Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Irapuan Lira Feitosa Filho

Análise das Distribuições de Exoplanetas no Espaço de Parâmetros Físicos e Orbitais

São Paulo

2019

Irapuan Lira Feitosa Filho

Análise das Distribuições de Exoplanetas no Espaço de Parâmetros Físicos e Orbitais

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia
Orientadora: Prof.ª Dr.ª Tatiana Alexandrovna Michtchenko.

Versão corrigida. Original encontra-se disponível na Unidade.

São Paulo

2019

aos Meus Pais.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à minha família: minha mãe Maria Aparecida de Sousa Feitosa e meu pai *in memorian* Irapuan Lira Feitosa, por proporcionarem a mim, fruto de seu trabalho árduo, condições ideiais para meu desenvolvimento físico e intelectual; às minhas irmãs Rita Moreno de Carvalho, Arianne Maria de Sousa Borges e Vilmar da Conceição Carvalho, por todo apoio incondicional, quer seja nos momentos mais brandos quer seja momentos mais difíceis; às minhas sobrinhas Dianna Lanely Moreno Carvalho de Sousa, Maria Elissa de Sousa Borges e Maria Esther de Sousa Borges por toda a felicidade e apoio dedicados a mim, quer querendo quer sem querer; ao meu sobrinho Iago Felipe Carvalho, por todo carinho e empenho dedicados a mim e a todos da família, quando da minha ausência durante os períodos em São Paulo;

Ao meu amor, minha namorada Juliana Marques da Silva, por se fazer presente em cada instante, me apoiando durante esse longo período de ausência. Obrigado, minha vida, por ter estado comigo quando mais precisei;

À minha prima e muito amiga Fernanda Seligmann Feitosa Ramos, ao seu esposo e muito meu amigo Henrique Luis Ramos, por toda a paciência, incentivo e muito amor;

À Maria das Dores ("Bá") por todo carinho, amizade e boas conversas;

Aos meus amigos Jorge Soares Menor Filho e Jonathan Gonçalves da Silva pela amizade, apoio, companheirismo e convívio desde 2010;

À minha orientadora, Prof.Drª Tatiana Alexandrovna Michtchenko, por toda paciência dispensada e conhecimento repassado durante todo o mestrado;

Aos Professores Sylvio Ferraz Mello e Ramachrisna Teixeira por serem exemplo de professores e cientistas, espero honrar o nome dos senhores;

Ao Diretor Geral do Centro de Ensino Luzenir Matta Roma, Antônio Gonçalves Reis, por todo apoio e compreensão neste período de viagens constantes;

Ao Diretor Geral do IFMA-Campus Codó, Prof.Dr Wady Castro, por todo apoio dispensado;

Aos inúmeros amigos que fiz em São Paulo: Raphael, Felipe, Gustavo, Alda, Jhon, Paulo, Andrés, Hugo, Elielson, Gabriel, Eduardo, Mirian, e muitos outros que este pequeno espaço não me deixa citar;

A todos funcionários e todas funcionárias do Departamento de Astronomia, por propiciarem condições ideais para a conclusão desta etapa, desde o momento de minha matrícula até o depósito desta dissertação;

Aos membros de minha banca de Defesa, que muito engrandeceram este trabalho: Prof. Dr. Bruno Lustosa, Prof. Dr. Amâncio Friaça e Dr. Hugo Folonier.

E por fim, a todas as pessoas que mesmo desapercebidamente, passaram pela minha vida e que fizeram despertar em mim esse amor grandioso por esta Universidade e por esta cidade de São Paulo!

“*A Astronomia, pela dignidade de seu objeto e perfeição de suas teorias, é o mais belo monumento do espírito humano, o título mais nobre de sua inteligência.*”

Pierre Simon Laplace

“*O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.*”

Sir Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho, nós analisamos as principais características da distribuições, em espaços paramétricos, dos exoplanetas conhecidos com o objetivo de se obter uma visão geral de suas propriedades dinâmicas. Para isso, utilizamos as informações relativas aos elementos orbitais e propriedades físicas de uma amostra de 1457 exoplanetas, membros de 574 sistemas multiplanetários, colhidas em catálogos nos sites exoplanetarchive.ipac.caltech.edu e exoplanets.org. Nós plotamos as distribuições de pares consecutivos nos espaços dados pelas massas planetárias, períodos orbitais e excentricidades. Nós classificamos os exo-sistemas de acordo com seu comportamento dinâmico em ressonantes, quase-ressonantes, seculares e hierárquicos. Nos baseamos em testes rápidos para analisar a estabilidade de longo período destes sistemas.

Abstract

In this work, we analyze the principal features of the distribution of the known exoplanets in parametric spaces, in order to construct a picture of their current dynamical properties. For this, we use the information on the orbital elements and physical properties for the sample of 1457 exoplanets, members of 574 multi-planet systems, from the catalogue in the sites http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu and http://exoplanets.org . We plot the distributions of the consecutive pairs in the space given by planetary masses, orbital periods, mean distances to the central stars and eccentricities. We classify the exosystems, according to their dynamical behavior, in resonant, near-resonant, secular and hierarchical classes. We analyse the dynamical stability of these systems based on fast tests.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo dos exoplanetas é sem dúvida um campo em franca expansão na Astronomia. Desde 1988 quando γ *Cep b*, um planeta gigante com quase o dobro da massa de Júpiter, orbitando uma estrela 125 vezes maior que nosso Sol e situado a uma distância de 45 anos-luz, foi descoberto (vindo a ser confirmado como exoplaneta apenas no ano de 2002), as dúvidas sobre se estamos sozinhos no universo começaram a ser parcialmente respondidas. Um pouco de tempo se passou até o primeiro sistema planetário, orbitando o pulsar $PSRB1257+12$, ser descoberto, em 1991, por meio da técnica de medida dos tempos dos pulsos. Deste ponto em diante, diversos outros sistemas foram sendo descobertos, utilizando-se as mais diversas técnicas.

Em 2006, a Agência Espacial Nacional Francesa (CNRS - na sigla em francês), liderando um grupo de outras agências espaciais, deu início à missão CoRoT (do inglês Convection, Rotation and planetary Transits), cujos objetivos principais eram monitorar o brilho de mais de 120.000 estrelas com o intuito de detectar a presença de exoplanetas, via técnica de trânsito e estudar os interiores destas estrelas através da asterossismologia.

Em 2009, o número de detecções de possíveis exoplanetas sofreu um aumento considerável, graças ao lançamento do Telescópio Espacial Kepler (NASA), reponsável pela descoberta (confirmada) de pelo menos 2.619[1,2] exoplanetas.

O Kepler utiliza a técnica de trânsito planetário, através do qual se infere a presença de um exoplaneta orbitando uma estrela por meio da diminuição na intensidade de luz medida pelo aparelho, devido à passagem de um corpo em "em frente" da estrela.

[1] Número devido tanto à missão *Kepler*, quanto à *K2*, um novo conjunto de campanhas propostas devido ao mal funcionamento de duas *reaction wheels*, equipamentos responsáveis pelo apontamento do telescópio.

[2] https://www.nasa.gov/kepler/discoveries

À medida que mais exoplanetas foram sendo descobertos e caracterizados, percebeu-se, que nosso sistema solar não é nem um pouco representativo. A bem da verdade, com sua divisão bem perceptível com planetas menos massivos e rochosos próximos à estrela, enquanto os mais massivos e gasosos estão mais afastados, nosso sistema solar até o presente, é considerado uma exceção.

Corpos com massas semelhantes às de Júpiter, Netuno ou Urano, em órbitas comparáveis à uma fração da órbita de Mércurio em torno do Sol, fizeram os astrônomos repensar diversos pontos das teorias planetárias mais consolidadas.

Com a ajuda indispensável de poderosos computadores, hoje conseguimos apresentar explicações consistentes para tais observações inesperadas, outrora inesperadas. Consegue-se estudar mais a fundo fenômenos como migração planetária, ressonâncias, possíveis correlações entre a metalicidade de estrelas e a existência de exoplanetas que as orbitam, dentre outros, na busca por explicações de o por quê da existência de tal diversidade de arquiteturas dos sistemas planetários.

O presente trabalho visa apresentar uma análise geral de diversas distribuições dos exoplanetas constantes nas bases de dados contidas em dois sites : http://exoplanets.org, e https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu, com o intuito de construir um painel de suas propriedades físicas e dinâmicas, classificando tais sistemas em hierárquicos, seculares, ressonantes e quase-ressonantes, conforme seu comportamento dinâmico.

Esta dissertação está assim dividida: no Capítulo 2 faremos uma pequena introdução com relação às principais técnicas de detecção de exoplanetas. No Capítulo 3 abordaremos tópicos necessários à fundamentação teórica deste trabalho, definindo quais são os elementos orbitais, a partir do problema de dois corpos, passando em seguida a uma análise introdutória do problema de três corpos, tanto no formalismo newtoniano, quanto no formalismo Hamiltoniano. No Capítulo 3 abordaremos a classificação dinâmica dos sistemas aplicada neste trabalho, em Hierárquicos, Seculares e Ressonantes. No Capítulo 4, falaremos sobre a base de dados que serviu como fonte de informações para este trabalho. No Capítulo 5 apresentamos as distribuições propriamente ditas dos elementos físicos e orbitais dos exoplanetas selecionados a partir dos bancos de dados e implementadas pelo programa desenvolvido durante a pesquisa. No Capítulo 6 serão apresentados os resultados de testes rápidos de establidade que foram aplicados aos planetas da amostra e, por fim, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e perspectivas do trabalho.

Capítulo 2

Breve descrição dos métodos de detecção de exoplanetas

A detecção de corpos com características planetárias (massivo o suficiente para adquirir formato aproximadamente esférico), orbitando suas estrelas hospedeiras, demanda acima de tudo, técnicas extremamente refinadas. Até o presente momento, o procedimento em tais detecções continua basicamente o mesmo: apontar um aparelho para o maior número de estrelas possível e esperar que comportamentos característicos dos sinais recebidos destes astros, indiquem, pelo menos de maneira preliminar, a presença de um corpo planetário.

Neste capítulo faremos algumas considerações introdutórias sobre as principais técnicas de detecção de exoplanetas, com o intuito de iniciarmos o entendimento do por quê da atual distribuição de exoplanetas ter características tão singulares.

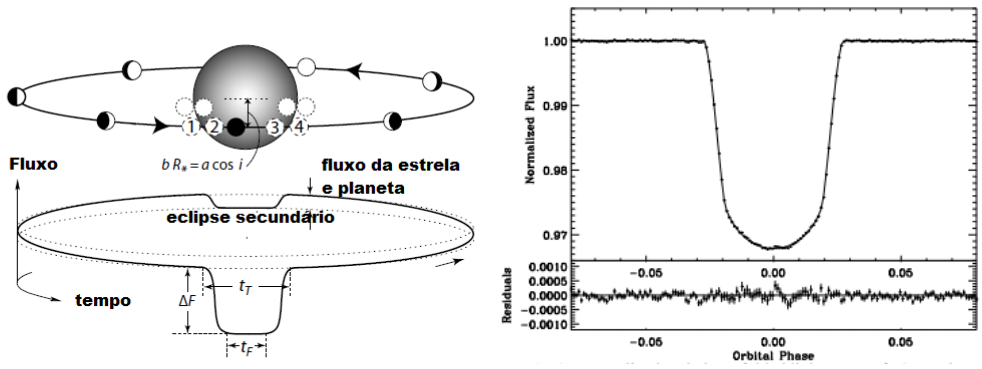
2.1 *Trânsito Planetário*

Struve (1952), propôs que a medida do fluxo de radiação de uma estrela poderia ser utilizada como um indicativo da presença de um exoplaneta. A técnica de trânsito depende essencialmente da medida da atenuação da luz da estrela causada pela passagem de um planeta "na sua frente" conforme visto da Terra. Para exoplanetas com 1 R_J (Raios de Júpiter), transitando uma estrela com 1 $R_\odot$ (Raios Solares) esta atenuação é de aproximadamente 1.1×10^{-2}, ou em torno de 0.01 mag, enquanto que para planetas com raio de 1 $R_\oplus$ (Raios Terrestres) a atenuação é da ordem de 8.4×10^{-5}. O primeiro planeta descoberto através do trânsito planetário foi HD 209458b observado independentemente por Henry et al. (1999) e Charbonneau (2000).

Na Fig. (2.1 a) temos um esquema ilustrativo de um evento de trânsito. Como podemos perceber, o nível do fluxo bloqueado pelo planeta deve ser uma função do raio planetário, bem como de um parâmetro b (parâmetro de impacto), definido geometricamente como a distância projetada entre os centros da estrela e do planeta e assim definido:

$$b = \frac{a}{R_\star} \cos i, \tag{2.1}$$

onde a é o semieixo maior do planeta, $R_\star$ é o raio da estrela central e i é a inclinação da órbita (Perryman, 2011).



(a) (b)

Figura 2.1: Em (a) temos um esquema representando o que acontece com o fluxo de luz da estrela durante o trânsito. t_T e t_F são dois tempos característicos de cada trânsito. O primeiro é o tempo decorrido entre o primeiro e o quarto encontros da "superfície" da estrela, com a "superfície" do planeta. Já o segundo é o tempo decorrido entre o segundo e o terceiro encontros. (b) Curva de luz da estrela CoRoT-2 (Alonso *et al*,2008)

É natural inferir que a variação no brilho medido de uma estrela, devido à passagem de um planeta, seja dependente do tamanho destes corpos. Pode ser mostrado que

$$\Delta F = \left(\frac{R_p}{R_\star}\right)^2, \tag{2.2}$$

onde R_p é o raio do planeta e $R_\star$ é o raio da estrela central.

Duas foram as missões espaciais projetadas e executadas com a finalidade de detectar exoplanetas via trânsito: CoRoT e Kepler.

A missão CoRoT (Deeg, 2013) foi uma colaboração internacional entre a CNES, a Agência Espacial Europeia (ESA), Brasil, Áustria, Bélgica, Espanha e Alemanha. Lançado em 27 de dezembro de 2006, o telescópio espacial CoRoT esteve em operação até dezembro de 2013. Tinha como objetivo principal detectar exoplanetas orbitando estrelas dos tipos F,G,K e M tinha como equipamento principal um telescópio espacial (Fig.2.2) com abertura de 27 cm, composto por quatro detectores: dois dedicados à medidas de sismologia estelar e dois dedicados à detecção de exoplanetas, prioritariamente ao redor de estrelas dos tipos F,G,K, podendo observar, ao mesmo tempo, 12.000 objetos.

Figura 2.2: Reprodução artística do Telescópio Espacial CoRoT. CNES,2006. Disponível em: https://phototheque.cnes.fr/cnes/searchkw.do?q=COROT%20(Astronomie). Acesso em: 03/03/2019.

O telescópio CoRoT foi responsável pela descoberta 32 exoplanetas, entre eles o primeiro planeta extrassolar rochoso: CoRoT 7b.

A missão Kepler Borucki et al. (2009) da Nasa foi lançada no ano de 2009. Tinha como objetivo primordial a descoberta de planetas rochosos nas zonas habitáveis (ou próximo destas) das estrelas hospedeiras. O principal equipamento da missão era um telescópio com abertura de 0.95 m, apontado permanentemente para um grupo de 150.000 estrelas da sequência principal na região da constelação de Cisne.

Telescópios baseados em Terra também utilizam a técnica de trânsito planetário na busca de exoplanetas, entre eles podemos citar: HAT/HATNet (Telescópio Automático Húngaro, na sigla em inglês), é uma rede de seis telescópios automáticos e que são responsáveis pela descoberta de ao menos 119 exoplanetas (informação do banco de dados Nasa Exoplanet Archive); OGLE (Experimento de Lentes Óticas Gravitacionais) monitora 5 milhões de estrelas com um telescópio de 1.3 m de abertura, sendo responsável pela descoberta de ao menos 51 exoplanetas; TrEs (Trans-Atlantic Exoplanet Survey Network), é uma rede de três telescópios de pequena abertura (0.1 m), que buscam exoplanetas ao redor de estrelas brilhantes, sendo responsável pela descoberta de cinco exoplanetas (informação do banco de dados Nasa Exoplanet Archive).

2.2 Velocidade Radial

A detecção por velocidade radial é baseada no movimento da estrela projetado no plano do céu. A estrela move-se em torno do baricentro do sistema, devido a presença de um planeta, com a componente radial de sua velocidade dada por:

$$v_r = K\left[\cos\left(\omega + \nu\right) + e\cos\left(\omega\right)\right], \tag{2.3}$$

onde ω é a longitude de pericentro, ν é a anomalia verdadeira, e é a excentricidade orbital e K é a semi-amplitude da velocidade radial:

$$K = n\frac{a_\star \sin\left(i\right)}{\sqrt{(1-e^2)}}, \tag{2.4}$$

onde $n = 2\pi/P$ é o movimento médio da estrela em torno do baricentro do sistema e $a_\star$ é o semieixo da estrela com relação ao baricentro do sistema.

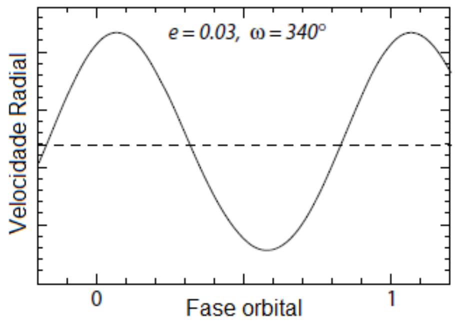


Figura 2.3: Semiamplitude da velocidade radial da estrela HD 73256. Figura adaptada de Udry *et al* (2003).

O movimento da estrela e do planeta ao redor do centro de massa do sistema resulta na mudança periódica de três propriedades observáveis da estrela: sua velocidade radial, sua posição astrométrica no céu e no tempo de chegada de algum sinal periódico. Na Fig. (2.3) vemos a variação da semiamplitude da velocidade radial medida para a estrela HD 73256, orbitada por um planeta.

Ao contrário do que ocorre na detecção por trânsito, pode-se inferir a massa do planeta (m_p) através da velocidade radial de sua estrela, desde que conheçamos a inclinação da órbita deste planeta com relação à linha de visada do observador (i). No entanto, como este parâmetro é de difícil determinação, é mais comum trabalhar com a "massa mínima" do planeta

$$m_{min} = m_p \sin(i)\,, \tag{2.5}$$

conhecida através da função:

$$f(\mathcal{M}) \equiv \frac{m_p^3 \sin^3(i)}{(m_\star + m_p)^2}, \tag{2.6}$$

onde $m_\star$ é a massa da estrela hospedeira do sistema.

As medidas de velocidade radial são obtidas a partir da observação de mudanças periódicas no espectro da estrela, devido Efeito Doppler. Durante seu movimento em torno do baricentro do sistema, a luz da estrela aparece para o observador, periodicamente deslocada para o azul (quando a estrela “se aproxima” do observador), ou para o vermelho (quando a estrela “se afasta” do observador).

O primeiro exoplaneta descoberto através de velocidade radial foi o γ Cep b, um gigante com 1.7 M_J orbitando sua estrela a cada 2.7 anos (Campbell et al., 1988). Até esta data, 3917 exoplanetas foram descobertos via técnica de velocidade radial (Nasa Exoplanet Archive).

2.3 *Timing*

A técnica de *timing* baseia-se na mudança do tempo de recepção (t_p) de algum sinal característico emitido por uma estrela (tais como pulsares e estrelas pulsantes) ou par de estrelas (binárias eclipsantes):

$$t_p = \frac{1}{c}\frac{a \sin(i)\, m_p}{m_\star}, \tag{2.7}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, m_p é a massa do planeta, $m_\star$ é a massa da estrela e i é a inclinação do plano orbital com relação à linha de visada do observador. O primeiro sistema exoplanetário foi descoberto ao redor do pulsar PSR B1257+12, por Wolszczan e Frail (1992).

Como as medidas do tempo de chegada destes pulsos são feitas com grande precisão, até mesmo pequenas variações podem ser mensuradas, dando aos astrônomos a capacidade de detectar até mesmo corpos com a dimensão da Lua, em torno de pulsares de milisegundo (Perryman, 2011).

2.4 Imageamento Direto

A técnica de imageamento direto é baseada na detecção da luz da estrela refletida pelo exoplaneta em torno da qual este se move.

Como geralmente o brilho da estrela é bilhões de vezes mais intenso que o brilho do planeta, a utilização desta técnica depende do conhecimento de vários parâmetros: tipo espectral da estrela, classe de luminosidade, semi eixo orbital, composição, raio e massa projetada do planeta (Perryman, 2011).

Pode-se mostrar que a razão entre o brilho do planeta f_p e o brilho da estrela $f_\star$ é diretamente proporcional do quadrado da razão entre o raio do planeta (R_p) e o semieixo da órbita (a):

$$\frac{f_p}{f_\star} = p\left(\lambda\right)\left(\frac{R_p}{a}\right)^2 g\left(\alpha\right), \tag{2.8}$$

onde $p\left(\lambda\right)$ é o albedo geométrico do planeta, com λ sendo o comprimento de onda da luz refletida pelo planeta e $g\left(\alpha\right)$ uma função do ângulo α medido entre a estrela e o observador a partir do planeta (Perryman, 2011). Para o sistema Sol-Júpiter, temos $f_p/f_\star \approx 10^{-10}$, quando em máxima elongação.

