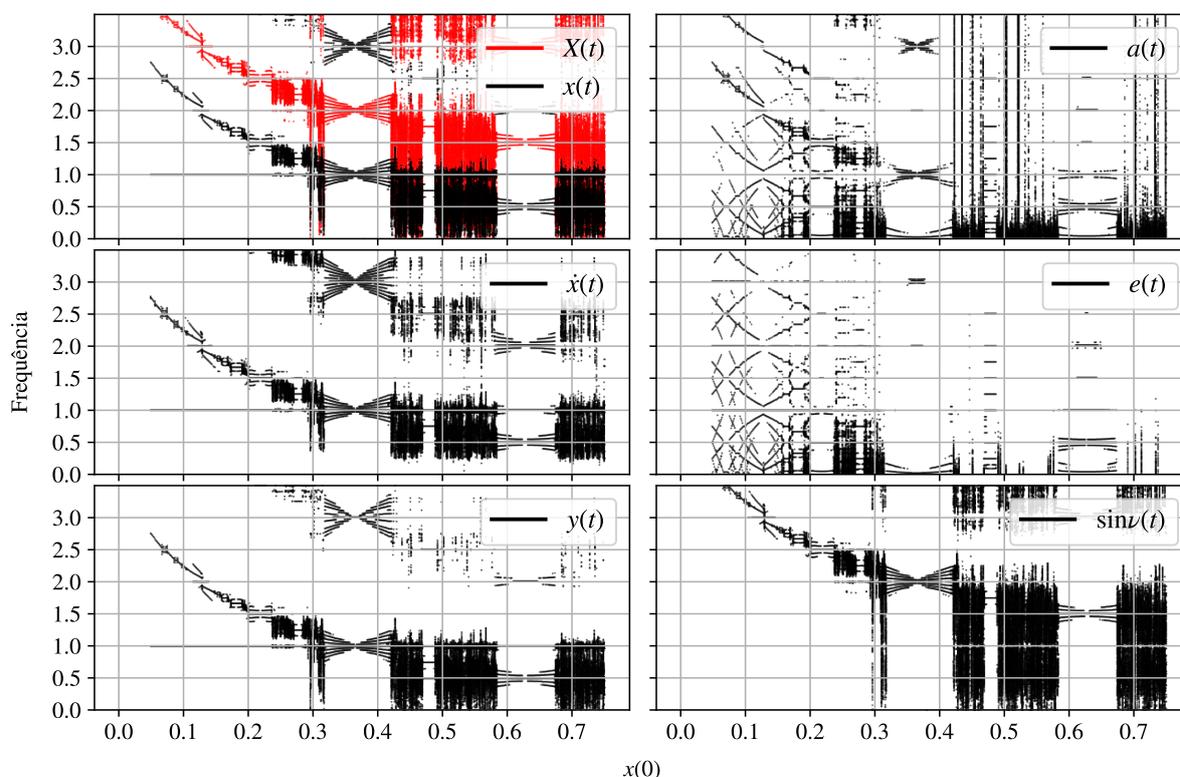


Figura B.2: Mesmo que a Figura B.1, mas para a Constante de Jacobi  $C_J = 3.03$



### Detecção de Difusão Caótica para outros $C_J$

Neste apêndice pode ser visualizada a mesma caracterização do espaço de fase do PCR3BP realizada no Capítulo 4, nas seções 4.5 e 4.6, para o valor da Constante de Jacobi  $C_J = 2.9$ , correspondente a um estado com predominância de fenômenos caóticos

#### *C.1 Estudo da Difusão para $C_J = 2.9$*

O valor da constante foi escolhido de acordo com o evidenciado no painel inferior direito das Figuras 3.1 e 3.2, pelas quais evidencia-se um aumento das regiões caóticas na mesma medida em que diminuem a se distorcem as regiões de regime de movimento regular.