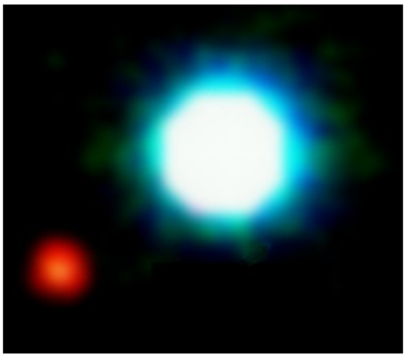


Figura 2.4: Imagem composta do exoplaneta 2M1207 b orbitando a anã-marrom 2M1207. Este é o primeiro exoplaneta descoberto por imageamento direto e também o primeiro descoberto orbitando uma anã-marrom. NASA. Disponível em: https://exoplanets.nasa.gov/resources/300/2m1207b-first-image-of-an-exoplanet/. Acesso em 06/03/2019.

Na Fig.(5.1) temos a imagem do primeiro objeto com massa planetária, detectado via imageamento direto, é um gigante gasoso, com massa muito maior que a de Júpiter e que orbita a anã marrom 2M1207. Essa descoberta foi realizada por uma equipe de astrônomos utilizando o *European Southern Observatory's Very Large.*

Diversos telescópios baseados no solo, estão atualmente munidos de coronógrafos (dispositivos que funcionam como máscaras, suprimindo a luz "não desejada" da estrela) à procura de exoplanetas via imageamento direto. Dentre os coronógrafos atualmente em funcionamento podemos citar: VLT–SPHERE, Gemini Planet Imager, Subaru–AO188–HiCIAO.

Num futuro próximo, a era dos grandes telescópios, diversos equipamentos trabalharão com a técnica de imageamento direto: EEL-T (European Extremely Large Telescope), GMT (Giant Magellan Telescope) e o TMT (Thirty Meter Telescope).

2.5 *Microlentes Gravitacionais*

Damos ao desvio sofrido pela luz, no seu caminho desde a fonte até um observador, devido à distorção do espaço-tempo causada por um corpo massivo, o nome de Lente Gravitacional. A observação deste fenômeno depende do alinhamento fortuito entre fonte, lente e observador.

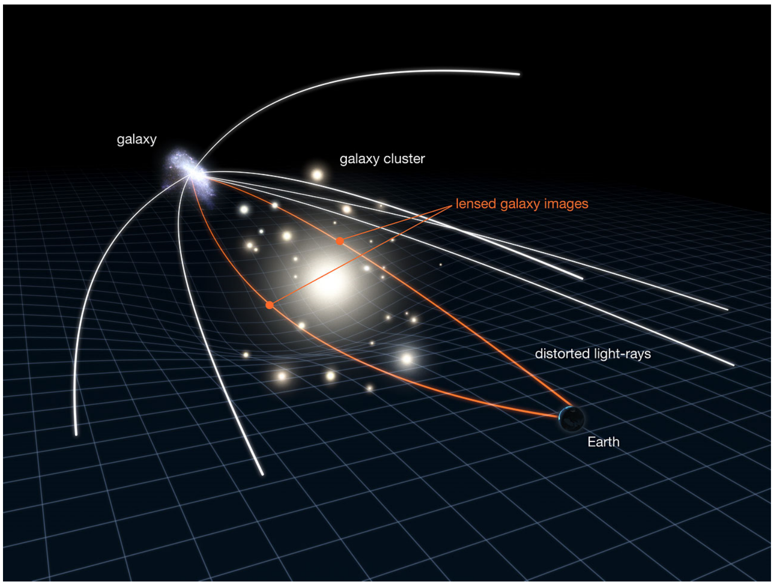


Figura 2.5: Esquema de uma lente gravitacional: a luz de uma galáxia distante é curvada ao passar por um aglomerado de galáxias antes de chegar ao observador. NASA/ESA. Disponível em: https://www.spacetelescope.org/images/heic1106c/. Acesso em: 06/03/2019.

Na figura 2.5, temos a concepção artística do desvio sofrido pela luz, causado pela deformação no espaço-tempo devido a presença de um aglomerado de galáxias, existente entre a fonte de luz e o observador na Terra.

Na técnica de detecção baseada em microlentes gravitacionais, o sistema exoplanetário (estrela central+planetas) atua como uma microlente gravitacional, gerando diversas imagens discretas da fonte de luminosa (geralmente uma estrela dentro da própria galáxia). Como o alinhamento é dependente do tempo, a magnificação das imagens varia, o que leva, a partir de medidas cuidadosas, à cacterização dos sistemas planetários que estão atuando como lentes (Perryman, 2011).

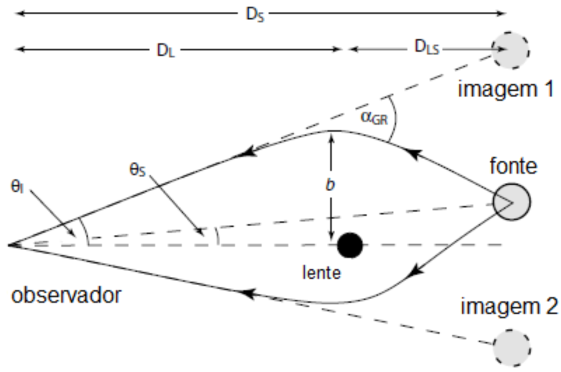


Figura 2.6: Esquema de uma lente gravitacional. Fonte: adaptada de Perryman (2011).

Na Fig.(2.6) temos a representação esquemática de uma lente gravitacional, os raios de luz, partindo de uma fonte distante, são defletidos ao passar próximo à lente, sendo observado com um desvio θ_I com relação à direção original. Pode-se demonstrar que:

$$\theta_S = \theta_I - 2R_S \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{1}{\theta_I}, \tag{2.9}$$

onde θ_S é o ângulo entre a direção da fonte e a direção do observador, como a equação é quadrática em θ_I duas imagens são geradas D_L é a distância entre o observador e a lente, D_{LS} é a distância entre a lente e a fonte (objeto observado) enquanto D_S é a distância entre o observador e a fonte e b é a seção de choque transversal.

Os primeiros *surveys* que utilizaram as lentes gravitacionais, tinham por finalidade as primeiras tentativas de detecção de energia escura, por volta dos anos 1980. Somente em 1993 apareceram os primeiros experimentos dedicados à procura de exoplanetas: OGLE (Optical Gravitational Microlensing), MACHO (Massive Compact Halo Objects), DUO (Disk Unseen Objects), entre outros

A massa da lente (M_L) pode ser determinada a partir da relação:

$$t_E \approx 70 \left(\frac{M_L}{M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{D_S}{8pc}\right)^{1/2} \left(\frac{D_L D_{LS}}{D_S}\right)^{1/2} \left(\frac{v_\perp}{200\ kms^{-1}}\right)^{-1}, \tag{2.10}$$

onde $v_\perp$ é a velocidade transversal relativa entre a lente e a fonte e t_E é o tempo de cruzamento de Einstein.

O primeiro exoplaneta descoberto através de lentes gravitacionais foi o OGLE-2005-BLG-390. Até hoje, foram descobertos pelo menos 73 exoplanetas através desta técnica (Nasa Exoplanet Archive).

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

Neste capítulo abordaremos os principais conceitos teóricos necesários ao entendimento do trabalho.

Na primeira seção definiremos os sistemas de coordenadas *Astrocêntrico, Baricêntrico, Jacobiano e de Poincaré*, além de encontrar as relações de transformação de um em outro.

Na seção seguinte, abordaremos o problema de três corpos a partir de dois formalismos distintos, porém equivalentes: Newtoniano e Hamiltoniano.

3.1 Problema de dois corpos e definição dos elementos orbitais

O problema de dois corpos interagindo gravitacionalmente é o mais simples na área da Mecânica Celeste. Isaac Newton no seu *Principia* (1687), abordou o problema de dois corpos interagindo sob a ação de uma força que variava com o inverso do quadrado da distância, chegando ao resultado que estes descreveriam órbitas na forma de secções cônicas, em torno do foco, como já havia sido observado e modelado por Kepler, no caso de órbitas elípticas, em meados de 1600.

Nesta seção realizaremos uma descrição do problema de dois corpos, com interesse em definir os elementos orbitais que caracterizam a trajetória de um corpo em relação ao outro.

Equações de movimento

Sejam duas partículas de massas m_1 e m_2, como ilustrado na Fig.(3.1), cujas posições relativas a um referencial inercial sejam dadas, respectivamente, pelos vetores $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$. Se estas partículas interagem exclusivamente através da força gravitacional que um exerce sobre o outro, teremos:

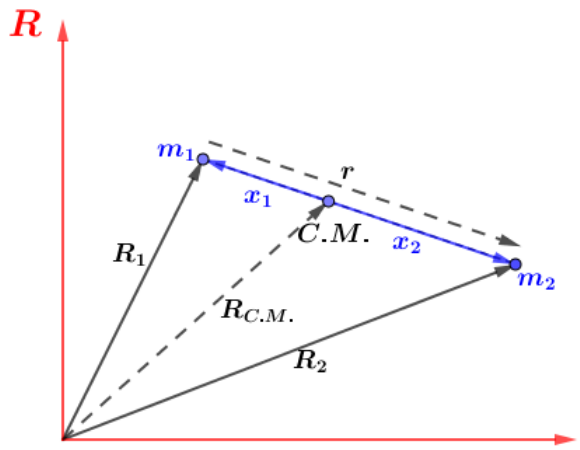


Figura 3.1: Representação de dois corpos, de massas m_1 e m_2 interagindo gravitacionalmente. Os vetores $\mathbf{R}_j$ são relativos a um referencial inercial arbitrário, enquanto os vetores $\mathbf{x}_j$ são relativos ao centro de massa do sistema.

$$\mathbf{F}_1 = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{F}_2 = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r}, \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{G} \approx 6.67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ é a constante gravitacional e $\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ é o vetor posição relativa dos corpos.

Lembrando das 2^{a} e 3^{a} leis de Newton, pode-se mostrar que $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, resulta em:

$$m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2 = \mathbf{A}t + \mathbf{B}, \tag{3.2}$$

que é a equação de movimento para o problema de 2 corpos, interagindo gravitacionalmente, onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são vetores constantes e t é o tempo.

O que a equação 3.2 nos mostra é que o centro de massa do sistema de dois corpos descreve, segundo um referencial inercial, um movimento retilíneo e uniforme, fazendo dele também um referencial inercial.

No entanto, nos estudos de movimentos planetários, é mais conveniente estudar o movimento de um dos corpos com relação ao outro. Pela definição do vetor $\mathbf{r}$ e aplicando a Segunda Lei de Newton temos, a partir da Eq. (3.1):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \tag{3.3}$$

onde $\mu = \mathcal{G}\,(m_1 + m_2)$. Agora, tomando o produto vetorial de $\mathbf{r}$ em ambos os lados da Eq. (3.3), chegamos à equação:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Como $\ddot{\mathbf{r}} = \dfrac{d\dot{r}}{dt}$, o lado esquerdo da da Eq. (3.4) fica

$$\mathbf{r} \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{0}, \tag{3.5}$$

cuja integração resulta

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}, \tag{3.6}$$

onde $\mathbf{h}$ é um vetor constante, chamado de "momento angular integral".

Percebe-se, a partir da Eq. (3.6), que o movimento relativo entre os corpos se dá num mesmo plano, já que o vetor posição e o vetor velocidade são mutuamente perpendiculares ao vetor constante momento angular integral, de modo que um sistema de coordenadas propício para descrever esse movimento é o polar. A trajetória no plano orbital será dada então por:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \tag{3.7}$$

A solução da Eq.(3.7) tem a forma:

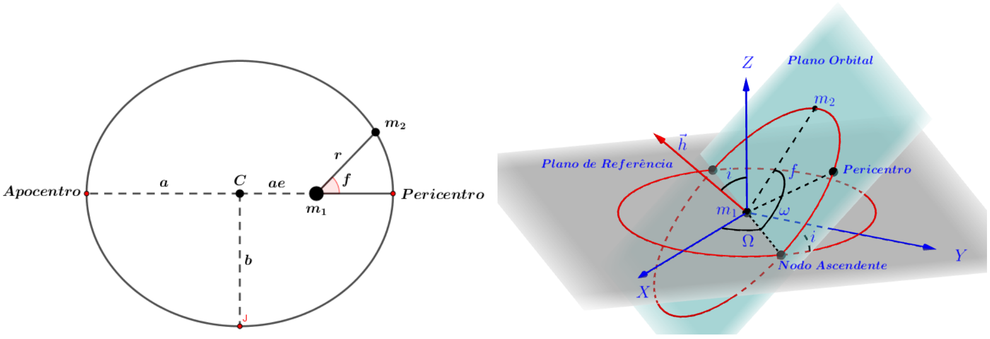
$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta - \varpi)}, \tag{3.8}$$

onde a e e são, respectivamente, o semieixo maior e a excentricidade da órbita, elementos que caracterizam o tamanho e a forma da órbita descrita por um corpo em relação ao outro. Já θ e ϖ são ângulos que fornecem, respectivamente, a posição do corpo na órbita (longitude verdadeira) e a orientação da órbita com relação a uma direção de referência (longitude de pericentro).

Estes dois ângulos são obtidos a partir da anomalia verdadeira (f), da anomalia do pericentro (ω) e da longitude do nodo ascendente (Ω), que estão definidos na Fig. (3.2), de onde tiramos as relações:

$$\theta = (\omega + f) \qquad \text{e} \qquad \varpi = (\Omega + \omega)\,, \tag{3.9}$$

Quando o plano orbital e o plano de referência não coincidem, duas outras constantes devem ser adicionadas, são elas, a longitude do nodo ascendente, Ω, e a inclinação i. Na figura 3.2 temos a representação de uma órbita elíptica de uma partícula de massa m_2 ao redor de uma partícula de massa m_1 no plano (Fig.3.2a) e no espaço (Fig.3.2b).



(a) (b)

Figura 3.2: Representação da órbita elíptica de um corpo de massa m_2, ao redor de um um outro corpo de massa m_1. (a) Representação da elipse no plano e definição do semieixo maior a da órbita e anomalia verdadeira f. A excentricidade é definida por $e = a/c$. (b) Órbita no espaço e definição dos demais elementos orbitais i, ω, Ω.

Podemos encontrar estes seis elementos orbitais $(a, e, i, \Omega, \omega, f)$, a partir de um vetor $\mathbf{R} = (x, y, z)$, tomado em um sistema de eixos tal como o representado na Fig.(3.2 b) e um vetor velocidade $\mathbf{V} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, de modo que:

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A partir da Eq. (3.5) temos:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \dot{z}y - \dot{y}z \\ \dot{x}z - \dot{z}z \\ \dot{y}x - \dot{x}y \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

combinando as Eq. (3.10) e Eq. (3.11), obtemos:

$$\dot{R} = \pm\sqrt{V^2 - \frac{h^2}{R^2}}. \tag{3.12}$$

As expressões para os elementos orbitais serão dadas então por (Murray e Dermott, 2008) :

$$a = \left[\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \right]^{-1}, \tag{3.13}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2) a}}, \tag{3.14}$$

$$i = \arccos\left(\frac{h_Z}{h} \right), \tag{3.15}$$

$$\sin\Omega = \frac{\pm h_X}{h \sin i} \qquad \text{e} \qquad \cos\Omega = \frac{\mp h_Y}{h \sin i}, \tag{3.16}$$

$$\sin(\omega + f) = \frac{Z}{R\sin(i)} \qquad \text{e} \qquad \cos(\omega + f) = \sec\Omega \left[\frac{X}{R} + \sin\Omega \sin(\omega + f)\cos i \right], \tag{3.17}$$

onde (h_x, h_y, h_z) são as componentes do vetor $\mathbf{h}$. O valor de f pode ser calculado a partir de

$$\sin f = \frac{a(1-e^2)}{he}\dot{R} \qquad \text{e} \qquad \cos f = \frac{1}{e}\left[\frac{a(1-e^2)}{R} - 1 \right]. \tag{3.18}$$

3.2 Sistemas de coordenadas para o problema de três corpos

Como neste trabalho os sistemas exoplanetários foram divididos em subsistemas constituídos por três corpos (a estrela central e dois planetas vizinhos), torna-se necessário apenas um estudo do problema de três corpos.

Estudaremos o problema de três corpos inicialmente com o formalismo Newtoniano, passando em seguida para o formalismo Hamiltoniano. É necessário portanto, um tratamento preliminar sobre sistemas de coordenadas.

Nesta seção abordaremos os quatro principais sistemas de coordenadas utilizados na mecânica celeste: astrocêntrico, baricêntrico, jacobiano e de Poincaré.

Defininamos. incialmente, um referencial inercial arbitrário, $\vec{R}$, a partir do qual determinaremos os outros sistemas coordenados. O primeiro elemento que nos interessa é a posição do Centro de Massa neste sistema ($\mathbf{R}_{C.M.}$), assim definida:

$$\mathbf{R}_{C.M.} = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{2} m_j \mathbf{R}_j, \qquad \text{onde} \qquad M = \sum_{k=0}^{2} m_k \tag{3.19}$$

Na notação utilizada, o índice 0 faz referência à estrela central, enquanto os demais índices fazem referência aos planetas.

Um primeiro sistema de coordenadas que naturalmente se apresenta é o astrocêntrico, representado na Fig.(3.3), no qual a origem é coincidente com a posição da estrela central, de massa m_0, enquanto as posições dos planetas serão dadas pelos vetores $\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_0$, com $j = 1, 2$.

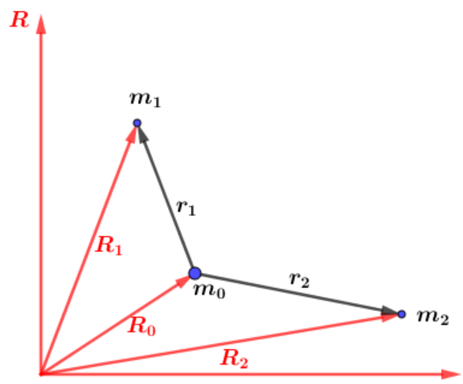


Figura 3.3: Sistema Astrocêntrico em termos de um referencial inercial **R**.

No sistema baricêntrico, representado na Fig.(3.4), em termos de um referencial inercial, a origem coincide com a posição do centro de massa $(C.M.)$. A posição da estrela central, $\mathbf{x}_0$, e dos planetas, $\mathbf{x}_j$, com $j = 1$ e 2, são dadas então com respeito ao baricentro do sistema.

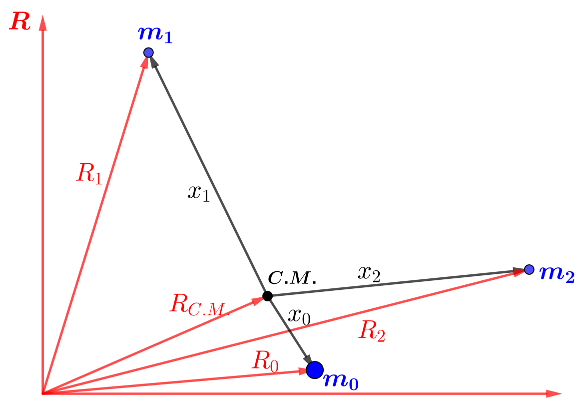


Figura 3.4: Sistema Baricêntrico em termos de um referencial inercial **R**

No sistema de coordenadas de Jacobi, a origem é arbitrariamente escolhida em um dos corpos, enquanto a posição, $\boldsymbol{\rho}_j$, de cada corpo é dada a partir da posição do $C.M.$ dos

$j-1$ corpos restantes. Costumeiramente, a origem deste sistema é escolhida de modo a coincidir com a posição do corpo central.

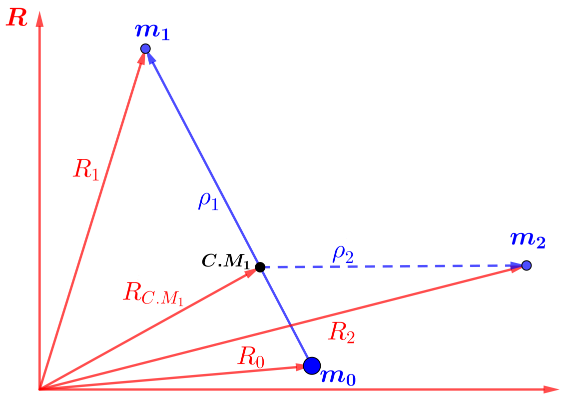


Figura 3.5: Sistema Jacobiano em termos de um referencial inercial **R**

Por fim, no sistema de coordenadas de Poincaré, as posições são as mesmas do sistema astrocêntrico, enquanto os momentos são referidos ao sistema baricêntrico (Ferraz-Mello et al., 2006).

3.2.1 Transformações do sistema Baricêntrico para o Astrocêntrico

Como já colocado $\mathbf{r}_j$ e $\mathbf{x}_j$ são as posições nos sistemas astrocêntrico e baricêntrico, respectivamente, de modo que denotaremos as velocidades nestes referenciais por $\dot{\mathbf{r}}_j$ e $\dot{\mathbf{x}}_j$.