Além disso, a quebra das curvas de circulação na proximidade da massa  $m_1$  indica que regiões onde pode haver caos confinado vão sendo destruídas em função do avanço das regiões fortemente caóticas.

##### *C.1.1 Coeficientes de Difusão*

Os estudos dos coeficientes de difusão caótica realizados para  $C_J = 3.03$  no Capítulo 4 serão replicados aqui de forma resumida, sem repetir a aplicação de todos os coeficientes de difusão definidos. Assim, o estudo condensado é apresentado na Figura C.1 contendo elementos das Figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10.

O painel no canto superior esquerdo apresenta as seções de Poincaré obtidas pela integração das condições iniciais ao longo da linha vermelha tracejada. Evidencia-se que boa parte do espaço de fase é tomado por pontos aleatoriamente espalhados, sem regiões de alta densidade, indicando que, para esta Constante de Jacobi, predomina o Caos “livre”, em contraponto ao Caos confinado presente em outras constantes.

No painel inferior esquerdo, verifica-se o comportamento dos indicadores FLI e SN, apresentando a mesma dinâmica que no estudo para  $C_J = 3.03$ . Entretanto, uma vez que em  $C_J = 2.9$  o caos se pronuncia de forma mais intensa, há regiões do espaço de fase onde a caracterização dinâmica tradicional se torna inconsistente e errática, fazendo-se útil a utilização dos métodos para estudo da difusão caótica, vistos nos três painéis à direita.