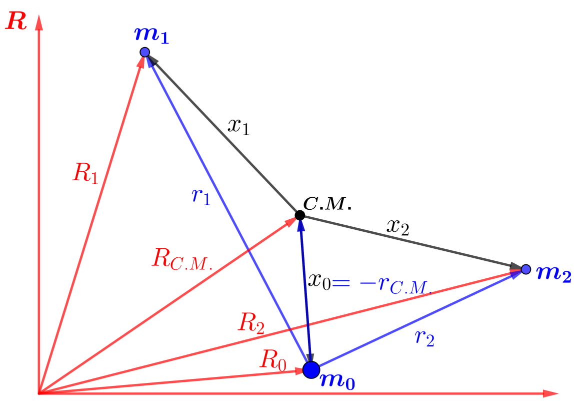


Figura 3.6: Posições astrocêntricas e baricêntricas com respeito a um referencial inercial R

Analisando a Fig.(3.6), chegamos às seguintes equações:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0, \tag{3.20}$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0,$$

e

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_{C.M},$$
$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_{C.M}, \tag{3.21}$$
$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_{C.M}.$$

Agora, se fizermos coincidir o sistema, $\mathbf{R}_j$, outrora inercial, com o astrocêntrico, teremos $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$, então:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1, \tag{3.22}$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2,$$

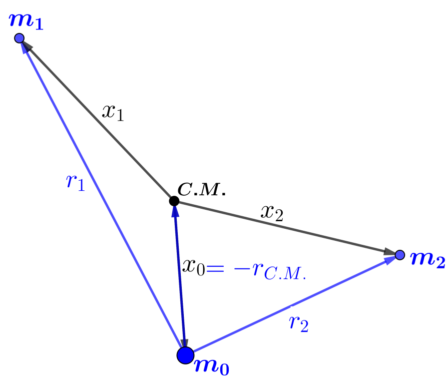


Figura 3.7: Posições baricêntricas em termos das coordenadas astrocêntricas

de modo que o C.M. passa a ser definido como:

$$\mathbf{r}_{C.M.} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}. \tag{3.23}$$

Por fim, as coordenadas $\mathbf{x}_j$ passam a ser:

$$\mathbf{x}_0 = -\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2},$$
$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \tag{3.24}$$
$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

Se lembrarmos que $\mathbf{p}_{\mathbf{x}_j} = m_j \dot{\mathbf{x}}_j$ e $\mathbf{p}_{\mathbf{r}_j} = m_j \dot{\mathbf{r}}_j$, encontramos as equações para os momentos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_0} &= -\frac{m_0}{m_0 + m_1 + m_2} \left(\mathbf{p}_{\mathbf{r}_1} + \mathbf{p}_{\mathbf{r}_2}\right), \\
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} &= \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2} \left[(m_0 + m_2)\, \mathbf{p}_{\mathbf{r}_1} - m_1 \mathbf{p}_{\mathbf{r}_2}\right], \\
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_2} &= \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2} \left[(m_0 + m_1)\, \mathbf{p}_{\mathbf{r}_2} - m_2 \mathbf{p}_{\mathbf{r}_1}\right].
\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.2.2 Transformações do sistema Astrocêntrico para o Baricêntrico

Neste caso, como origem do sistema coincide com a posição do C.M., temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{CM} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{R}_0 &= \mathbf{x}_0, \\
\mathbf{R}_1 &= \mathbf{x}_1, \\
\mathbf{R}_2 &= \mathbf{x}_2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{r}_1 &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \\
\mathbf{r}_2 &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

donde podemos concluir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{\mathbf{r}_0} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{p}_{\mathbf{r}_1} &= \mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} - \frac{m_1}{m_0} \mathbf{p}_{\mathbf{x}_0}, \\
\mathbf{p}_{\mathbf{r}_2} &= \mathbf{p}_{\mathbf{x}_2} - \frac{m_2}{m_0} \mathbf{p}_{\mathbf{x}_0}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.2.3 Transformações do Sistema Baricêntrico para o Sistema de Jacobi

Aqui, denotamos por $\boldsymbol{\rho}_j$ e $\dot{\boldsymbol{\rho}}_j$ as posições e velocidades no sistema Jacobiano, respectivamente.

A partir da análise da Fig.(3.8) podemos encontrar :

$$\mathbf{x}_{C.M_1} = \mathbf{R}_{C.M_1} - \mathbf{R}_{C.M}. \tag{3.29}$$

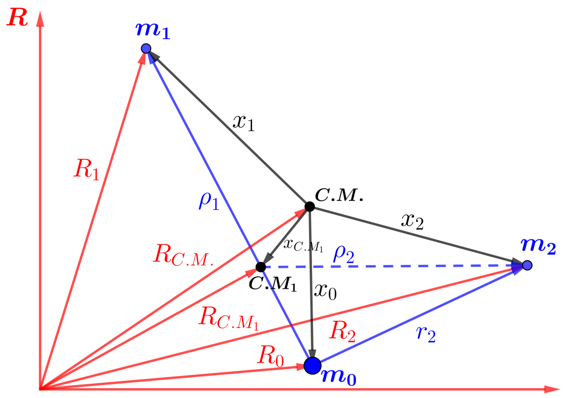


Figura 3.8: Posições baricêntricas e jacobianas com respeito a um referencial inercial R

Onde:

$$\mathbf{R}_{C.M.} = \frac{m_0\mathbf{R}_0 + m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2}{m_0 + m_1 + m_2} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{R}_{C.M._1} = \frac{m_0\mathbf{R}_0 + m_1\mathbf{R}_1}{m_0 + m_1}. \tag{3.30}$$

Fazendo a origem do sistema coincidir com o C.M. teremos $\mathbf{R}_{C.M} = \mathbf{0}$. Portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{R}_0, \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{R}_1, \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{R}_2, \\ \mathbf{x}_{C.M_1} &= \mathbf{R}_{C.M_1}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

de modo que:

$$\mathbf{x}_{C.M_1} = \frac{m_0\mathbf{x}_0 + m_1\mathbf{x}_1}{m_0 + m_1}. \tag{3.32}$$

Agora, analisando a Fig.(3.9) abaixo, podemos encontrar as coordenadas Jacobianas em termos das coordenadas Baricêntricas, levando em consideração as Eqs. (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32):

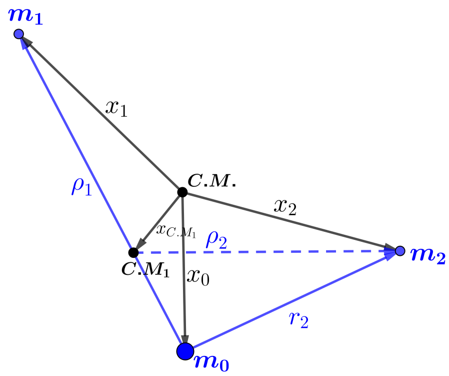


Figura 3.9: Posições jacobianas em termos de coordenadas baricêntricas

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_0 &= \mathbf{0}, \\
\boldsymbol{\rho}_1 &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \\
\boldsymbol{\rho}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{m_0\mathbf{x}_0 + m_1\mathbf{x}_1}{m_0 + m_1}.
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

Os momentos $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_j}$, em termos dos $\mathbf{p}_{\mathbf{x}_j}$, são encontrados a partir da condição de canonicidade (Ferraz-Mello, 2007):

$$
\sum_{j=0}^{2}\left(\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_j} d\boldsymbol{\rho}_j - \mathbf{p}_{\mathbf{x}_j} d\mathbf{x}_j\right) = \mathbf{0}. \tag{3.34}
$$

Então:

$$
\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_0} d\boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_1} d\boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2} d\boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{p}_{\mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0 + \mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} d\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_{\mathbf{x}_2} d\mathbf{x}_2. \tag{3.35}
$$

De 3.33 encontramos

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{\rho}_0 &= \mathbf{0}, \\
d\boldsymbol{\rho}_1 &= d\mathbf{x}_1 - d\mathbf{x}_0, \\
d\boldsymbol{\rho}_2 &= d\mathbf{x}_2 - \frac{m_0 d\mathbf{x}_0 + m_1 d\mathbf{x}_1}{m_0 + m_1}.
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

Agora, substituindo 3.36 em 3.35 e arranjando os termos, encontramos:

$$
\begin{aligned}
\left(-\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_1} - \frac{m_0}{m_0+m_1}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}\right) d\mathbf{x}_0 + \left(\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_1} - \frac{m_1}{m_0+m_1}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}\right) d\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2} d\mathbf{x}_2 &= \\
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0 + \mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} d\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_{\mathbf{x}_2} d\mathbf{x}_2 &
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

Portanto, através de simples comparação entre os coeficientes, obtemos os momentos no sistema baricêntrico em termos dos momentos no sistema de Jacobi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_0} &= -\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_1} - \frac{m_0}{m_0+m_1}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}, \\
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} &= \mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_1} - \frac{m_1}{m_0+m_1}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}, \\
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_2} &= \mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Donde, resolvendo para $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_1}$ e $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_0} &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_1} &= \mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} + \frac{m_1}{m_0+m_1}\mathbf{p}_{\mathbf{x}_2}, \\
\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2} &= \mathbf{p}_{\mathbf{x}_2}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.2.4 Transformações do Sistema de Jacobi para o Sistema Baricêntrico

Agora encontremos as relações de transformação do sistema de Jacobi para o baricêntrico. Primeiramente as relações para as coordenadas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 &= \boldsymbol{\rho}_1, \\
\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 &= \boldsymbol{\rho}_2 + \frac{m_1}{m_0+m_1}\boldsymbol{\rho}_1.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Como $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ e $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)$ são as posições astrocêntricas dos corpos 1 e 2, podemos, utilizando a definição de Centro de Massa, encontrar as posições baricêntricas dos três corpos em termos das coordenadas de Jacobi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_0 &= -\boldsymbol{\rho}_1 \left[\frac{m_1^2 + 2m_1m_2}{(m_0+m_1+m_2)(m_0+m_1)}\right] - \boldsymbol{\rho}_2 \left(\frac{m_2}{m_0+m_1+m_2}\right), \\
\mathbf{x}_1 &= \boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{x}_0, \\
\mathbf{x}_2 &= \boldsymbol{\rho}_2 + \frac{m_1}{m_0+m_1}\boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{x}_0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Para encontrar os momentos $\vec{p}_{\vec{x}_j}$ basta utilizar a mesma relação de canonicidade da Eq.(3.34), de modo que chegamos a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_0} &= -\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_1} - \frac{m_0}{m_0+m_1}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}, \\
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} &= \mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_1} - \frac{m_0}{m_0+m_1}\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}, \\
\mathbf{p}_{\mathbf{x}_2} &= \mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.2.5 Transformações do Sistema Baricêntrico para o Sistema de Poincaré

No sistema de Poincaré, a coordenada do primeiro corpo $\boldsymbol{\zeta}_0$ é tal que:

$$\boldsymbol{\zeta}_0 = \mathbf{x}_0, \tag{3.43}$$

portanto, teremos para os outros:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_1 &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \\ \boldsymbol{\zeta}_2 &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Os momentos conjugados às coordenadas, so assim definidos: o momento do corpo central, $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0}$ é tal que:

$$\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0} = \sum_{j=0}^{2} \mathbf{p}_{\mathbf{x}_j}, \tag{3.45}$$

enquanto os momentos dos demais corpos mantêm uma relação de identidade com os momentos conjugados às coordenadas no sistema baricêntrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1} &= \mathbf{p}_{\mathbf{x}_1}, \\ \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2} &= \mathbf{p}_{\mathbf{x}_2}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

3.2.6 Transformações do Sistema de Poincaré para o Sistema Baricêntrico

Pela própria definição das coordenadas de Poincaré, a passagem destas para as coordenadas baricêntricas é análoga à passagem do sistema astrocêntrico para o baricêntrico, logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= -\frac{m_1\boldsymbol{\zeta}_1 + m_2\boldsymbol{\zeta}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \\ \mathbf{x}_1 &= \frac{m_0\boldsymbol{\zeta}_1 + m_2\boldsymbol{\zeta}_1 - m_2\boldsymbol{\zeta}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \\ \mathbf{x}_2 &= \frac{m_0\boldsymbol{\zeta}_2 + m_1\boldsymbol{\zeta}_2 - m_1\boldsymbol{\zeta}_1}{m_0 + m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Já os momentos serão dados simplesmente pela inversa das transformações da Eq.(3.48):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\mathbf{x}_0} &= \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0} - \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1} - \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}, \\ \mathbf{p}_{\mathbf{x}_1} &= \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1}, \\ \mathbf{p}_{\mathbf{x}_2} &= \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

3.3 Problema de geral de três corpos

3.3.1 Formalismo Newtoniano

Sejam três pontos massivos de massas m_0, m_1 e, m_2 interagindo através da força gravitacional . Consideremos, para uma primeira análise, o conjunto dos vetores posição, $\mathbf{R}_j$, de cada uma das massas tomados em relacção a um referencial inercial arbitrário.

Neste sistema, a equação de movimento para o j-ésimo corpo toma a forma:

$$m_j \ddot{\mathbf{R}}_j = -\sum_{k=0;k\neq j}^{2} \mathcal{G} m_j m_k \frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k}{\Delta_{jk}^3}, \tag{3.49}$$

onde $\mathcal{G} \approx 6.67 \times 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$ é a constante gravitacional, em unidades do MKS e

$$\Delta_{jk} = |\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k|. \tag{3.50}$$

Se tomarmos a soma em j em ambos os lados da Eq.(3.49), teremos:

$$\sum_{j=0}^{2} m_j \ddot{\mathbf{R}}_j = \mathbf{0}, \tag{3.51}$$

já que $(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k) = -(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j)$.

A Eq.(3.51) é uma equação diferencial ordinária, homogênea e de segunda ordem.Integrando uma primeira vez, obtemos:

$$\sum_{j=0}^{2} m_j \dot{\mathbf{R}}_j = \mathbf{A}, \tag{3.52}$$

onde $\mathbf{A}$ é um vetor constante com unidades de momento linear.

Podemos concluir então que, num referencial inercial, o momento linear total do sistema de três corpos, interagindo gravitacionalmente, se conserva. Integrando a Eq.(3.52) uma outra vez, obtemos:

$$\sum_{j=0}^{2} m_j \mathbf{R}_j = \mathbf{B} + \mathbf{A}t, \tag{3.53}$$

que é a equação horária de movimento para o centro de massa $(C.M.)$ do sistema.

Como $\mathbf{B}$ e $\mathbf{A}$ são vetores constantes, fica evidente que o $C.M.$ do sistema de três corpos, descreve um movimento retilíneo e uniforme neste referencial inercial arbitrário e, portanto, é também um referencial inercial.

Tomemos agora o produto vetorial $\mathbf{R}_j$ em ambos os lados da Eq.(3.49):

$$\sum_{j=0}^{2} m_j \mathbf{R}_j \times \ddot{\mathbf{R}}_j = \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0;k\neq j}^{2} \mathcal{G} m_j m_k \frac{\mathbf{R}_j \times (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k)}{\Delta_{jk}{}^3} = \mathbf{0}. \tag{3.54}$$

Integrando uma vez a equação anterior, obtemos:

$$\sum_{j=0}^{2} m_j \mathbf{R}_j \times \dot{\mathbf{R}}_j = \mathbf{C}, \tag{3.55}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante, cuja análise dimensional mostra tratar-se do momento angular total do sistema, uma constante de movimento.

Como a força gravitacional varia com o inverso do quadrado da distância, podemos representá-la como o gradiente de uma função escalar F, chamada de *função de força* e assim definida (Brouwer e Clemence, 1961):

$$F = \mathcal{G} \sum_{j=0}^{2} \sum_{k>j}^{2} \frac{m_j m_k}{\Delta_{jk}}, \tag{3.56}$$

de modo que a equação de movimento para o j-ésimo corpo fica

$$m_j \ddot{\mathbf{R}}_j = -\boldsymbol{\nabla} F. \tag{3.57}$$

Se agora tomarmos o produto escalar de $\dot{\mathbf{R}}$ em ambos os lados da Eq.(3.57), teremos, após alguns passos:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2} m_j \dot{\mathbf{R}}_j^2 - F = \mathcal{E}, \tag{3.58}$$

onde $\mathcal{E}$ é uma constante de integração escalar. A Eq.(3.58) expressa a conservação da energia total no problema de 3 corpos, já que o termo $\frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\mathbf{R}}_j^2$ expressa a energia cinética total do sistema, enquanto $-F$ expressa a energia potencial gravitacional do sistema.

É mais conveniente, contudo, escolher como referencial um dos corpos, descrevendo assim o movimento relativo entre eles, de modo que pode-se mostrar que a equação de movimento para o j-ésimo ($j \neq 0$) astro é :

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = -\mathcal{G}\,(m_0 + m_j)\,\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + \sum_{k=1,k\neq j}^{2} \mathcal{G} m_k \left(\frac{\mathbf{r}_{jk}}{\Delta_{jk}^3} - \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right). \tag{3.59}$$

onde, $\Delta_{jk} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$.

Na equação anterior, o primeiro termo do segundo membro refere-se à interação entre o j-ésimo corpo e o centro de força de massa $(m_j + m_0)$. É chamado de kepleriano e, na ausência do segundo termo, resulta na equação de movimento para o problema de dois corpos.

O segundo termo do lado direito é o termo *perturbativo*, pois refere-se à interação entre o j-ésimo corpo e os demais, excetuando-se o central: a primeira parte, chamada de "direta", é devida à mútua interação entre os $(j-1)$ corpos, enquanto que a segunda parte, chamada de indireta, é resultante da aceleração sofrida pelo corpo central, pelos $(j-2)$ corpos.

A Eq.(3.59) também pode ser representada como o gradiente de uma função escalar $\mathcal{F}$, assim definida:

$$\mathcal{F} = \mathcal{G}\frac{m_0 + m_j}{|\mathbf{r}_j|} + \sum_{k=1,k\neq j}^{2} \mathcal{G}m_k \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_k|} - \frac{1}{\Delta_{jk}}\right), \tag{3.60}$$

de tal modo que

$$m_j\ddot{\mathbf{r}}_j = -\boldsymbol{\nabla}\mathcal{F}. \tag{3.61}$$

Agora, consideremos uma rotação de um ângulo α de nosso sistema coordenado, em torno do eixo "z", de tal modo que as as novas posições sejam dadas pelos vetores $\vec{r'}$:

$$\begin{pmatrix} r_{x_j} \\ r_{y_j} \\ r_{z_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'_{x_j} \\ r'_{y_j} \\ r'_{z_j} \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

Como a função F depende apenas das distâncias mútuas entre as partículas, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \tag{3.63}$$

de modo que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial r_{x_j}}\frac{\partial r_{x_j}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial r_{y_j}}\frac{\partial r_{y_j}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial r_{z_j}}\frac{\partial r_{z_j}}{\partial \alpha}\right). \tag{3.64}$$

Agora, se substituirmos as relações 3.62 na Eq.(3.64) e lembrando da Eq.(3.63) teremos:

$$\sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial r_{y_j}} r_{x_j} - \frac{\partial F}{\partial r_{x_j}} r_{y_j}\right) = 0. \tag{3.65}$$

Com a ajuda da Eq.(3.61) podemos chegar a:

$$\sum_j m_j \left(r_{x_j} \frac{d^2 r_{y_j}}{dt^2} - r_{y_j} \frac{d^2 r_{x_j}}{dt^2} \right) = 0. \tag{3.66}$$

Relações similares podem ser encontradas por uma permutação cíclica das variáveis. De todo modo, após realizarmos as integrações necessárias, chegamos a:

$$\begin{aligned} \sum_j m_j \left(r_{x_j} \frac{dr_{y_j}}{dt} - r_{y_j} \frac{dr_{x_j}}{dt} \right) &= c_1, \\ \sum_j m_j \left(r_{y_j} \frac{dr_{z_j}}{dt} - r_{z_j} \frac{dr_{y_j}}{dt} \right) &= c_2, \\ \sum_j m_j \left(r_{z_j} \frac{dr_{x_j}}{dt} - r_{x_j} \frac{dr_{z_j}}{dt} \right) &= c_3, \end{aligned} \tag{3.67}$$

onde c_1, c_2 e c_3 são as *integrais de área*, que tem relação com a conservação do *momento angular*.

Por fim, tomando o produto $\dot{\vec{r}}_j \cdot \left(m_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} \right)$, teremos

$$\sum_j \left(\dot{r}_{x_j} \ddot{r}_{x_j} + \dot{r}_{y_j} \ddot{r}_{y_j} + \dot{r}_{z_j} \ddot{r}_{z_j} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial r_{x_j}} \dot{r}_{x_j} + \frac{\partial F}{\partial r_{y_j}} \dot{r}_{y_j} + \frac{\partial F}{\partial r_{z_j}} \dot{r}_{z_j} \right) = \frac{dF}{dt}. \tag{3.68}$$

Integrando a última equação obtemos:

$$\sum_j \frac{m_j}{2} \left(\dot{r}_{x_j}^2 + \dot{r}_{y_j}^2 + \dot{r}_{z_j}^2 \right) = F + C, \tag{3.69}$$

onde F e C são constantes de integração. A equação 3.69 fornece a integral da energia.

3.3.2 Formalismo Hamiltoniano

Nesta seção abordaremos de maneira sucinta os conceitos importantes do formalismo hamiltoniano que será utilizado neste trabalho.

3.3.2.1 Variáveis de Ação-Ângulo

Sistemas periódicos aparecem nos mais varidados fenômenos estudados pela Física, sendo particularmente bastante presentes na Mecânica Celeste.

Para um entendimento preliminar de sistemas periódicos, precisa-se incialmente definir o que seja um *sistema separável*.

Um sistema é dito separável, se a Hamiltoniana ($\mathcal{H}$) não depende explicitamente do tempo e a equação de Hamilton-Jacobi é separável em algum sistema de coordenadas generalizadas $(q_1, \cdots, q_N)$ da forma:

$$W\left(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N\right) = \sum_{j=1}^{N} W_j\left(q_j, \alpha_1, \cdots, \alpha_N\right), \tag{3.70}$$

onde $W\left(q_1, \cdots, q_N, \alpha_1, \cdots, \alpha_N\right)$ é a solução da equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo.

Teremos os momentos conjugados dados por:

$$p_j = \frac{\partial W_j}{\partial q_j} = f_j\left(q_j, \alpha\right). \tag{3.71}$$

Se tomarmos um plano $q_j \times p_j$ (chamado de "plano de fase"), a função $f_j\left(q_j, \alpha\right)$ será representada por uma curva neste plano, de modo que para cada j, tem-se um plano diferente e uma curva diferente. Se a projeção de cada curva sobre o plano de fase satisfizer uma das condições a seguir, o sistema é dito *multiperiódico*:

1. A curva $f_j\left(q_j, \alpha\right)$ é fechada e oscila periodicamente entre dois limites definidos. Neste caso, o movimento é chamado de *libração*.