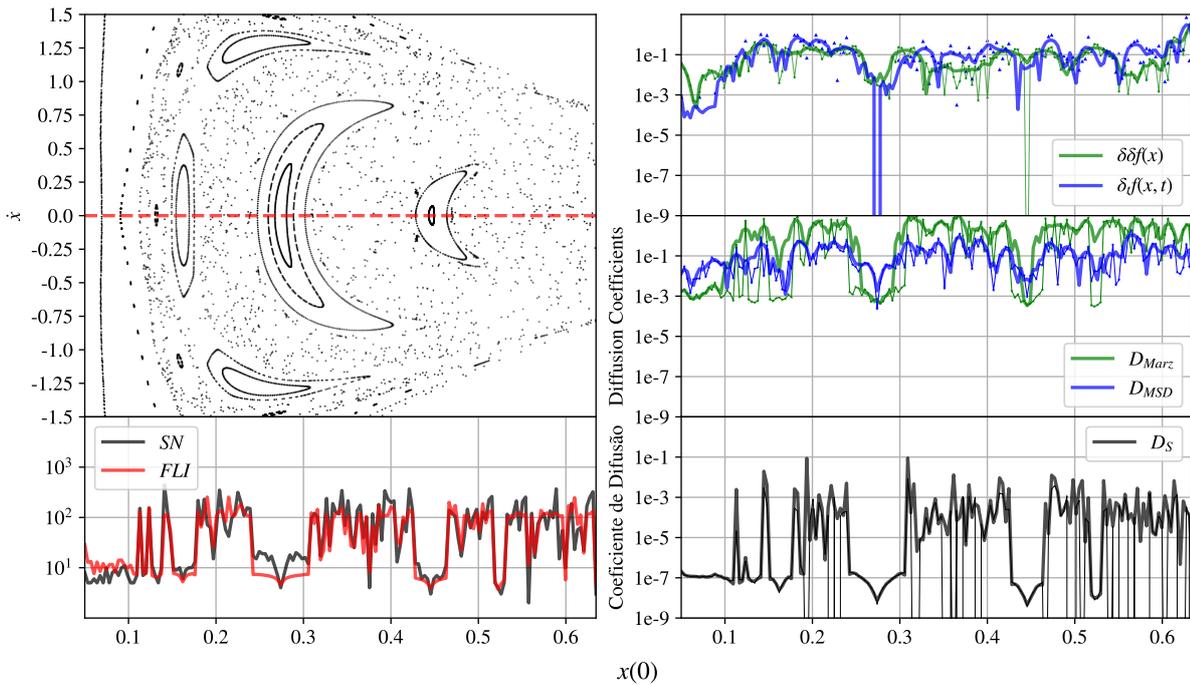


Figura C.1: Canto superior esquerdo: seções de Poincaré, Canto superior direito: Coeficientes de difusão obtidos a partir da Equação de Difusão de Laskar, painel central à direita: Coeficientes de difusão obtidos por MSD, canto inferior direito: Coeficientes de difusão obtidos por SE, Canto inferior esquerdo: comportamento de FLI e SN

O painel superior direito apresenta a validação da relação entre a difusão no espaço e a difusão no tempo, na Equação de Difusão (4.1), calculado utilizando-se somente a análise da evolução temporal das frequências independentes. Os resultados obtidos utilizando-se os demais métodos espectrais pode ser visto na Figura C.2 em termos dos tempos de instabilidade. Verifica-se a proporcionalidade entre as variações no espaço e no tempo, definindo claramente uma região de difusão lenta próximo à massa  $m_1$ .

No painel central direito, a utilização dos métodos baseados no Desvio Quadrático Médio apresentam comportamento semelhante ao do painel acima. No entanto, a utilização da variância, conforme definido por Marzari et al. (2003), apresenta uma maior sensibilidade às regiões de difusão lenta, enquanto o método baseado em Froeschlé et al. (2005)

apresenta um maior espalhamento.

Por fim, no painel inferior direito, conforme visto na Figura 4.10, fica evidente a sensibilidade da ferramenta aos regimes de difusão lenta e na caracterização das regiões regulares. No entanto, o indicador se comporta de maneira errática em regiões fortemente caóticas.

### C.1.2 Tempos de Instabilidade

Dando-se continuidade ao estudo do comportamento dos coeficientes de difusão caótica ao longo de uma seção do espaço de fase, realizamos a estimativa dos tempos de instabilidade a partir destes coeficientes.

A Figura C.2 apresenta os tempos estimados do mesmo modo que na Figura 4.11, mas para um coeficiente com maior quantidade de fenômenos caóticos.