2. $f_j\left(q_j, \alpha\right)$ é uma função periódica de q_j, não sendo esta última, função periódica do tempo. Neste caso, o movimento é chamado de *circulação* ou *rotação*.

Um conjunto de variáveis bastante úteis no estudo dos movimento multiperiódicos são as variáveis de ação-ângulo.

Podemos então definir a j-ésima variável de ação de um sistema multiperiódico, desta maneira:

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j dq_j. \tag{3.72}$$

A integral se extende por um período completo de libração ou rotação. As variáveis canonicamente conjugadas às ações são chamadas de angulares e assim definidas:

$$\phi_j = \frac{\partial W}{\partial J_j}. \tag{3.73}$$

3.3.3 Representações da Hamiltoniana nos diferentes sistemas de coordenadas

Nesta seção encontraremos as representações da Hamiltoniana do problema de 3 corpos utilizando inicialmente o conjunto de variáveis canônicas baricêntricas. A Hamiltoniana em coordenadas e velocidades nos sistemas de Jacobi e de Poincaré serão obtidos a partir das relações de transformação deduzidas nas equações anteriores.

3.3.3.1 Hamiltoniana no sistema baricêntrico

Como nas seções anteriores, denotemos por $\mathbf{x}_j$ $(j = 0, 1, 2)$ o vetor posição do j-ésimo corpo em relação ao baricentro do sistema, com $\mathbf{p}_{\mathbf{x}_j} = m_j \dot{\mathbf{x}}_j$ sendo seu momento linear conjugado. A Hamiltoniana completo do sistema será dado por:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=0}^{2} \frac{\mathbf{p}_{\mathbf{x}_j}^2}{2m_j} - \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=j+1}^{2} \mathcal{G} \frac{m_j m_k}{\Delta_{jk}}. \tag{3.74}$$

onde $\Delta_{jk} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|$. As equações de movimento serão, portanto:

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{x}_j}} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_j = \frac{\mathbf{p}_{\mathbf{x}_j}}{m_j} \tag{3.75}$$

e

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{x}_j} = -\mathcal{G} \frac{m_j m_k}{\Delta_{jk}^3} \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \right). \tag{3.76}$$

3.3.3.2 Hamiltoniana no sistema de Jacobi

A energia cinética total (T) do sistema de três corpos, pode ser escrita, utilizando os momentos baricêntricos, como:

$$T = \sum_{j=0}^{2} \frac{\mathbf{p}_{\vec{x}_j}^2}{2m_j}, \tag{3.77}$$

de modo que, tomando as equações de transformação encontradas na seção 3.2.4, podemos representar, após algum algebrismo mais simples, que a energia cinética total, em termos das variáveis de Jacobi é:

$$T = \frac{\mathbf{p}_{\vec{\rho}_1}^2}{2m_0 m_1} \left(m_0 + m_1 \right) + \frac{\mathbf{p}_{\vec{\rho}_2}^2}{2m_0 \left(m_0 + m_1 \right)} \left(m_0 + m_1 + m_2 \right). \tag{3.78}$$

A fim de deixar esta expressão em uma forma mais condensada, definiremos três parâmetros,μ_j, σ_j, β_j

$$\mu_j = \mathcal{G}\sigma_j, \quad \sigma_j = \sum_{k=0}^{j} m_k, \quad \text{e} \quad \beta_j = \frac{m_j \sigma_{j-1}}{\sigma_j}, \tag{3.79}$$

de modo que a Eq.(3.78) toma a forma mais familiar:

$$T = \frac{\mathbf{p}_{\vec{\rho}_1}^2}{2\beta_1} + \frac{\mathbf{p}_{\vec{\rho}_2}^2}{2\beta_2}. \tag{3.80}$$

Já a energia potencial gravitacional U, no sistema de coordenadas baricêntrico, é dada por:

$$U = -\sum_{j=0}^{2} \sum_{k=j+1}^{2} \mathcal{G} \frac{m_j m_k}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|}. \tag{3.81}$$

Pode-se mostrar que U pode ser decomposta em duas partes U_0 e U_1, dadas por:

$$U_0 = -\mathcal{G} \sum_{l=1}^{2} \frac{\sigma_{l-1} m_l}{|\boldsymbol{\rho_l}|} \tag{3.82}$$

e

$$U_1 = -\mathcal{G} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=j+1}^{2} \frac{m_j m_k}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|} - \mathcal{G} \sum_{l=1}^{2} m_l \left(\frac{m_0}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_l|} - \frac{\sigma_{l-1}}{|\boldsymbol{\rho}_l|} \right), \tag{3.83}$$

de modo que podemos definir uma função H_0:

$$H_0 = \left(\frac{\mathbf{p}_{\vec{\rho}_1}^2}{2\beta_1} - \frac{\mu_1 \beta_1}{|\boldsymbol{\rho_1}|} \right) + \left(\frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_2}^2}{2\beta_2} - \frac{\mu_2 \beta_2}{|\boldsymbol{\rho}_2|} \right), \tag{3.84}$$

construindo assim a Hamiltoniana completa do sistema:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\mathbf{p}_{\vec{\rho}_j}^2}{2\beta_j} - \mathcal{G} \sum_{l=1}^{2} \frac{\sigma_{l-1} m_l}{|\boldsymbol{\rho}_l|} - \mathcal{G} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=j+1}^{2} \frac{m_j m_k}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|} - \mathcal{G} \sum_{l=1}^{2} m_l \left(\frac{m_0}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_l|} - \frac{\sigma_{l-1}}{|\boldsymbol{\rho}_l|} \right). \tag{3.85}$$

Podemos então definir os elementos orbitais em termos das posições e velocidades no sistema de Jacobi:

$$a_j^{(J)} = \frac{\mu_j \rho_j}{2\mu_j - \rho_j w_j^2}, \qquad \mu_j = \mathcal{G}\sigma_j, \tag{3.86}$$

$$e_j^{(J)} = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_j}{a_j^{(J)}}\right) + \frac{(\boldsymbol{\rho}_j \cdot \boldsymbol{w}_j)}{\mu_j a_j^{(J)}}}. \tag{3.87}$$

A velocidade $\mathbf{w}_j^{(J)}$ foi assim definida:

$$\mathbf{w}_k^{(J)} = \frac{\sigma_k}{m_k \sigma_{k-1}} \mathbf{p}_{\boldsymbol{\rho}_k}. \tag{3.88}$$

3.3.3.3 Hamiltoniana no sistema de Poincaré

Para expressar a Hamiltoniana no sistema de Coordenadas de Poincaré, mais uma vez nos valeremos inicialmente da definição no sistema de coordenadas baricêntrico. Lembrando das Eq.(3.48), teremos:

$$T = \frac{\left(\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0} - \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1} - \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}\right)^2}{2m_0} + \frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}^2}{2m_2}. \tag{3.89}$$

Expandindo o termo entre parênteses e agrupando termos comuns, obtemos a expressão para a energia cinética em termos das coordenadas de Poincaré:

$$T = \frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0}^2}{2\gamma_0} + \frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1}^2}{2\gamma_1} + \frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}^2}{2\gamma_2} - \frac{1}{m_0}\left(\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1} \cdot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0} + \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2} \cdot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0} - \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1} \cdot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}\right), \tag{3.90}$$

onde $\gamma_j = \dfrac{m_0 m_j}{m_0 + m_j}$.

Podemos mostrar que, em coordenadas de Poincaré, a energia potencial pode ser como

$$U = -\frac{\mu_1 \gamma_1}{|\boldsymbol{\zeta_1}|} - \frac{\mu_2 \gamma_2}{|\boldsymbol{\zeta_2}|} - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{\zeta_2} - \boldsymbol{\zeta_1}|}, \tag{3.91}$$

onde $\mu_j = \mathcal{G}\left(m_0 + m_j\right)$.

Escrevendo a Hamiltoniana completo do problema de três corpos nas variáveis de Poincaré teremos:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0}}{2\gamma_0} + \frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1}}{2\gamma_1} + \frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}}{2\gamma_2} - \frac{1}{m_0}\left(\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1} \cdot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0} + \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2} \cdot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0} - \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1} \cdot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}\right) - \frac{\mu_1 \gamma_1}{|\boldsymbol{\zeta_1}|} - \frac{\mu_2 \gamma_2}{|\boldsymbol{\zeta_2}|} - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{\zeta_2} - \boldsymbol{\zeta_1}|}. \tag{3.92}$$

Percebe-se que $\boldsymbol{\zeta}_0$ é uma variável cíclica em $\mathcal{H}$, de modo que o momento canônico conjugado $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_0}$ é uma constande de movimento, à qual atribuiremos, arbitrariamente, o valor 0. A Hamiltoniana total do sistema toma então a forma genérica

$$\mathcal{H} = H_0 + R, \tag{3.93}$$

onde

$$H_0 = \left(\frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1}}{2\gamma_1} - \frac{\mu_1 \gamma_1}{|\boldsymbol{\zeta_1}|} \right) + \left(\frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}}{2\gamma_2} - \frac{\mu_2 \gamma_2}{|\boldsymbol{\zeta_2}|} \right) \tag{3.94}$$

e

$$R = \frac{\mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_1} \cdot \mathbf{p}_{\boldsymbol{\zeta}_2}}{m_0} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{\zeta_2} - \boldsymbol{\zeta_1}|}. \tag{3.95}$$

No sistema de Poincaré os semi-eixos maiores e as excentricidades são assim definidos:

$$a_j^{(P)} = \frac{\mu_j \zeta_j}{2\mu_j - \zeta_j \left(w_j^{(P)} \right)^2}, \tag{3.96}$$

$$e_j^{(P)} = \sqrt{ \left(1 - \frac{\zeta_j}{a_j^{(P)}} \right)^2 + \frac{\left(\boldsymbol{\zeta_j} \cdot \boldsymbol{w}_j^{(P)} \right)^2}{\mu_j a_j^{(P)}} }. \tag{3.97}$$

Capítulo 4

Classificação dos sistemas de acordo com seu comportamento dinâmico

O comportamento dinâmico dos sistemas planetários é ditado em grande medida pela existência de comensurabilidades entre algum tipo de período e, em especial, entre os movimentos médios dos corpos, já que a existência de comensurabilidades nos movimentos médios, pode levar a mudanças sensíveis nos elementos orbitais.

Neste capítulo realizaremos uma análise geral do comportamento dinâmico dos pares *hierárquicos, seculares* , *ressonantes* e *quase-ressonantes.* Esta classificação foi inicialmente proposta por Ferraz-Mello et al. (2005a) e leva em consideração a razão entre os movimentos médios dos pares de planetas.

4.1 Sistemas Hierárquicos

Ferraz-Mello et al. (2005a) classifica como hierárquicos, aqueles pares para os quais $\frac{P_1}{P_2} < 0.14$. Por estarem muito distantes um do outro, a interação gravitacional entre os membros do par é extremamente débil, fazendo com que a evolução dinâmica seja ditada pelas perturbações seculares. O sistema será estável desde que as excentricidades e inclinições iniciais estejam restritas a certos valores (Beaugé et al., 2012).

4.2 Sistemas Seculares

Classifica-se como seculares, aqueles sistemas para os quais $0.14 < \frac{P_1}{P_2} \leq 1$ e que não estejam dentro de alguma ressonância de baixa ordem (vide Seção 4.3). Para uma análise do comportamento dos objetos cuja dinâmica secular é preponderante, é interessante definir, a partir dos elementos orbitais $(a_j, e_j, i_j, M_j, \omega_j, \Omega_i)$ um conjunto de coordenadas e momentos conjugados que sejam canônicos, tais como as variáveis de Delaunay ou de Poincaré.

Neste trabalho seguiremos Andrade (2010), utilizando as variáveis de Delaunay em termos das coordenadas de Jacobi e seus momentos conjugados ao problema de três corpos.

Seja um conjunto de coordenadas de Jacobi (l_j, g_j, h_j), cujos momentos conjugados são dados por (L_j, G_j, H_j), de tal modo que:

$$l_j = M_j, \qquad L_j = m'_j\sqrt{\beta_j a_j}, \tag{4.1}$$

$$g_j = \omega_j, \qquad G_j = L_j\sqrt{1-e_j^2}, \tag{4.2}$$

$$h_j = \Omega_j, \qquad H_j = G_j \cos i_j, \tag{4.3}$$

$$\tag{4.4}$$

onde

$$\beta_j = \frac{m_j \sigma_{j-1}}{\sigma_j} \quad , \quad \sigma_j = \sum_k^j m_k \quad \text{e} \quad \mu_j = \mathcal{G}\left(m_0 + m_j\right). \tag{4.5}$$

Podemos definir, por conveniência, os ângulos com respeito a um “ponto fixo” na órbita: $\left(l'_j, g'_j, h'_j\right)$, cujas novas ações conjugadas serão dadas por $\left(L'_j, G'_j, H'_j\right)$, teremos então:

$$l'_j = \lambda_j = M_j + \varpi_j, \qquad L'_j = L_j = m'_j\sqrt{\beta_j a_j}, \tag{4.6}$$

$$g'_j = -\varpi_j = -\omega_j - \Omega_j, \qquad G'_j = L_j - G_j = L_j\left(1 - \sqrt{1-e_j^2}\right), \tag{4.7}$$

$$h'_j = \Omega_j, \qquad H'_j = G_j - H_j = L_j\sqrt{1-e_j^2}\left(1 - \cos i_j\right). \tag{4.8}$$

Podemos realizar uma simplificação, levando em consideração que a maioria dos exoplanetas da amostra foram descobertos pela missão *Kepler*, através de trânsitos planetários, detectados quando o ângulo entre a direção da linha de visada e a direção do momento angular total do sistema é $i \approx 90°$.

A forma simplificada do Hamiltoniano se escreve então:

$$\mathcal{H} = -\sum_{j=1}^{2} \frac{\mu_j^2 \beta_j^3}{2{L'_j}^2} - \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{a_2} \cdot H_1\left(L'_j, G'_j, \varpi_j, \lambda_j\right). \tag{4.9}$$

Como mostrado por Michtchenko e Malhotra (2004), no estudo do comportamento secular, a diferença entre as longitudes dos pericentros $(\Delta\varpi)$ desempenha um papel importante, de modo que podemos realizar uma outra transformação de variáveis, a fim de que um dos novos ângulos seja $\Delta\varpi$:

$$\begin{aligned} l_1^* &= \lambda_1, & L_1^* &= L_1, \\ l_2^* &= \lambda_2, & L_2^* &= L_2, \\ g_1^* &= \Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2, & G_1^* &= G_1' = L_1 - G_1, \\ g_2^* &= -\varpi_2, & G_2^* &= G_1' + G_2' = (L_1 - G_1) + (L_2 - G_2)\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

A parte secular da Eq.4.9, é obtida após calcularmos sua média com relação aos ângulos rápidos λ_i (ângulos cujo período é da mesma ordem do peródo orbital dos planetas).

Como H_0 é independe das variáveis angulares, a média é feita apenas sobre a parte secular de H_1 de modo que :

$$< \mathcal{H} >= \mathcal{H}_{sec} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2}H_1\left(L_i^*, G_i^*, \lambda_1, \lambda_2, \Delta\varpi, \varpi_2\right)d\lambda_1 d\lambda_2, \tag{4.11}$$

onde $H_1\left(L_j^*, G_j^*, \lambda_1, \lambda_2, \Delta\varpi, \varpi_2\right)$ é a função perturbadora.

Como podemos concluir, a partir das relações anteriores, cada L_j (e portanto a_j) são dependentes apenas dos ângulos rápidos λ_j , sendo cíclicas em $\mathcal{H}_{sec}$, logo:

$$\frac{dL_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial \lambda_j} = 0 \Rightarrow L_j = \text{constante.} \tag{4.12}$$

Lembrando agora da Eq. 4.6, teremos

$$a_j = \frac{L_j^2}{\beta_j {m_j'}^2}. \tag{4.13}$$

Ou seja, os semieixos de dois planetas que interagem secularmente permanecem constantes.

Na Fig.(4.1) a linha azul representa a variação do semieixo do planeta υ *Andromedae* d, enquanto a linha vermelha representa a variação do semieixo do planeta υ *Andromedae* c. Como pode-se notar, ambos são aproximadamente constantes, sendo as pequenas oscilações devidas aos termos de curto período.

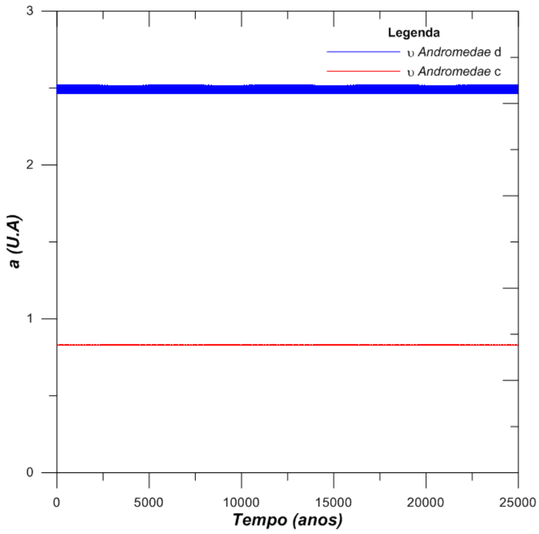


Figura 4.1: Comportamento dos semieixos dos exoplanetas υ *Andromedae* c e d para um período de 25000 anos. As condições iniciais utilizadas estão na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Dados dos Exoplanetas do Sistema υ *Andromedae*

Nome	m [MJup]	a [U.A]	e	i [°]	M[°]	ω[°]	Ω[°]
υ *And* d	4.11 ± 0.16	2.52 ± 0.04	0.27 ± 0.02	0.0	0.0	269.69 ± 5.41	0.0
υ *And* c	1.92 ± 0.09	0.83 ± 0.01	0.22 ± 0.03	0.0	0.0	250.76 ± 5.74	0.0

Podemos chegar a mais algumas conclusões importantes, ao analisarmos a função perturbadora H_1, desde que possamos expressá-la na forma:

$$H_1 = \sum_k S_k \left(a_1, a_2, e_1, e_2, i_1, i_2\right) \cos\left(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\varpi_1 + k_4\varpi_2\right). \tag{4.14}$$

De modo que possamos aplicar a *regra de D'Alambert* (Murray e Dermott, 2008), impondo um vínculo entre os coeficientes (que são números inteiros) dos ângulos:

$$\sum_{l=1}^{4} k_l = 0. \tag{4.15}$$

Como, após o processo de média, os termos dependentes dos ângulos λ_j somem do Hamiltoniano, teremos

$$k_3 + k_4 = 0 \rightarrow k_3 = -k_4, \tag{4.16}$$

donde, chamando $k_3 = k$, encontramos que

$$k_3\varpi_1 + k_4\varpi_2 = k\Delta\varpi, \tag{4.17}$$

onde $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$. Podemos então concluir que a $\mathcal{H}_{sec}$ só depende da posição relativa dos argumentos dos pericentros.

4.2.1 Déficit de Momento Angular - AMD

Como já explando anteriormente, ao tomarmos a média da Hamiltoniana sobre os ângulos rápidos (λ_j) as ações L_j viram constantes de movimento, de modo que, voltarmos nossa atenção para a Eq. 4.10, encontramos:

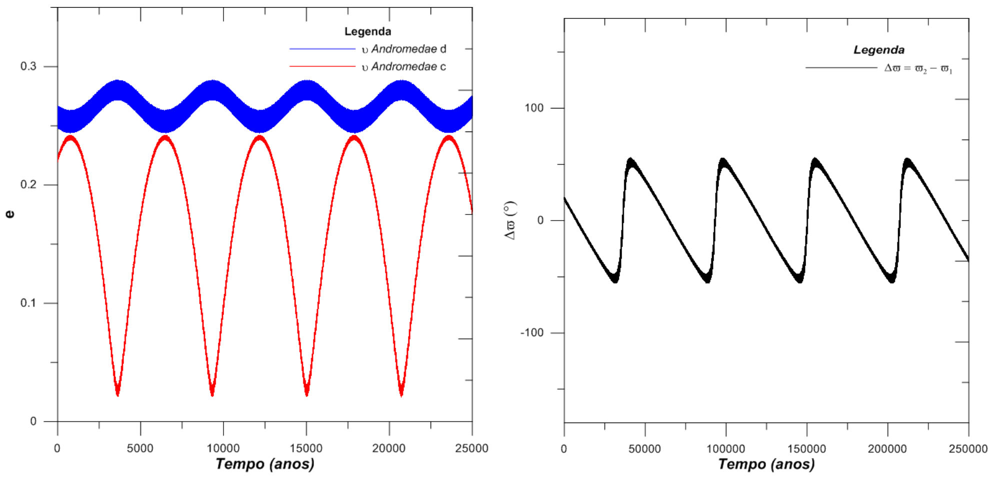
$$\begin{aligned} L_1^* &= cte, \\ L_2^* &= cte, \\ K_2^* &= G_1^* + G_2^*. \end{aligned} \tag{4.18}$$

O terceiro destes momentos, é uma nova integral de movimento,

$$K_2^* = G_1^* + G_2^* = L_1^*\left(1 - \sqrt{1 - e_1^2}\right) + L_2^*\left(1 - \sqrt{1 - e_2^2}\right), \tag{4.19}$$

chamada de Défict de Momento Angular - AMD na sigla em inglês- (Laskar, 1997; Michtchenko et al., 2006; Beaugé et al., 2012).Trata-se combinação da conservação do momento angular com a invariância secular dos semieixos (L_j). Sendo uma constante, o AMD vincula as variações seculares das excentricidades do par de planetas, como podemos concluir facilmente a partir da Eq. (4.19).

Na figura 4.2 temos representado no painel *a* a variação da excentricidade de υ *Andromedae* d (em azul) e υ *Andromedae* c (em vermelho) enquanto que no painel *b* temos representado o comportamento do ângulo secular $\Delta\varpi$ do sistema. Como pode-se perceber, o comportamento em antifase é evidente.



(a) (b)

Figura 4.2: (a)Evolução das excentricidades, com as condições iniciais de υ *Andromedae* c e υ *Andromedae* d como mostrados na Tabela 4.1, durante 25.000 anos. Para este par de planetas vizinhos, $P_1/P_2 \approx 0.2$. (b) Comportamento do ângulo $\Delta\varpi = \varpi_2 - \varpi_1$, do sistema υ *Andromedae* para um período de 25.000 anos, onde fica clara a oscilação em torno do Modo I.

Ao analisarmos à Eq. 4.10, teremos as seguintes equações de movimento derivadas a partir da $\mathcal{H}_{sec}$ e dos pares conjugados (g_1^*, G_1^*),

$$\dot{G}_1^* = -\frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial \Delta\varpi} \qquad \Delta\dot{\varpi} = \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial G_1^*} \tag{4.20}$$

e (g_2^*, G_2^*),

$$\dot{G}_2^* = \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial \varpi_2} = 0 \qquad -\dot{\varpi}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial G_2^*}. \tag{4.21}$$

A primeira das relações na Eq.4.21, vem do fato de a $\mathcal{H}_{sec}$ não depender individualmente de ϖ_1 ou ϖ_2, mas tão somente de $\Delta\varpi$ como já mostrado. A solução para $\dot{G}_2^*$ é trivial:

$$G_2^* = cte. \tag{4.22}$$

Pode-se então perceber que o problema médio planar secular de três corpos, pode ser reduzido a um sistema dinâmico com apenas um grau de liberdade, no qual G_2^* e, por consequência, L_1 e L_2, são parâmetros constantes, donde conclui-se que as variações de G_1^* e $\Delta\varpi$ são descritas por uma mesma frequência.

4.2.2 *Regimes de movimento: Modo I e Modo II*

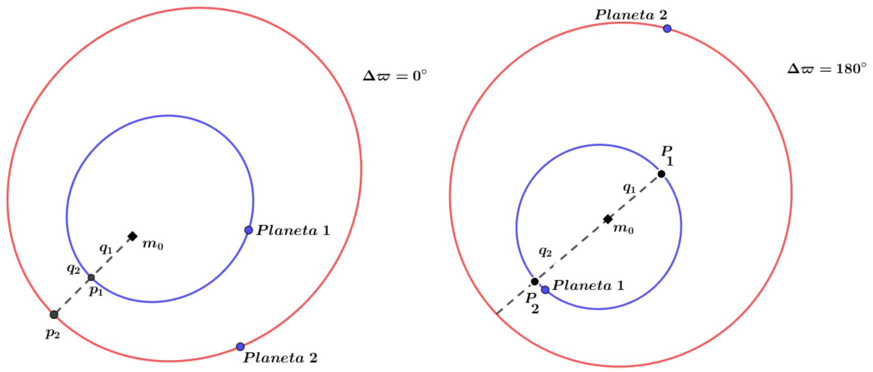
A solução das Eq. (7.22) não é tão simples de ser obtida analiticamente, no entanto, algumas conclusões interessantes podem ser obtidas, a partir da análise das soluções periódicas da $\mathcal{H}_{sec}$:

$$\dot{G}_1^* = 0 \quad e \quad \Delta\dot{\varpi} = 0, \tag{4.23}$$

de onde se obtém, para os casos não singulares de G_1^* :

$$\Delta\varpi = 0 \qquad \text{e} \qquad \Delta\varpi = \pi. \tag{4.24}$$

Para a primeira solção, os pericentros das duas órbitas estão alinhados, enquanto que no segundo caso os pericentros estão antialinhados. Costumeiramente chama-se o primeiro caso de regime de movimento *Modo I*, enquanto o segundo é chamado de regime de movimento *Modo II*.



(a) Modo I (b) Modo II

Figura 4.3: Representação de duas órbitas com as linhas de pericentros alinhadas. Os pontos P_1 e P_2 representam a posição do pericentro da órbita mais interna e da órbita mais externa, respectivamente.

Próximo ao Modo I do regime de movimento, $\Delta\varpi$ oscila em torno de 0° e as excentricidades oscilam com baixa amplitude em torno do valor de uma solução de equilíbrio. Próximo ao Modo II do regime de movimento, $\Delta\varpi$ oscila em torno de π, enquanto as excentricidades oscilam com baixa amplitude em torno do valor obtido para esta solução. Quando o sistema econtra-se longe do Modo I e do Modo II, o ângulo $\Delta\varpi$ circula.

4.3 Sistemas Ressonantes

Uma das características mais notáveis de muitos sistemas exoplanetários é a frequência com que os movimentos médios de dois corpos destes sistemas são comensuráveis uns com os outros, essa condição se escreve:

$$n_2 \left(p + q\right) - pn_1 \approx 0, \tag{4.25}$$

onde n_1 e n_2 são os movimentos médios dos planetas e p e q são números inteiros simples. Nesta situação dizemos que os dois corpos estão em ressonância de movimentos médios (MMR, daqui para frente) de ordem q.

Como o movimento médio do j-ésimo corpo (n_j) é dado por:

$$n_j = \frac{2\pi}{P_j}, \tag{4.26}$$

onde P_j é o período orbital do j-ésimo planeta.

Portanto, se dois planetas, por exemplo, estão em uma ressonância $2/1$, quer dizer que enquanto o corpo mais interno completa duas voltas ao redor do corpo central, o mais externo completa apenas uma.

Entre os sistemas conhecidos de exoplanetas que parecem abrigar pares de planetas em *MMR* podemos citar o interessante caso de Gliese 876 (Rivera et al., 2010), formado pelos planetas *Gliese d, Gliese c,Gliese b* e *Gliese e*, com períodos (em dias): $P_d \approx 1.94, P_c \approx 30.09, P_b \approx 61.12$ e $P_e \approx 124.26$. Ao tomarmos a razão de movimentos médios para os pares consecutivos, encontramos:

$$\frac{n_c}{n_b} \approx 2.03 \qquad \frac{n_b}{n_e} \approx 2.03,$$

o que coloca os dois pares bem próximos da ressonância $2/1$.

Um outro par ressonante é composto pelos planetas *55 Cnc b* e *55 Cnc c*, que orbitam a estrela *55 Cancri* com períodos orbitais, em dias, aproximadamente iguais a 14.65 e 44.38 (Endl et al., 2012), cuja razão de seus movimentos médios, $\dfrac{n_b}{n_c} \approx 3.03$ o coloca bem próximo da ressonância $3/1$.

O estudo da dinâmica de dois planetas em MMR é feito, tal como no caso secular, utilizando as variáveis de Delaunay, que no caso ressonante devem ser modificadas.

Apesar de ainda não existir um consenso quanto a causa da configuração ressonante nos sistemas planetários, diversos trabalhos (Ramos et al. (2016); Tadeu dos Santos et al. (2015), entre outros) têm mostrado que a melhor explicação para tal fenômeno parece estar na migração planetária.

Existem basicamente três formas de se abordar o estudo da dinâmica de sistemas ressonantes: integração númerica das equações exatas do movimento, expansão analítica da função perturbadora, tomando a média sobre os ângulos sinódicos e o método semianalítico. Cada abordagem tem seus prós e contras e a escolha de qual utilizar ao se atacar um problema depende basicamente do objetivo da pesquisa.

Definiremos através do conjunto de variáveis a partir dos elementos em coordenadas de Poincaré $(a, e, i, M, \omega, \Omega)$ as coordenadas de Jacobi e seus respectivos momentos conjugados (l, g, h, L, G, H).

Definamos mais uma vez as variáveis de ação-ângulo, para o caso planar:

$$\begin{aligned} M_1, &\qquad L_1 = m_1' \sqrt{\beta_1 a_1}, \\ M_2, &\qquad L_2 = m_2' \sqrt{\beta_2 a_2}, \\ \varpi_1, &\qquad G_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2}, \\ \varpi_2, &\qquad G_2 = L_2 \sqrt{1 - e_2^2}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Definidas estas variáveis, pode-se assim expandir a parte perturbadora da função Hamiltoniana, que, após um trabalho bastante extenso e complexo, toma a forma (Beaugé e Michtchenko, 2003; Silva, 2017)

$$H_1 = \frac{\kappa^2 m_1 m_2}{a_2} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{u=0}^{N} \sum_{i=0}^{2N} R_{i,j,k,m,n,u} \frac{a_1^i}{a_2^{i+1}} e_1^j e_2^k \cos\left(mM_1 - nM_2 + l\Delta\varpi\right), \tag{4.28}$$

onde $R_{i,j,k,m,n,u}$ é constante para todas as condições iniciais e κ é a constante de Gauss.

A fim de continuarmos trabalhando com as longitudes médias, em detrimento das anomalias, podemos realizar mais uma transformação canônica, tal que

$$(M_1, M_2, \varpi_1, \varpi_2) \longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) \tag{4.29}$$

onde introduzimos os ângulos ressonantes (críticos):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{p+q}{q}\lambda_2 - \frac{p}{q}\lambda_1 - \varpi_1,\\ \sigma_2 &= \frac{p+q}{q}\lambda_2 - \frac{p}{q}\lambda_1 - \varpi_2.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Os novos pares ação-ângulo para o sistema de três corpos passam a ser Silva (2017):

$$\begin{aligned}&\lambda_1, && J_1 = L_1 + s\left(G_1^* + G_2^*\right),\\ &\lambda_2, && J_2 = L_2 - (1+r)\left(K_1 + K_2\right),\\ &\sigma_1, && K_1 = G_1^* = L_1^* - G_1^*,\\ &\sigma_2, && K_2 = L_2^* - G_2^*.\end{aligned} \tag{4.31}$$

O comportamento dos σ_j fornece a localização dos pares com respeito a ressonância: se pelo menos um deles librar, é por que o par está em MMR (Michtchenko et al., 2006).

Aplicando-se a transformação proposta em 4.29, ao argumento do Hamiltoninano H_1 expresso em 4.28, teremos que:

$$\phi = m\sigma_1 - n\sigma_2 + k\left(\sigma_2 - \sigma_1\right) + \left[m\left(p+q\right) - np\right]Q, \tag{4.32}$$

onde $Q = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{q}$ é o "ângulo sinódico" (Beaugé e Michtchenko, 2003).

Se escrevermos o Hamiltoniano em termos das variáveis ressonantes, as longitudes médias (λ_j), separadamente, serão ângulos cíclicos, de modo que as ações conjugadas a elas (J_j), serão integrais de movimento (Beaugé e Michtchenko, 2003; Silva, 2017). Teremos então, a partir Eq. (4.31):

$$\begin{aligned}J_1 &= L_1 + r\left(K_1 + K_2\right) = cte,\\ J_2 &= L_2 - (1+r)\left(K_1 + K_2\right) = cte.\end{aligned} \tag{4.33}$$

onde $r = \dfrac{p}{q}$.

A combinação linear destas duas ações resultará numa outra constante de movimento, $\mathcal{K}$, denominada *fator de espaçamento* (Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001):

$$(1+r)\,L_1 + rL_2 = (1+r)\,J_1 + rJ_2 = \mathcal{K} = cte. \tag{4.34}$$

Analisando mais uma vez para a Eq. (4.32), perceberemos que todos os termos periódicos da função perturbadora, são na realidade dependentes apenas de $(\sigma_1, \sigma_2, \lambda_1 - \lambda_2)$, de modo que o momento canônico associado à variável angular $\lambda_1+\lambda_2$ é uma constante de movimento para o problema de três corpos interagindo gravitacionalmente, portanto:

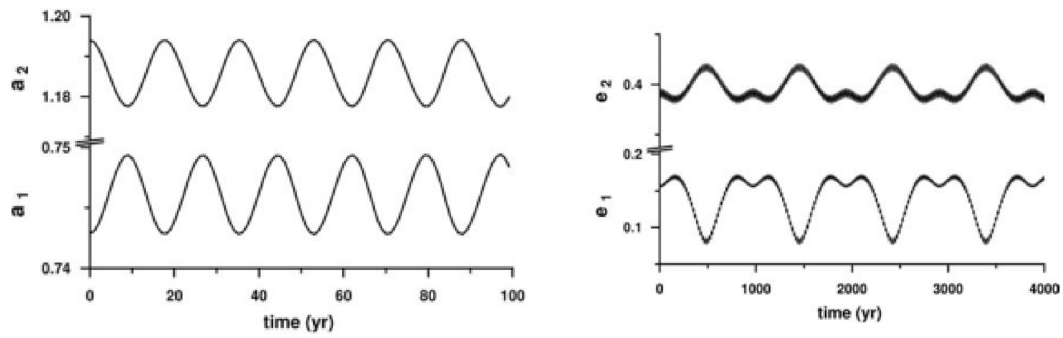
$$J_1 + J_2 = J_{total} = cte. \tag{4.35}$$

Portanto, nos sistemas ressonantes, há vínculos nas variações das excentricidades e dos semieixos, com os semieixos variando em oposição de fase devido à conservação de $\mathcal{K}$.

Na tabela 4.2, temos os dados dos exoplanetas HD 82943 b e HD 82943 c,que se encontram na ressonância 2/1. Este sistema foi primeiramente estudado por Mayor et al. (2004). Em estudo posterior, Ferraz-Mello et al. (2005) apresentaram valores dos elementos orbitais e da massa dos exoplanetas HD 82943 b,c mais refinados, com base em simulações numéricas e análise estatística.

Tabela 4.2 - Dados dos exoplanetas do sistema HD 82943 - Fit B de Ferraz-Mello et al. (2005)

Nome	$m \sin i$ $[M_{Jup}]$	a [U.A]	e	i [°]	M[°]	ω[°]	Ω[°]
HD 82943 b	1.82	1.180	0.396	0.0	0.0	0.0	0.0
HD 82943 c	1.71	0.746	0.153	0.0	0.0	0.0	0.0



(a) (b)

Figura 4.4: Evolução de curto período dos semieixos (a) e excentricidades (b) para o sistema HD 82943, com condições iniciais dadas pelo Fit B, em Ferraz-Mello et al. (2005). Figura: Michtchenko et al. (2008)

Na Fig.(4.4) tem-se representada a evolução dos semeixos (painel a) e das excentricidades (painel b) para o sistema HD 82943 (Fit B, Ferraz-Mello et al. (2005)), onde podemos observar claramente o movimento em antifase dos semieixos.

Por fim, podemos reduzir mais um grau de liberdade do sistema, levando em consideração que a frequência do ângulo sinódico, nas vizinhanças da comensurabilidade, é muito maior que a frequência dos ângulos críticos. Se eliminarmos então os termos de curto período (ângulo sinódico) e escrevermos o potencial perturbador em termos dos ângulos ressonantes, o sistema, outrora com 4 graus de liberdade, passa a ter dois graus de liberdade $(\sigma_1, \sigma_2\ , K_1, K_2)$, com os outros dois vinculados através das constantes J_{total} e $\mathcal{K}$.

4.4 *Sistemas quase ressonantes*

Sistemas quase ressonantes são uma classe especial de sistemas formados por pares de planetas cujas razões entre os movimentos médios (períodos) os colocam fora das ressonâncias importantes, porém, próximas delas, preservando assim algumas características dos sistemas ressonantes Ferraz-Mello et al. (2005b).

O sistema Júpiter-Saturno é um exemplo clássico de planetas em quase ressonância, apresentando comensurabilidades de movimentos médios de terceira ordem (5/2) e de toda sua complexidade.

Neste sistema os ângulos críticos σ_1 e σ_2 apresentam uma circulação retrógrada longe da ressonância 5/2, existindo no espaço de fase os dois modos normais do ângulo secular $\Delta\varpi$ (Modo I, oscilação de $\Delta\varpi$ em torno de 0°; Modo II, oscilação de $\Delta\varpi$ em torno de 180°). Entre estes dois modos, $\Delta\varpi$ circula.

A quase ressonância é caracterizada principalmente pela existência de um regime de movimento no qual os ângulos críticos σ_1 e σ_2 circulam na direção progressiva. A interação dos planetas nesta situação é dominada pelas perturbações seculares mútuas entre os planetas (Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001).

Capítulo 5

Os bancos de dados

O catálogo construído neste trabalho deriva das bases de dados Exoplanet Data Explorer acessada via endereço *http://exoplanets.org/* e Nasa Exoplanet Archive acessada via endereço *https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/index.html* (Fig. **??** *a* e *b*, respectivamente). Nos próprios *sites* é possível filtrar quais as informações desejadas dos exoplanetas e fazer o download dos dados em um arquivo de extensão *.csv*.

Após realizado o download, estes dados passaram por uma primeira organização, onde os sistemas constituídos por uma estrela central e os exoplanetas que a orbitam foram, cada um, colocados em ordem decrescente de períodos orbitais.

Um programa, em linguagem Fortran (Apêndice A) foi então escrito, com a finalidade de separar os exoplanetas vizinhos e a estrela hospedeira do sistema no que convencionou-se, neste trabalho, chamar de **objetos**. A ideia é estudar cada sistema exoplanetário a partir da análise destes objetos.

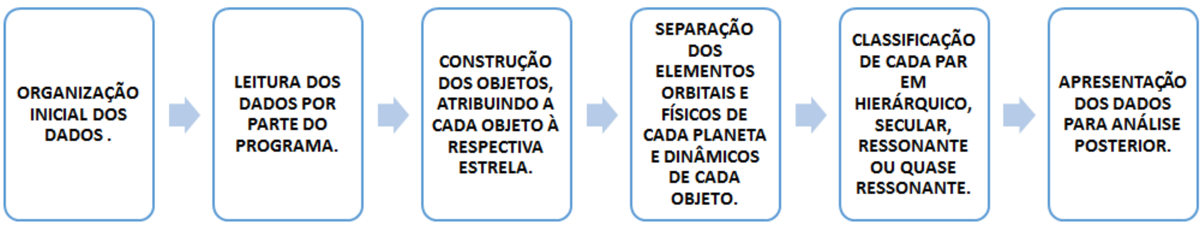


Figura 5.1: Diagrama de atividades desenvolvidas para separação dos objetos com os respectivos elementos orbitais parâmetros físicos para cada exoplaneta e construção dos parâmetros dinâmicos.

Após separados, eram atribuídos para os planetas de cada objeto seus elementos físicos e orbitais lidos a partir das bases de dados.

Passa-se então à obtenção dos parâmetros dinâmicos de cada objeto (*e.g.* soma das massas, razão das massas, razão dos períodos, entre outros). Como estes parâmetros são construídos a partir das informações dos dois planetas de cada objeto, quando algum dos valores não era informado na base de dados, nem podia ser inferido teoricamente, o objeto era excluído da distribuição.

Por fim, as informações com dos parâmetros físicos, orbitais e dinâmicos dos objetos são então salvos em arquivos com *.dat*, que eran utilizados na construção dos gráficos de cada distribuição.

Na Fig. (5.2) tem-se o *print* do site exoplanet.org, onde está uma das bases de dados utilizadas neste trabalho (Wright et al., 2011).

Exoplanets Data Explorer Table Plots Send data reports to: datamaster@exoplanets.org and bug reports to: webmaster@exoplanets.org

Systems with 3 or more planets | Orbit Database Kepler Other | Filter: NCOMP >= 2

Name	Components	Msin(i) mjupiter ±	Semi-Major Axis au ±	Orbital Period day ±	Orbital Eccentricity ±	ω deg ±	Time of Periastron jd ±	Velocity Semiamplitude m/s ±
24 Sex b	2	1.84	1.412	455.2	0.184	227	2454758	33.2
24 Sex c	2	1.52	2.240	910	0.412	352.0	2454941	23.5
47 UMa b	2	2.546	2.101	1078.0	0.032	334	2451917	48.40
47 UMa c	2	0.546	3.57	2391	0.098	300	2452440	8.0
55 Cnc b	5	0.801	0.1134	14.65100	0.0040	110	2453035.0	71.11
55 Cnc c	5	0.1646	0.2373	44.3800	0.070	356	2453083.0	10.12
55 Cnc d	5	3.54	5.475	4909	0.0200	254	2453490	45.20
55 Cnc e	5	0.0262	0.01544	0.7365460	0	90	2455568.0110	6.30
55 Cnc f	5	0.173	0.774	261.20	0.320	139.0	2450080.9	6.20

Figura 5.2: *Print* do *site* da base de dados Exoplanet.org .

Na Fig. (5.3) tem-se o *print* do site exoplanetarchive.ipac.caltech.edu, onde está a outra base de dados utilizada neste trabalho.

NASA EXOPLANET SCIENCE INSTITUTE

Home About Us Data Tools Support Login

Select Columns Download Table Plot Table View Documentation User Preferences

Confirmed Planets

Host Name	Planet Letter	Planet Name	Discovery Method	Controversial Flag	Number of Planets in System	Orbital Period [days]
					>=2	
24 Sex	b	24 Sex b	Radial Velocity	0	2	$452.8^{+2.1}_{-4.5}$
24 Sex	c	24 Sex c	Radial Velocity	0	2	$883.0^{+32.4}_{-13.8}$
47 UMa	b	47 UMa b	Radial Velocity	0	3	1078±2
47 UMa	c	47 UMa c	Radial Velocity	0	3	2391^{+100}_{-87}
47 UMa	d	47 UMa d	Radial Velocity	0	3	14002^{+4018}_{-5095}

Figura 5.3: *Print* do *site* da base de dados NASA Exoplanet Archive.

Em ambas plataformas é possível utilizar filtros simples para a classificação dos exoplanetas.