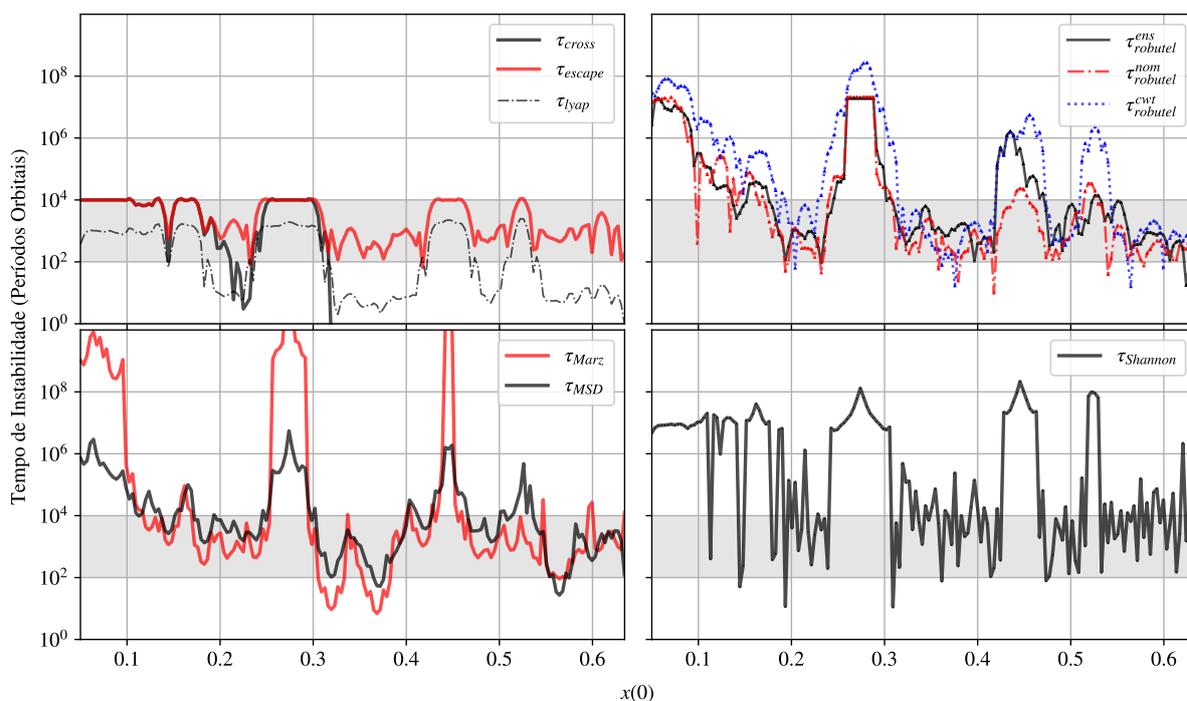


Figura C.2: Tempos de instabilidade obtidos por diferentes métodos. Painel superior esquerdo: integração direta (curva vermelha representa tempos de escape/colisão, curva preta sólida representa tempos de intersecção entre órbitas e curva preta tracejada corresponde aos tempos de Lyapunov. Painel superior direito: Tempos de instabilidade obtidos pela definição de Price-Whelan et al. (2015) de  $\tau_{robotel}$  utilizando-se um ensemble de partículas (curva preta sólida), uma partícula no centro do ensemble (curva pontilhada vermelha) e utilizando-se os resultados obtidos a partir da WAM. Painel inferior esquerdo: tempos de instabilidade obtidos a partir do coeficiente de difusão de Marzari (curva em vermelho,  $\tau_{var}$ ) e do desvio quadrático médio (curva preta,  $\tau_{MSD}$ ). Painel inferior direito: tempos de instabilidade obtidos pela utilização da entropia de Shannon. A região em cinza corresponde aos tempos de instabilidade típicos obtidos pela integração direta.

Pela análise dos tempos de instabilidade e de Lyapunov obtidos por meio das integrações diretas, ficam evidentes as regiões de movimento regular e caótico no espaço de fase, o sistema sendo essencialmente instável para todas as regiões fora das ressonâncias, excetuando-se a estreita região entre  $0.05 \leq x(0) \leq 0.2$  onde ainda resta caos confinado.

No painel superior direito constam os resultados obtidos pela análise da parte temporal da equação de difusão de Laskar para os três conjuntos de dados, assim como realizado na Figura 4.11: a utilização do ensemble de partículas na análise espectral permite a reprodução com certa fidelidade das curvas de tempos de instabilidade obtidos pela integração direta. O uso dos dados relativos à Análise de Wavelets também permite a reconstrução da curva.

A utilização dos métodos baseados no Desvio Quadrático Médio, no painel inferior esquerdo, apresentam semelhança com os resultados empíricos. Entretanto, para valores de  $x(0)$  mais próximos da massa secundária  $m_2$ , sujeitas a uma maior perturbação, o comportamento passa a divergir do verificado pelas integrações diretas.

Por fim, no painel inferior direito, é aplicado o método da Entropia de Shannon, que, assim como na Figura 4.11, é capaz de caracterizar fielmente regiões regulares ou de difusão lenta no espaço de fase, mas com um comportamento errático em regiões de regimes de movimento predominantemente caótico.

Entretanto, diferentemente do caso com  $C_J = 3.03$ , percebe-se uma maior semelhança com os resultados empíricos no atual estudo do que no apresentado na Figura 4.11, indicando que a ferramenta baseada na variação das ações pode se mostrar valorosa no estudo de sistemas que apresentem uma diversidade de estruturas no espaço de fase.