A primeira seleção dos exoplanetas foi feita baseada primeiramente em dois critérios simples:

1. *Satus* de confirmado;

2. Membros de sistemas com dois ou mais exoplanetas;

Passada a primeira seleção foram colhidos os dados relativos aos seguintes parâmetros orbitais (dos exoplanetas) e físicos (dos exoplanetas e estrelas hospedeiras):

Orbitais: semieixo maior (a), período (P), excentricidade (e), inclinação (i), argumento do pericentro (ω), longitude do nodo ascendente (Ω) e tempo de passagem pelo periastro (T_0).

Físicos: massa do planeta (m_p), raio do planeta (r_p), massa da estrela central ($M_\star$), raio da estrela ($R_\star$), temperatura efetiva da estrela (T_{eff}) e metalicidade (Fe/H).

A partir dos parâmetros físicos e orbitais, foram construídos parâmetros dinâmicos importantes para a análise do comportamento dinâmico dos sistemas:

Dinâmicos: razão dos semieixos de exoplanetas consecutivos $\left(\frac{a_j}{a_{j-1}}\right)$, razão das massas de exoplanetas consecutivos $\left(\frac{m_{j-1}}{m_j}\right)$, soma das massas de exoplanetas consecutivos ($m_{j-1} + m_j$), diferença dos argumentos dos pericentros de exoplanetas consecutivos $\Delta\varpi = (\varpi_1 - \varpi_2)$, Raio de Hill ($R_H$), razão dos movimentos médios de exoplanetas consecutivos $\left(\frac{n_j}{n_{j-1}}\right)$ e os ângulos críticos (σ_j).

5.1 *Estimativas para as grandezas não fornecidas nos bancos de dados*

Por limitações observacionais, nem todos os parâmetros orbitais e/ou físicos dos exoplanetas, podem ter seu valor calculado de maneira confiável, de modo que, neste trabalho, foram utilizdas algumas regras para estimativas dos valores destes parâmetros.

5.1.1 *Semieixos*

No caso dos semieixos, quando os períodos e um outro semieixo de um exoplaneta do sistema era fornecido, foram calculados via Terceira Lei de Kepler.

5.1.2 Massas

A despeito da massa dos exoplanetas ser uma grandeza chave no estudo do comportamento dinâmico dos sistemas, as bases de dados utilizadas neste trabalho não contem informações precisas quanto a este parâmetro para a maioria dos exoplanetas descobertos através da técnica de trânsito planetário, frutos das missões *Kepler*.

Desta forma, estimativas para as massas dos exoplanetas são obtidas através do estudo da influência gravitacional destes corpos, refletida na estrela (com a medida da velocidade radial), ou refletida nos outros corpos do sistema (através da medida das variações nos tempos de trânsito- TTV), (Beaugé et al., 2012). Como para obter estas estimativas são necessários longos perídos de *follow up* dos sistemas exoplanetários a partir de telescópios munidos de interferômetros e baseados em Terra capazes de medir as tênues variações nos espectros das estrelas hospedeiras do sistema, informações sobre as massas dos exoplanetas tornam-se um parâmetro, na maioria das vezes, desconhecido nas pesquisas sobre mecânica celeste.

Em princípio, este problema poderia ser contornado, desde que se conhecesse uma função que relacionasse, idealmente de maneira unívoca, a massa de um exoplaneta a alguma outra grandeza que pudesse ser medida, se não diretamente, pelo menos de uma maneira mais precisa. No caso dos exoplanetas $Kepler$ e $K2$, uma escolha natural seria o raio do exoplaneta, que pode ser diretamente inferido a partir da "profundidade da curva de luz"(Perryman, 2011).

Todavia, o que diversos trabalhos tem mostrado, é que tal relação simples pode não ser facilmente encontrada, já que depende de diversos parâmetros físicos e composicionais, geralmente desconhecidos(Lissauer et al., 2011; Swift et al., 2012; Weiss e Marcy, 2014; Bashi et al., 2017; Mills e Mazeh, 2017).

De fato, Bashi et al. (2017), após analisar uma amostra de 274 exoplanetas, tirados da base de dados contida no site *http://exoplanets.org* (março de 2016), mostraram que existem dois regimes distintos para a relação massa-raio, com a transição entre um regime e outro ocorrendo para os valores $124.0 \pm 7\ M_{\oplus}$ e $12.1 \pm 0.5\ R_{\oplus}$.

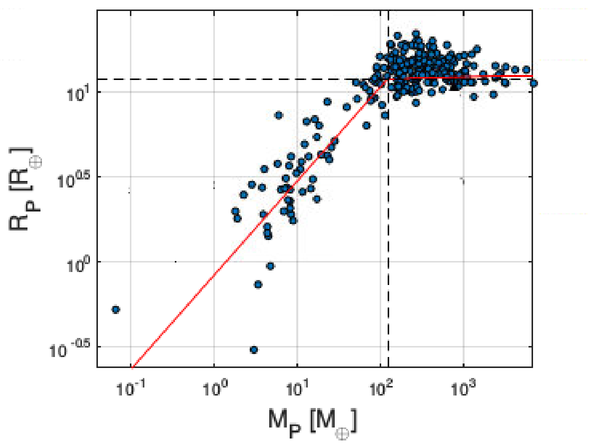


Figura 5.4: Os círculos representam cada exoplaneta da amostra utilizada em Bashi et al. (2017). Figura adaptada de Bashi et al. (2017)

Como podemos perceber a partir da Fig. (5.4), os dois regimes tornam-se evidentes. Os exoplanetas, sistematicamente, apresentam massas observadas maiores do que as massas calculadas pela relação encontrada no trabalho em questão.

Ramos et al. (2016), a partir da análise de um conjunto de exoplanetas confirmados, dentro das ressonâncias 2/1 e 3/2, encontraram que a massa e o raio de um exoplaneta, podem ser correlacionados à massa e ao raio da Terra, segundo a função:

$$\log\left(\frac{m_p}{m_\oplus}\right) \approx \begin{cases} 0.60 + 0.92\log\left(\dfrac{R_p}{R_\oplus}\right) & se \quad R \leq 3.8R_\oplus \\ -0.13 + 2.18\log\left(\dfrac{R_p}{R_\oplus}\right) & se \quad R > 3.8R_\oplus. \end{cases} \tag{5.1}$$

Como podemos perceber, há dois regimes distintos, com a transição ocorrendo, em $R_p = 3.8\ R_\oplus$.

Já Lissauer et al. (2011), ao estudarem a possível composição química dos exoplanetas do sistema Kepler-11, encontraram uma lei de potência que relaciona a massa e o raio de um exoplaneta (M_p e R_p, respectivamente) á massa e ao raio da Terra ($M_\oplus$ e $R_\oplus$, respectivamente):

$$M_p = \left(\frac{R_p}{R_\oplus}\right)^{2.06} M_\oplus \tag{5.2}$$

Na Fig.(5.5), temos a distribuição dos raios dos exoplanetas do sistema Kepler-11 (marcados pelas letras *b,c,d,e,f*, além de Vênus (V), Terra (E), Urano (U) e Netuno (N) em função de suas massas, em unidades de massas terrestres ($M_\oplus$). As curvas representam diferentes composições planetárias e as cores obedecem à escala na direita do gráfico, indicando a temperatura efetiva dos planetas.

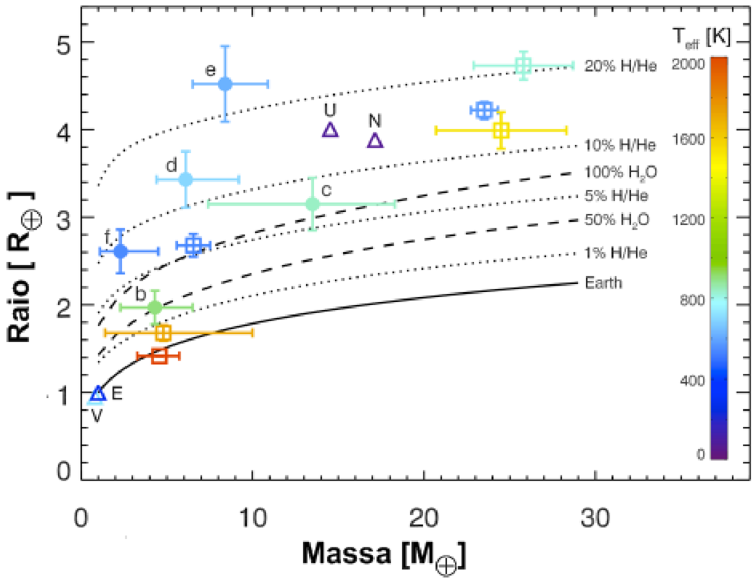


Figura 5.5: Relação Massa-Raio representada pelas linhas contínuas, tracejadas e pontilhadas, de acordo com cada composição. Os círculos representam os exoplanetas do sistema Kepler-11, enquanto os triângulos representam os planetas do Sistema Solar (E - Terra;V - Vênus; U - Urano e N - Netuno).Figura adaptada de Lissauer et al. (2011).

A tabela (5.1) apresenta uma comparação entre as massas observadas para os planetas e planetas-anões do Sistema Solar e as massas calculadas via Eq. (5.2)

Tabela 5.1 - Comparação entre as massa observadas para objetos do Sistema Solar e as preditas pela Eq. 5.2

Planeta	R - Equatorial a 1 atm [$R_\oplus$]	Massa[$m_\oplus$]	Massa Caculada[$m_\oplus$]	O-C
Mercúrio	0.383	0.0553	0.14	−0.08
Vênus	0.949	0.815	0.90	−0.08
Terra	1.00	1.00	1.00	0.0
Marte	0.532	0.107	0.027	−0.17
Júpiter	11.209	317.83	145.25	172.58
Saturno	9.449	95.16	102.16	−6.56
Urano	4.007	14.54	17.45	−2.91
Netuno	3.883	17.15	16.36	0.794
Plutão	0.186	0.0022	0.031	−0.03
Ceres	0.075	0.00016	0.0048	−0.0047

Como pode-se verificar a partir da tabela (5.1), as massas calculadas são sistematicamente maiores que as massas observadas.

A fim de confirmar a validade da Eq. (5.2) na estimativa das massas, aplicou-se o teste de correlação ρ de Pearson, obtendo-se $\rho \approx 0.94$, para a correlação entre as massas calculada e observada para a amostra de Planetas/Planetas-Anões da tabela (5.1). A massa calculada de Urano é superestimada (17.45 $M_{\oplus}$ contra 14.54 $M_{\oplus}$), enquanto que a massa de Netuno é subestimada (16.36 $M_{\oplus}$ contra 17.15 $M_{\oplus}$).

Ao excluirmos Saturno e Júpiter da nossa amostra, obtemos $\rho \approx 0.99$, uma correlação positiva muito mais forte.

Deste modo, baseando-se neste teste, optou-se utilizar, como estimativa da massa dos exoplanetas, a relação de Lissauer et al. (2011).

Deve-se salientar contudo que há muita incerteza em tal determinação (ou em qualquer outras que pudéssemos escolher), já que os processos físicos envolvidos na formação e composição dos exoplanetas ainda são bastante desconhecidos.

5.1.3 Longitude do argumento do pericentro

Para os argumentos dos pericentros não determinados, seguiu-se Wright et al. (2011), atribuindo-se o valor $\Omega_j = 90°$. Como para todos os exoplanetas da amostra, excetuando-se os do sistema HR 8799, tem-se $\Omega_j = 0°$, o valor da longitude do pericentro (ϖ_j) se confunde com o valor do argumento do pericentro (ω_j).

5.2 Sistemas e exoplanetas retirados da amostra

Com o objetivo de tornar o catálogo construído o mais confiável possível, alguns exoplanetas e sistemas exoplanetários, apesar de constantes nas bases de dados, não foram incluídos neste trabalho, pois não havia informaçsobre a maioria dos valores de seus elementos orbitais e/ou físicos, tornando impraticáveis quaisquer análises.

Capítulo 6

Distribuições dos Parâmetros Físicos e Orbitais dos Objetos

Neste capítulo apresentaremos as distribuições dos exoplanetas, objetos e estrelas hospedeiras dos sistemas em diversos planos paramétricos.

O objetivo principal destes diagramas é dar uma ideia, bastante geral, das propriedades destes objetos, servindo como base para estudos na área de dinâmica planetária.

Para isto, realizaremos análises a partir do catálogo criado com as informações das bases de dados. Após sucessivos processos de escolha e exclusões, baseados em critérios que tornassem possíveis as análises do comportamento dinâmico do sistema, foram selecionados 1457 exoplanetas, membros de 574 sistemas multiplanetários, formando um total de 683 objetos.

Dos exoplanetas selecionados, 1131 foram descobertos pela técnica de trânsito planetário, 312 pela técnica de velocidade radial, 2 pela técnica de Tempo de Variação do Trânsito (T.T.V - na sigla em inglês), 2 por Lentes Gravitacionais e 6 pela técnica de Tempo de Variação do Eclipse (E.T.V).

Cada um dos objetos (constituídos por dois planetas mais a estrela central), como já mencionado, foi classificado de acordo com a razão dos movimentos médios dos planetas em: hierárquicos, seculares, ressonantes e quase ressonantes.

Nas próximas seções, cada uma das distribuições obtidas serão apresentadas, com suas principais características ressaltadas e, quando possível explicadas com base nas teorias existentes.

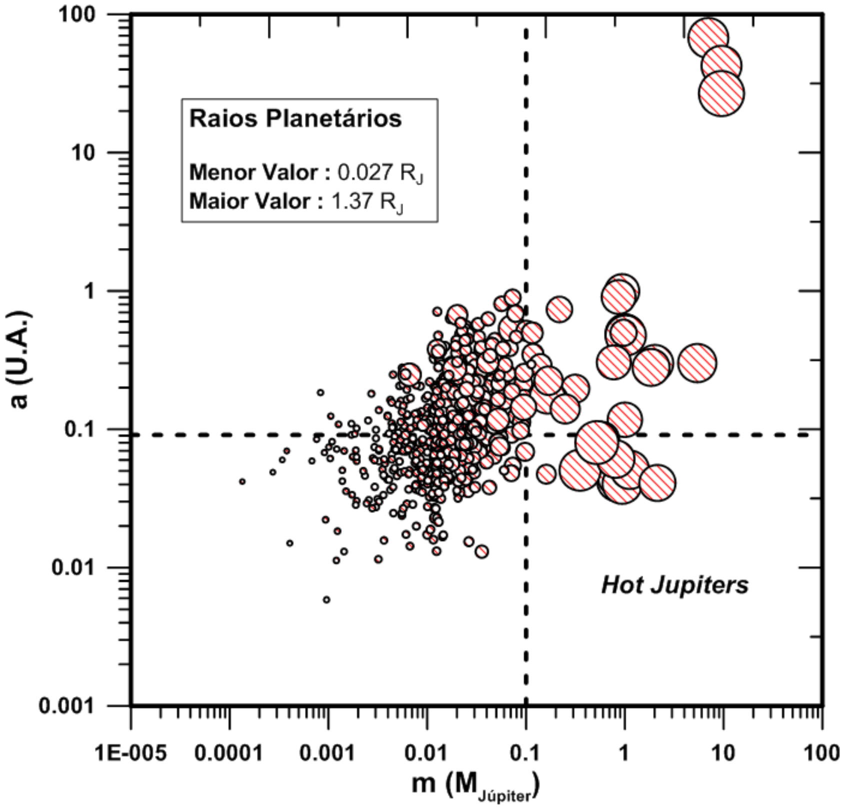


Figura 6.1: Distribuição dos semieixos em função das massas dos exoplanetas da amostra. O diâmetro de cada circunferência é proporcional ao raio dos exoplanetas, medidos em R_J.

Na Fig.(6.1) temos a distribuição dos semieixos em função das massas dos exoplanetas da base de dados. Percebe-se uma notável mudança de regime nesta distribuição a partir de $m \approx 0.1\ M_J$: enquanto há uma quantidade muito maior de exoplanetas com massas menores do que aproximadamente 10% da massa de Júpiter e localizados em órbitas bastante próximas ($a < 0.1\ U.A$) das estrelas hospedeiras dos sistemas, a quantidade de exoplanetas com massas maiores do que um décimo da massa de Júpiter, em órbitas $a > 0.1\ U.A.$ é bem menor.

As atuais teorias de formação planetária, colocam estes gigantes em órbitas originalmente afastadas de suas estrelas, com posterior migração para órbitas mais internas, devido principalmente a interações disco-planeta, ejeção de planetisimais e forças de maré (Heller (2018); Tadeu dos Santos et al. (2015), entre outros).

Uma pequena parcela dos exoplanetas do catálogo se enquadra na categoria de Hot Jupiters: exoplanetas cujos semieixos são menores do que 0.1 $U.A$ e cujas massas são pelo menos 0.1 M_J. Como mostrado por Wang et al. (2015), esta fração pode ser pelo menos 12.8% maior do que o apresentado nas bases de dados para os planetas *Kepler*, já que parâmetros como a multiplicidade estelar e a idade da estrela podem interferir na detecção de *Hot Jupiters*.

6.1 Distribuições das excentricidades dos exoplanetas do catálogo

Nesta seção apresentaremos as distribuições da maior excentricidade de cada par, em termos da razão dos movimentos médios dos exoplanetas que os constituem. A excentricidade é um parâmetro chave no estudo dos sistemas exoplanetários pois pode nos fornecer indícios sobre a história dinâmica dos sistemas.

Como evidenciado em diversos trabalhos(Michtchenko e Malhotra (2004); Michtchenko et al. (2008); Alves et al. (2016), entre outros), a própria topologia do espaço de fases é determinada pelo valor das excentricidades.

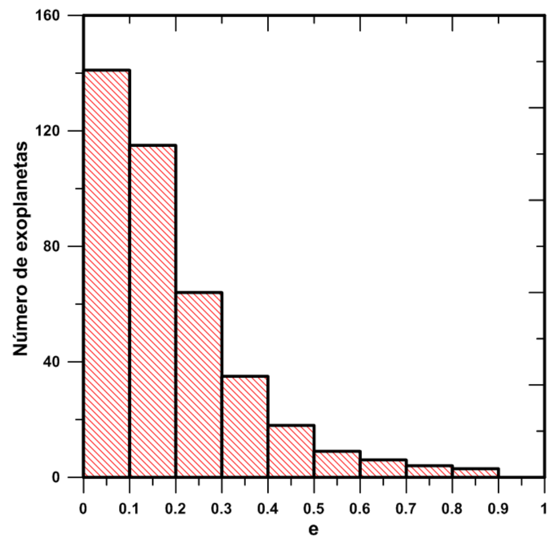


Figura 6.2: Histograma das excentricidades para os exoplanetas do catálogo. O número reduzido da amostra deve-se ao grande número de exoplanetas com excentricidade não determinada.

Como podemos observar na Fig.(6.2), há um número elevado de exoplanetas cujas órbitas são bastante excêntricas ($e > 0.2$), quando comparadas às dos planetas do sistema solar, cuja maior excentricidade, é a de Mercúrio ($e_{Mercurio} \approx 0.2$).

A partir da Fig.(6.3) pode-se notar um número elevado de exoplanetas cujas órbitas, em princípio, tem excentricidades nulas, no entanto, esta informação não necessariamente é real, pois a determinação da excentricidade depende de relações entre outros parâmetros que, por vezes, não possuem valores bem mensurados ou calculados, de modo que, por simplicidade e com base em critérios de estabilidade, considera-se a órbita circular (*e.g.*

Alonso et al. (2014)).

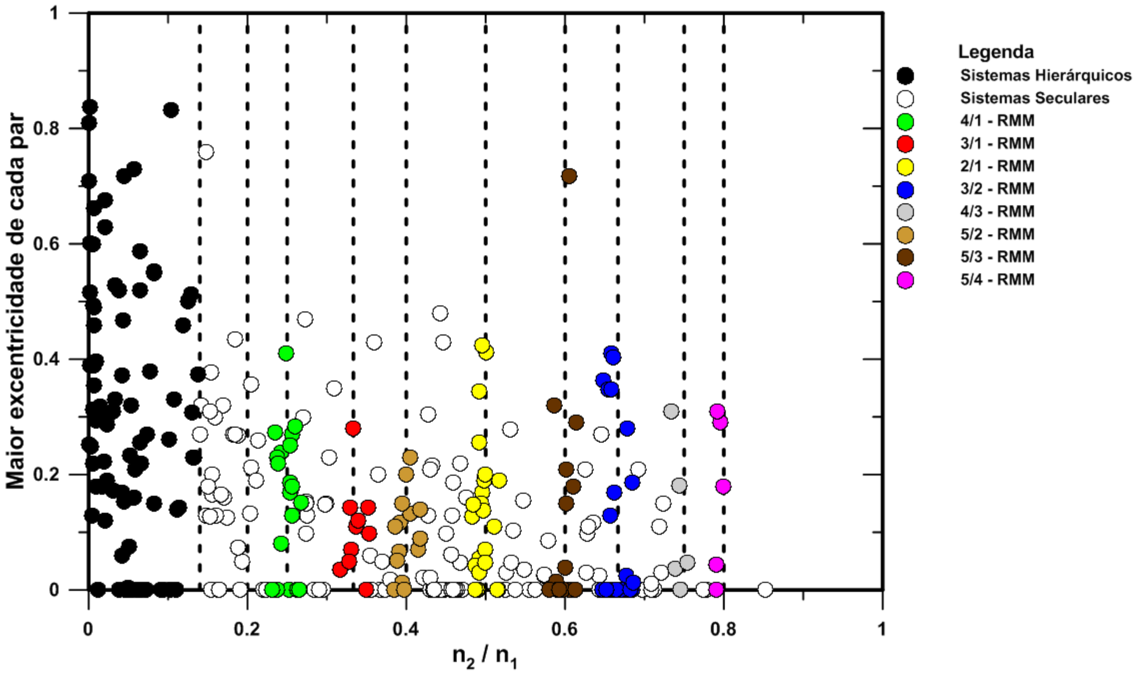


Figura 6.3: Distribuição da excentricidade mais alta de cada par (objeto), em função da razão dos movimentos médios. Todos os objetos em que a excentricidade de ambos os exoplanetas é informada em um das duas bases de dados. As distribuições para cada RMM encontram-se no Apêndice B.

Na Fig.(6.3), apresenta-se a distribuição das maiores excentricidades de cada objeto em termos da razão dos movimentos médios dos exoplanetas.

Uma característica evidente nas distribuições é que objetos com órbitas mais excêntricas, estão localizados, preferencialmente, próximos a ressonâncias de movimentos médios, que atuam como mecanismos de proteção.

Duas exceções claras são os objetos hierárquicos e os seculares, que apresentam excentricidades relativamente elevadas. Este é um ponto que merece um estudo mais profundo, já que as atuais teorias não dão conta de uma explicação clara do fenômeno.

Nos painéis do Apêndice B foram colocadas as barras de erro para os valores das maiores excentricidades de cada par (fornecidas nas bases de dados) e para as RMM, obtidas via propagação de erros. A linha tracejada marca a posição exata de cada ressonância.

6.2 Distribuição dos períodos

Uma das características mais notáveis dos sistemas exoplanetários é a recorrente proximidade das órbitas com relação à estrela central, quando comparamos estes sistemas ao nosso Sistema Solar.

Na Fig. (6.4) temos a distribuição dos maior período de cada objeto em função da razão dos movimentos médios. Cada cor representa uma ressonância diferente. As linhas tracejadas verticais representam a localização exata de cada ressonância.

Ao analisar-se a Fig. (6.4), uma característica notável dos sistemas exoplanetários se apresenta: um número considerável de planetas com períodos menores que 100 dias.

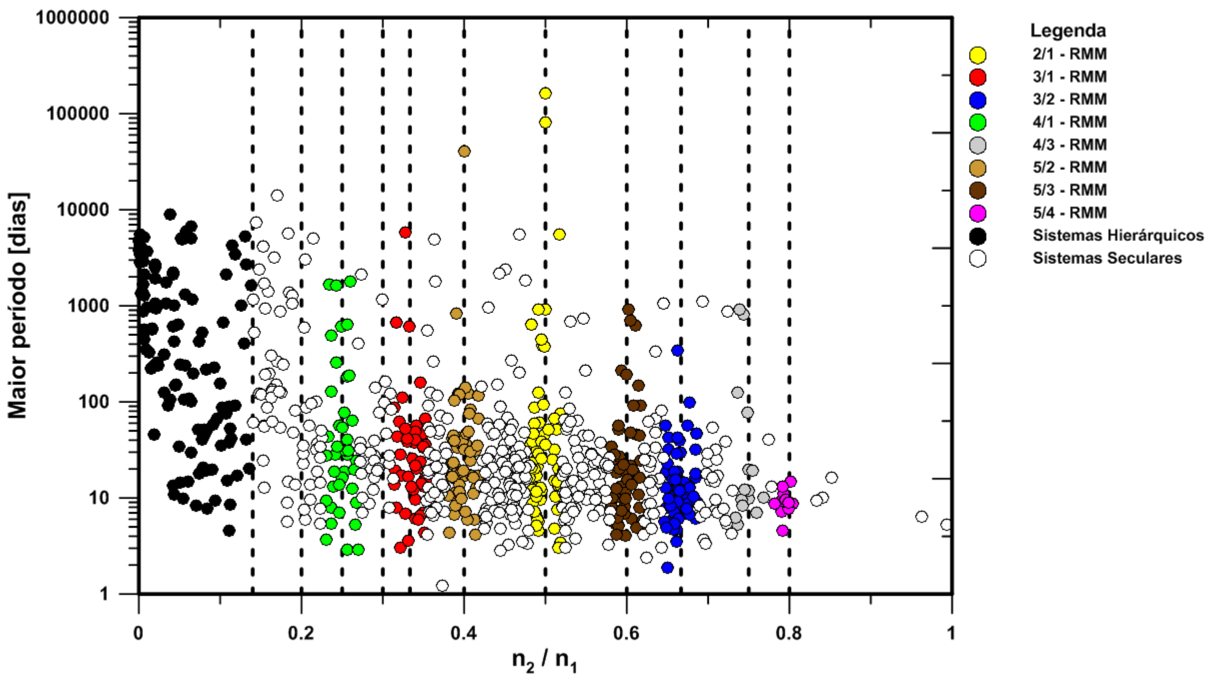


Figura 6.4: Distribuição dos maiores períodos de cada par de exoplanetas em função das razões de movimentos médios. As linhas pretas tracejadas mostram a localização exata das ressonâncias. Os painéis com as demais distribuições encontram-se no Apêndice (C)

Pode-se observar, também, ao analisar-se em conjunto as Figuras (6.1) e (6.4) que há um grande número de pares com exoplanetas em órbitas bem próximas à estrela central nos quais pelo menos um dos exoplanetas é um gigante.

Para algumas razões de movimentos médios, como podemos observar na Fig. (6.4), parece haver um comportamento interessante: quanto mais afastados um dos membros dos objetos estão das estrelas centrais, mais próximos à ressonância estão.

Pode-se "medir" a proximidade da ressonância pode ser a partir da diferença entre o valor nominal da razão dos movimentos médios (do mesmo modo, razão dos períodos) e o valor observado de razão. Esta grandeza é chamada de *offset* da ressonância e assim calculada:

$$\Delta_{(p+q/p)} = \frac{P_2}{P_1} - \frac{p+q}{p}, \tag{6.1}$$

onde $(p+q)/p$ é o valor nominal da ressonância, com p e q sendo números inteiros, enquanto que P_2/P_1 é a razão observada dos períodos dos exoplanetas que compõe cada objeto.

Ramos et al. (2016) mostraram, pelo menos nos casos das ressonâncias de primeira ordem 2/1 e 3/2, que estes resultados são esperados, desde que os pares tenham alcançado a comensurabilidade através de uma migração lenta e suave, em um disco laminar.

No Apendice (C), a linha tracejada vertical em cada painel representa a posição exata das ressonâncias. Os erros nos períodos foram obtidos a partir dos valores informados nas bases de dados, enquanto os erros nas razões de movimento médio foram obtidos a partir das fórmulas de propagação de erros.

Pode-se perceber também analisando-se o Apêndice que os pares localizados nas (ou próximo das) ressonâncias 2/1, 3/2 e 5/4 possuem, sistematicamente, valores de n_2/n_1 menores do que os valores nominais, ou seja, $\Delta_{(p+q/p)} < 0$. Já para as demais razões de movimentos médios, percebe-se uma distribuição mais ou menos uniforme entre valores e menores que o valor nominal.

6.3 *Metalicidade da estrela central*

A abundância de metais (elementos mais pesados que o Hélio) é um importante parâmetro da composição química de uma estrela. A abundância de Ferro ($[Fe/H]$), por exemplo, é frequentemente utilizada no estudo da formação de sistemas exoplanetários.

A metalicidade de uma estrela, $[Fe/H]_\star$, é calculada a partir da relação:

$$[Fe/H]_\star = \log \frac{(Fe/H)_\star}{(Fe/H)_\odot}, \tag{6.2}$$

onde $(Fe/H)_\odot$ é a abundância de Fe no Sol.

Estrelas com abundâncias químicas iguais à $(Fe/H)_\odot$ terão $[Fe/H]_\star = 0$, aquelas com fração de Ferro maior, terão $[Fe/H]_\star > 0$ e aquelas com fração de Ferro menor, terão $[Fe/H]_\star < 0$

Santos et al. (2001, 2005), entre outros, apontaram que há um perceptível aumento na metalicidade, em estrelas que abrigam sistemas planetários, especificamente com planetas gigantes. Em outro estudo Fischer e Valenti (2005) obtiveram uma incidência de exoplanetas menor do que 3% para estrelas com $[Fe/H] < -0.5$ e de 25% para estrelas com $[Fe/H] > 0.5$.

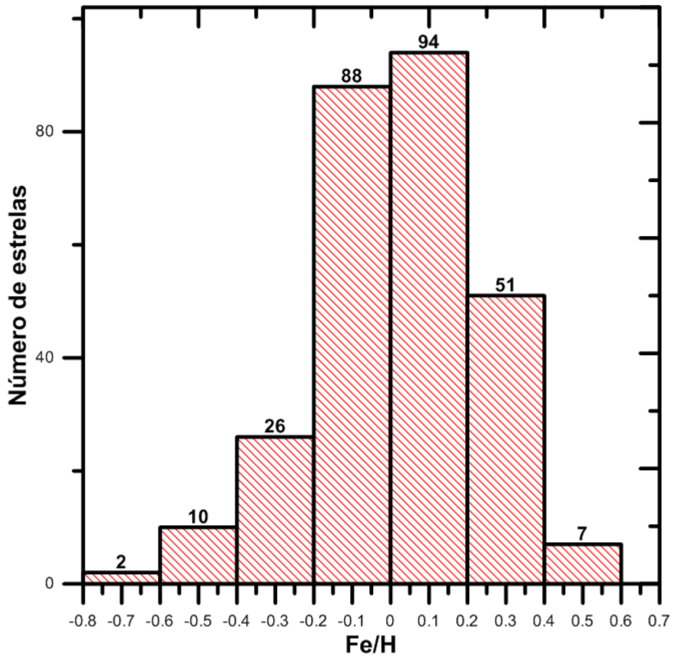


Figura 6.5: Histograma das metalicidades das estrelas de cada objeto.

Na Fig.(6.5) percebe-se que as estrelas da amostra, em sua maioria, são enriquecidas em metais, possuindo uma metalicidade média em torno do valor $[Fe/H] \approx 0.022$.

Existem duas maneiras de se explicar estas variações em metalicidade nas estrelas hospedeiras (Perryman, 2011) : I - Alta abundância primordial no disco protoestelar; II - Captura de material enriquecido.

No cenário I, a estrela é formada a partir de uma nuvem molecular já rica em metais. Neste caso, a probablidade de formação de exoplanetas gigantes torna-se maior já que há proporcionalmente mais partículas de poeira do que de gás, o que facilita a condensação com posterior acreção acelerada (quando o núcleo atinge uma massa crítica $M \sim 10\ M_{\oplus}$), antes do disco gasoso se dissipar. Este mecanismo de formação é muito mais sensível à metalicidade que que aquele devido às instabilidades gravitacionais no disco protoplanetário.

Realizando uma análise da probabilidade da formação de um planeta gigante gasoso ao redor de uma estrela do tipo F, G ou K, com período orbital menor do que 4 anos, Fischer e Valenti (2005) encontraram que quanto mais rico em $[Fe/H]$, for o meio protoestelar, maior será a probabilidade de se formar um planeta gigante gasoso.

No cenário II, a captura tardia de material enriquecido em metais, leva a uma "poluição" da camada convectiva da estrela. Este processo de captura pode ser explicado através da acreção de planetas que, ao interagirem com o disco protoplanetário ainda não dissipado, migraram para regiões gravitacionalmente instáveis, mais próximas à estrela. Um potencial exemplo deste processo de enriquecimento em metais devido a acreção de planetas, é a binária 16 *Cyg*, onde a estrela 16 *Cyg B* é orbitada por um planeta, o mesmo não ocorrendo com sua companheira, 16 *Cyg A* .

Como mostrado por diversos estudos, estrelas do tipo solar, com o passar do tempo, vão consumindo o Lítio através de processos de mistura, tornando-se assim, pobres com relação a este elemento. As abundâncias relativamente altas de *16 Cyg A* poderiam ser explicadas então pela acreção de corpos planetários, evento que também leva a entender por que apenas a estrela B do par exibe um exoplaneta: o possível corpo que orbitava sua irmã foi engolido (Melendez e Ramirez, 2016).

No caso das estrelas gêmeas solares que abrigam exoplanetas, o primeiro estágio de formação dos núcleos rochosos dos gigantes gasosos sequestra materiais refratários, fazendo com que a estrela tenha uma deficiência destes materiais(Chambers, 2010).

6.4 *Distribuição da Soma das Massas*

A soma das massas dos exoplanetas que constituem os objetos, é um importante parâmetro para a análise de sua estabalidade dinâmica, já que a intensidade da interação gravitacional entre os corpos é determinado primordialmente pela massa destes.

Se as massas ou as excentricidades planetárias são baixas, a magnitude da perturbação também permanece baixa, de modo que a zona de estabilidade será mais robusta.

Na Fig. (6.6) temos a distribuição da soma das massas (em M_J) em função da razão de movimentos médios. Cada círculo representa um par de exoplanetas vizinhos da amostra trabalhada. O raio de cada círculo é proporcional ao valor da maior excentricidade de cada par. As linhas tracejadas na vertical representam a posição exata de cada ressonância.

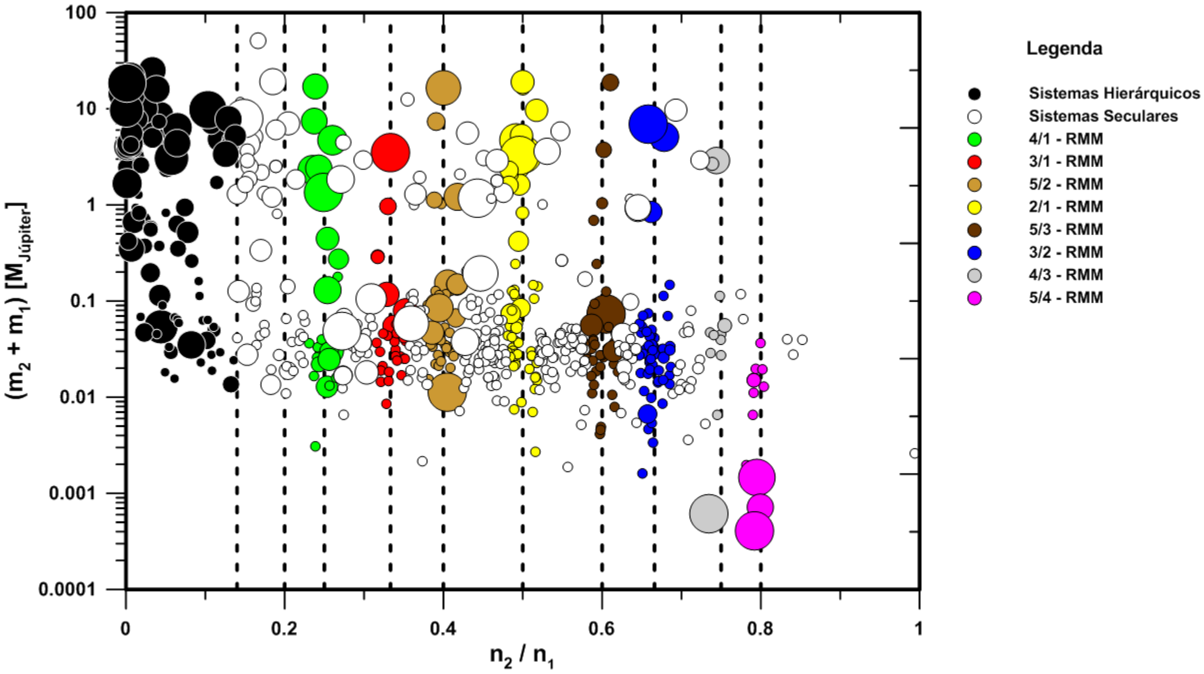


Figura 6.6: Distribuição dos pares planetários de acordo com a soma das massas e a razão do período orbital. A localização exata de algumas ressonâncias está representadas por linhas tracejadas verticais. O raio de cada círculo é proporcional à maior excentricidade do par de exoplanetas vizinhos. Os painéis com as demais distribuições encontram-se no Apêndice(D)

.

Como pode ser constatado a partir da Fig.(6.6), a maioria dos pares, cuja soma das massas é maior do que 1 M_J, estão localizados próximos a importantes ressonâncias de movimentos médios. Nestes casos, as combinações propícias dos ângulos no argumento da função perturbadora impedem *close approaches*, assim sendo as ressonâncias atuam como um mecanismo-protetor do sistema contra as perturbações mais intensas (Beaugé et al., 2012).

Pode-se notar também a partir da análise da Fig.(6.6) que a vasta maioria dos exoplanetas da amostra estão numa estreita faixa de soma das massas: $0.01\ M_J \leq (m_1 + m_2) \leq 0.1\ M_J$

No apêndice (D) temos as distribuições da soma das massas dos exoplanetas constituintes dos objetos, separados em painéis para cada ressonância principal, bem como o dos sistemas classificados em Seculares e Hierárquicos. Mais uma vez, a linha tracejada na horizontal representa a posição exata da ressonância. As barras de erro foram calculadas a partir das fórmulas de propagação de erros.

6.5 Migração Secular e Centros Estáveis

Uma das características mais notáveis de uma análise da estrutura dos sistemas extrassolares é a constatação da existência de planetas tão grandes quanto Júpiter, em órbitas extremamente próximas à estrela central.

Em princípio, duas explicações possíveis podem ser fornecidas: os exoplanetas se formaram na posição atual, *in situ* (Boley et al. (2016); Batygin et al. (2016), entre outros); ou os exoplanetas formaram-se longe de sua posição atual, vindo a migrar em seguida (Armitage e Rice, 2005).

Entre os diversos fenômenos físicos potencialmente responsáveis por induzir esta migração planetária podemos citar: (1) Interações do planeta com o disco protoplanetário de gás e/ou poeira; (2) Espalhamento gravitacional e "limpeza" dos planetesimais pelos exoplanetas; (3) Colisão direta entre os exoplanetas, e (4) Interações de maré entre a estrela central e o exoplaneta. Todos estes fenômenos manifestam-se como uma força dissipativa, responsável pela migração dos exoplanetas.

Ao passar por um destes eventos, os exoplanetas sofrem uma variação em sua energia orbital, o que leva a uma expansão (ou contração) da órbita de modo que se esta troca de energia ocorre de maneira lenta o suficiente, os planetas evoluem para configurações nas quais seus pericentros se alinham, de modo que o ângulo secular $\Delta\varpi$, oscile em torno de 0° (Modo I) - órbitas alinhadas -, ou em torno de 180° (Modo II) - órbitas ante-alinhadas. Estes comportamentos de $\Delta\varpi$ advém das soluções estacionárias do Hamiltoniano médio que descreve o problema de três corpos. Os domínios em torno dos centros estáveis são caracterizados pela estabilidade dos sistemas planetários que neles se encontram.

O centro em torno do qual o ângulo $\Delta\varpi$ irá oscilar de maneira estável é definido pela relação entre os déficits dos momentos angulares de cada planeta (I_j^*), assim definido (Michtchenko e Rodríguez, 2011):

$$I_j^* = \frac{AMD}{2}\,(1 + \cos\delta^*) \tag{6.3}$$

onde AMD é do Déficit de Momento Angular (Seção 4.2) e δ^* é o ângulo polar na "esfera de Pauwell", que é uma forma de representação do espaço de fases do problema planar de três corpos interagindo longe das ressonâncias principais.

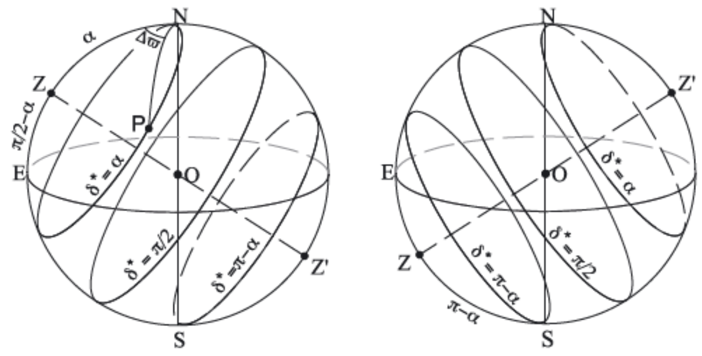


Figura 6.7: Separação dos modos de movimento do ângulo $\Delta\varpi$ sobre a esfera de Pauwels. Nas calotas esféricas definidas pelos círculos paralelos que passam pelos pólos N e S, $\Delta\varpi$ oscila. Quando o vértice é o Z, $\Delta\varpi$ oscila em torno de 0, já quando o vértice é Z', $\Delta\varpi$ oscila em torno de π. Na região entre os dois círculos paralelos, $\Delta\varpi$ circula. Figura:Michtchenko e Rodríguez (2011)

Na Fig. (6.7) o sistema de três corpos é caracterizado a partir do par de coordenadas esféricas $(\delta, \Delta\varpi)$. O ângulo δ^* na Eq. (6.3) é a distância de um ponto genérico P de coordenadas $(\delta, \Delta\varpi)$ ao pólo Z da esfera.

A interpretação dinâmica utilizando esta representação é simples, desde que, para um dado AMD, as soluções do problema planar de três corpos interagindo longe das ressonâncias, são curvas sobre a esfera correspondendo a pontos de mesma energia, no caso, os círculos paralelos (Michtchenko e Rodríguez, 2011).

Quando o sistema passa por um processo de migração lento o suficiente, o ângulo $\Delta\varpi$ é capturado em um dos centros estáveis (Modo I e Modo II), que são os pólos da esfera de Pauwels, cujas coordenadas $\delta^* = \dfrac{\pi}{2}$, portanto a Eq. (6.3) toma a forma:

$$I_j^Z = \frac{AMD}{2}. \tag{6.4}$$

Para um sistema constituído de dois planetas e a estrela central, as órbitas evoluem para o centro onde $I_1^Z < I_2^Z$, quando ocorre migração divergente ($\Delta a_1 < 0$ ou $\Delta a_2 > 0$). Do contrário,quando os planetas passam por uma migração convergente ($\Delta a_1 > 0$ ou $\Delta a_2 < 0$), o sistema evolui para o centro onde $I_1^Z < I_2^Z$.

Pode-se mostrar que a condição de transição ($I_1^Z = I_2^Z$) é aproximadamente expressa em termos das razões das massas e dos movimentos médios (Rodriguez et al., 2011):

$$\frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/3}. \tag{6.5}$$

Na figura (6.8) temos representados os domínimos dos centros de estabilidade para migação secular. A curva vermelha representa a condição de transição expressa pela Eq.(6.5). As linhas tracejadas indicam a posição exata das ressonâncias.

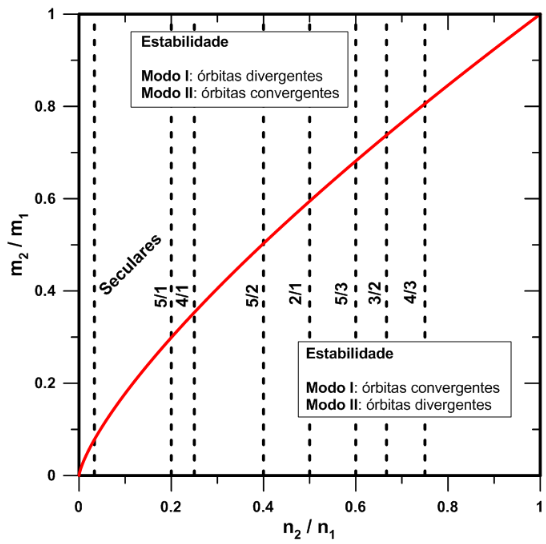


Figura 6.8: Domínios dos centros de estabilidade. As linhas tracejadas verticais representam a posição exata das principais ressonâncias. A condição de transição é representada pela curva contínua vermelha.

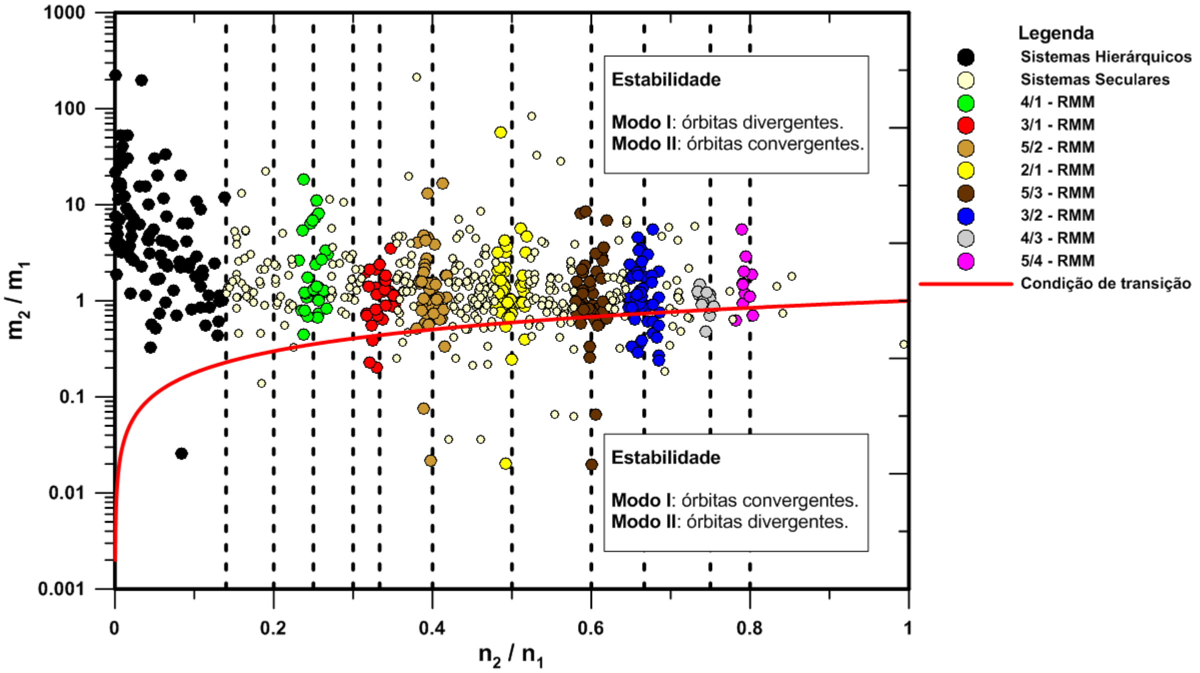
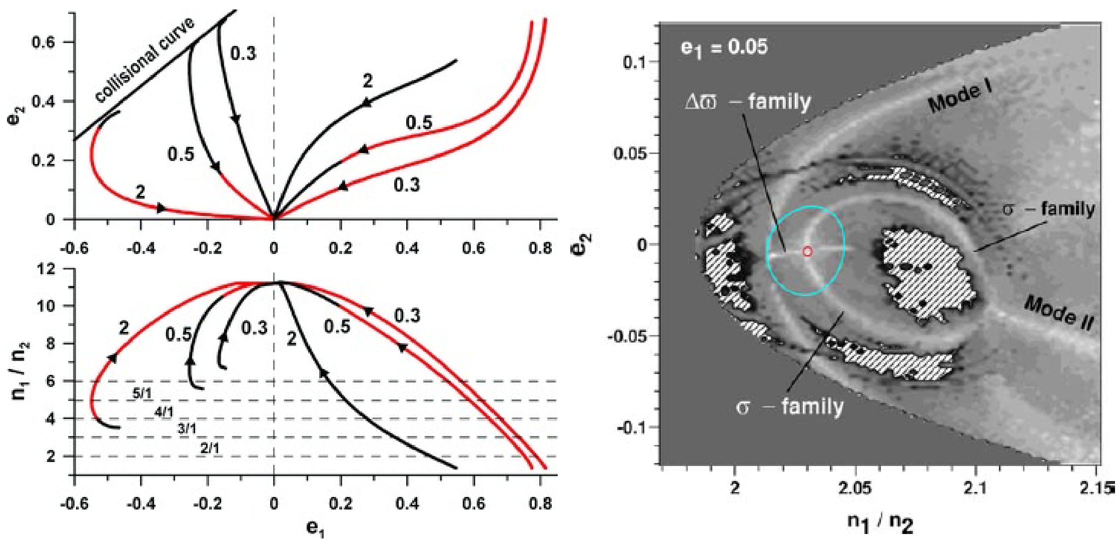


Figura 6.9: Distribuição dos pares nos domíinios dos centros de estabilidade. As linhas tracejadas verticais representam as posições exatas das principais ressonâncias. A curva vermelha representa a condição de transição (Eq. 6.8). Os painéis com as distribuições em torno de cada ressonância encontram-se no Apêndice(E).

Pode-se notar a partir da Fig. (6.9) que a maioria dos objetos encontra-se na parte de cima da condição de transição ($I_1^z = I_2^z$). Isso significa que, os pares que passaram por migração divergente, apresentam o ângulo secular ($\Delta\varpi$) oscilando de maneira estável em torno do Modo I ($\Delta\varpi = 0°$), enquanto que pares que os pares que passaram migração convergente, apresentam $\Delta\varpi$ oscilando de maneira estável em torno do Modo II ($\Delta\varpi = 180°$). Pode-se explicar esta característica, ao menos para o caso da ressonância 2/1, com $m_2/m_1 > 1$, a partir da análise do mapa dinâmico da Fig.(6.10). Na Fig.(6.10 a) temos as famílias de soluções estacionárias parametrizadas pela razão das massas m_2/m_1. Na parte de cima da figura temos o plano representativo (e_1, e_2), enquanto que na parte de baixo temos o plano $(e_1, n_1/n_2)$. Os valores positivos no eixo das abcissas representam as soluções nas quais o ângulo secular $\Delta\varpi$ está fixado em 0°, enquanto os valores negativos representam as soluções nas quais $\Delta\varpi = 180°$.



(a) (b)

Figura 6.10: (a) Famílias das soluções estacionárias (Modo I e Modo II), parametrizadas pela razão das massas m_2/m_1, as linhas pretas representam as soluções com $I_1^Z < I_2^Z$, enquanto que as linhas vermelhas representam as soluções nas quais $I_1^Z > I_2^Z$.(b) Mapa dinâmico do domínio da ressonância 2/1 com $e_1 = 0.05$ e $m_2/m_1 = 1.64$. Figura a: Michtchenko e Rodríguez (2011), Figura b: Michtchenko et al. (2008).

O mapa na Fig.(6.10 b) foi construído de modo a representar o espaço de fase de um sistema de três corpos (a estrela e dois planetas), que sofre migração a partir de uma configuração fora da ressonância . A massa do planeta interno é menor que a do planeta externo ($m_2/m_1 > 1$). As regiões em tons de cinza mais claros indicam um comportamento estável do par, enquanto as regiões em tons mais escuros, representam comportamento caótico.

Durante a migração, o próprio centro de establidade se desloca no espaço de fases do sistema, devido a mudança no parâmetro $\frac{a_1}{a_2}$. Ao se aproximar da ressonância 2/1, o sistema passa através dos domínios de movimento quasi-ressonantes e é transformado. O Modo II do movimento dá origem a duas ramificaçções da σ *-family* enquanto o Modo I da origem à $\Delta\varpi$ *-family*, dentro da ressonância 2/1. (Michtchenko et al., 2008).

O ponto vermelho indica a localização de um centro estável para a ressonância 2/1, correspondendo a soluções de equilíbrio das equações médias de movimento obtidas a partir do Hamiltoniano ressonante. A ACR é definida pela sobreposição das "famílias" (σ e $\Delta\varpi$), correspondendo aos dois graus de liberdade dos sistemas ressonantes (Seção 4.3). Como mostrado por Ferraz-Mello et al. (2006), a captura do sistema na ressonância 2/1 é geralmente precedida pela evolução do par dentro do Modo II do movimento secular.

Portanto, pode-se explicar a distribuição dos centros estáveis, ao menos para a ressonância 2/1, como decorrente da migração planetária convergente: o sistema entra na ressonância a partir do Modo II pois este é o caminho é estável (Fig. 6.10 b) .

No apêndice (E), cada painel mostra a distribuição dos centros estáveis em torno das ressonâncias principais, bem como dos sistemas seculares e sistemas hierárquicos. As barras de erro tanto na razão dos movimentos médios quanto na razão das massas foram calculadas via propagação de erros.

6.6 *Razão das massas*

Um importante parâmetro nos estudos da dinâmica de sistemas planetários é a razão das massas de pares de exoplanetas vizinhos.

De fato, Michtchenko e Malhotra (2004) mostraram que a estrutura do espaço de fase de um sistema seculares de três corpos (estrela central e dois planetas), depende exclusivamente de dois parâmetros: a razão das massas e a razão entre os semieixos dos dois planetas.

Em caso de movimentos ressonantes, a partir da razão das massas, pode-se ter uma ideia de qual dos dois ângulos críticos é o ângulo ressonante verdadeiro. De fato, quando $m_2/m_1 > 1$, ou seja, quando o planeta externo é mais massivo que o interno, o ângulo crítico σ_1 oscila, enquanto o ângulo secular ($\Delta\varpi$) geralmente circula Michtchenko et al. (2008).

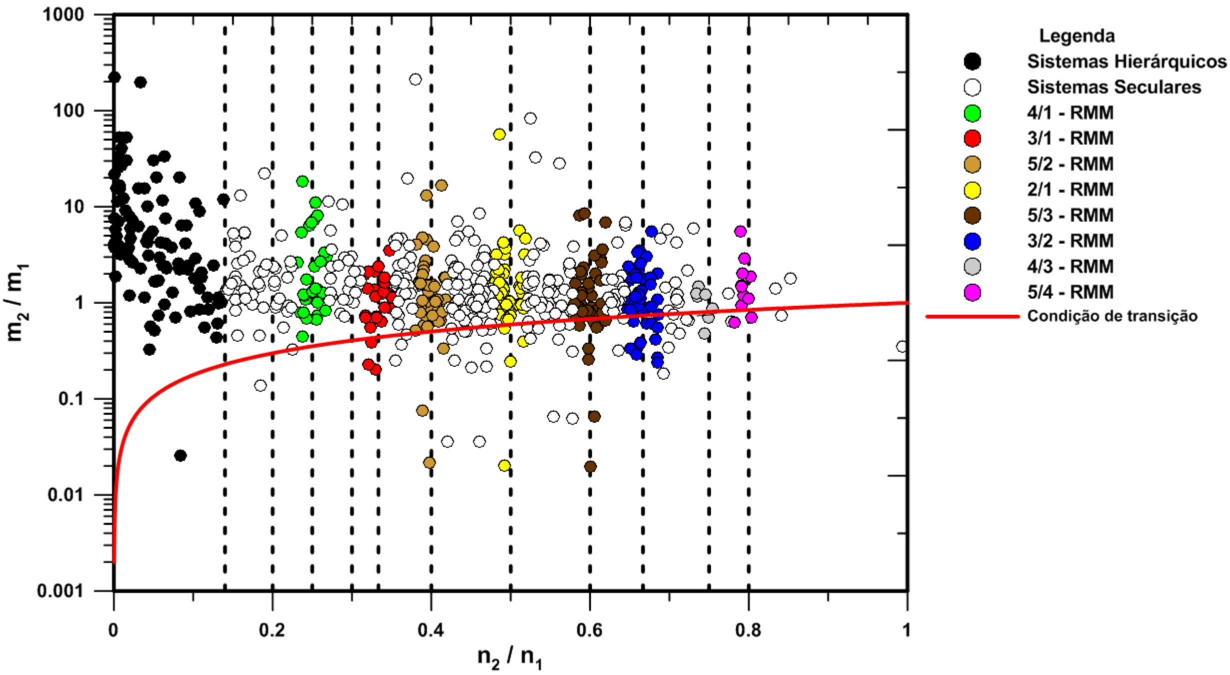


Figura 6.11: Distribuição das razões das massas m_2/m_1 em termos das razões dos movimentos médios.

Como pode-se perceber a partir da Fig.(6.11), os valores médios de m_2/m_1 encontram-se preferencialmente acima da linha que indica a condição de transição expressa na Eq.(6.5), ou seja, em princípio, a maioria dos pares que encontram-se em ressonâncias de movimentos médios, apresenta como ângulo ressonante o σ_1.

Capítulo 7

Estabilidade dos sistemas através de testes rápidos

Afirmar se um determinado sistema é ou não estável demanda, além de um bom modelo, longos períodos de integração numérica das órbitas dos corpos que o compõe, já que não existe um critério que determine de maneira precisa a estabilidade de longo período, quaisquer que sejam os parâmetros orbitais e físicos dos constituintes deste sistema.

Neste sentido, uma das técnicas mais poderosas para o estudo da dinâmica planetária, é a construção de *mapas dinâmicos*, onde cada ponto deste é o resultado de uma integração numérica das equações exatas de movimento. Ao se analisar, ao final de cada integração, a variação sofrida pelos seus elementos orbitais (geralmente a excentricidades dos planetas), estrutura-se o mapa de modo a representar as regiões de movimento caótico (onde há maior variação das excentricidades durante a integração numérica) e as regiões de movimento estável (onde há menor variação das excentricidades). Como exemplo vide Fig.(6.10 b).

Pode-se então inferir a estabalidade do sistema, a partir da *topografia* do espaço de fases (representada através do mapa dinâmico) e da posição do sistema neste mapa, dada pelos elementos orbitais e físicos dos seus componentes.

A principal vantagem desta abordagem reside no fato de os mapas dinâmicos serem construídos a partir de diversas condições iniciais para o problema (*i.e* diversos valores diferentes dos elementos orbitais e/ou físicos) de modo que, mudanças nestes parâmetros, seja por melhoria nas técnicas observacionais ou aprimoramentos do estudo dinâmico, não necessariamente, levarão à inescapável reavaliação do sistema, já que uma mudança nos parâmetros físicos e/ou orbitais, significa apenas uma mudança de posição do sistema no mapa.

Como, reforça-se, o objetivo principal deste trabalho é fornecer uma visão geral dos objetos das bases de dados de sistemas exoplanetários, seria interessante determinar a estabilidade de tais sistemas, com base nos valores dos elementos orbitais e físicos nestas apresentados. No entanto, a abordagem via construção de mapas dinâmicos torna-se impraticável, dado o grande número de sistemas de nossa amostra e o tempo necessário para as integrações das equações exatas de movimento.

Além disso, o número de exoplanetas que vem sendo descobertos e confirmados, aumenta de maneira robusta ano a ano conforme aprimoramentos ocorrem nas técnicas observacionais e de análise dos dados coletados, tornando assim de suma importância a utilização de um critério rápido, mesmo que preliminar, para determinar a estabalidade destes sistemas.

Na próxima seção abordaremos os testes de estabalidade dinâmica, baseados no *critério de Hill*, segundo o qual, uma condição necessária, mas não suficiente, para que um sistema, seja estável é as distâncias relativas entre os corpos sejam tais que, durante sua evolução dinâmica, não desenvolvam *crossing orbits*.

7.1 Estabilidade de Hill

Sejam três corpos, com massas m_0, m_1 e m_2, onde o índice “0” faz referência ao corpo central. Escolhamos unidades tais que:

$$\sum_{j=0}^{2} m_j = 1, \qquad \text{com} \qquad m_0 \gg m_1 + m_2. \tag{7.1}$$

Podemos também, sem perda de generalidade, escolher unidades de distância tais que $a_1 = 1$ e o período orbital osculador seja 2π. O semieixo maior do planeta externo passa então a ser

$$a_2 = 1 + \Delta, \tag{7.2}$$

onde Δ é a separação orbital inicial dos planetas.

A ideia da estabilidade de Hill repousa na definição de um valor crítico da separação orbital entre dois planetas (Δ_{crit}), a partir do qual, as órbitas dos planetas não desenvolvam mais *close approaches* e *crossing orbits*.

Marchal e Bozis (1982), mostraram que existe, para certos valores da energia total (E) e do momento angular total (C) do sistema, um ponto no espaço de fase, onde ocorre uma bifurcação, dividindo-o em regiões onde o movimento permitido e onde movimento proibido. A localização deste ponto depende do produto integral C^2E.

Se as condições iniciais forem tais que o produto integral seja maior do que um dado valor crítico

$$C^2E > \left(C^2E\right)_{crit}, \tag{7.3}$$

dizemos que o sistema é estável segundo o critério de Hill, já que o produto das integrais de movimento manterá esta condição sempre satisfeita.

Pode-se escrever a condição acima em termos dos elementos orbitais do sistema, desde que utilizemos a parametrização proposta por Marchal e Bozis (1982):

$$\frac{p}{a} = -\frac{2M_t}{\mathcal{G}^2 M_*^3} C^2 E, \tag{7.4}$$

onde $M_t = m_0 + m_1 + m_2$ e $\mathcal{G}$ é a constante gravitacional. As unidades de m_0, m_1, e m_2 são tais que $M_t = 1$ e $\mathcal{G} = 1$, $M_* = m_1m_2 + m_1m_0 + m_2m_0$ enquanto p e a são, respectivamente, o *semilatus rectum* e o semieixo maior generalizados da órbita para o sistema de três corpos.

O valor crítico para o qual a bifurcação ocorre, pode ser expressa em termos das massas dos corpos do sistema(Marchal e Bozis, 1982):

$$\left(\frac{p}{a}\right)_{crit.} = 1 + 3^{4/3} \frac{m_1 m_2}{m_0^{2/3} \left(m_1 + m_2\right)^{4/3}} - \frac{m_1 m_2 \left(11 m_1 + 7 m_2\right)}{3 m_0 \left(m_1 + m_2\right)^2} + \ldots, \tag{7.5}$$

donde podemos concluir, a partir das Eqs. (7.3),(7.4) e (7.5):

$$-\frac{2M_t}{\mathcal{G}^2 M_*^3} c^2 h > 1 + 3^{4/3} \frac{m_1 m_2}{m_3^{2/3} \left(m_1 + m_2\right)^{4/3}} - \frac{m_1 m_2 \left(11 m_1 + 7 m_2\right)}{3 m_3 \left(m_1 + m_2\right)^2} + \ldots. \tag{7.6}$$

Utilizando as coordenadas baricêntricas, pode-se expressar o momento angular e a energia total do sistema

$$C = \sum_j \mu_j \sqrt{a_j \left(1 - e_j^2\right)} \cos\left(i_j\right) \qquad \text{e} \qquad E = -\sum_j \frac{\mu_j}{2a_j}, \tag{7.7}$$

onde:

$$\mu_j = \frac{m_j}{m_0}, \; j = 1, 2.$$

Se expandirmos as equações 7.7, em nosso sistema de unidades e considerando o caso planar:

$$C = \mu_1\sqrt{(1-e_1^2)} + \mu_2\sqrt{(1+\Delta)(1-e_2^2)} \tag{7.8}$$

e

$$E = -\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2(1+\Delta)}. \tag{7.9}$$

Se chamarmos $\sqrt{1-e_j^2} = \gamma_j$, $\delta = \sqrt{1+\Delta}$ e $\epsilon = \mu_1 + \mu_2$, teremos, da Eq.(7.4):

$$\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{\mathcal{G}^2}\frac{(m_1+m_2+m_0)}{(m_1m_2+m_1m_0+m_2m_0)^3}\left[\mu_1\gamma_1+\mu_2\gamma_2\delta\right]^2\left[\mu_1+\frac{\mu_2}{\delta^2}\right]. \tag{7.10}$$

Como $M_t = 1$ e, em nossas unidades, $\mathcal{G} = 1$, teremos

$$\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)^3}\left(\mu_1\gamma_1+\mu_2\gamma_2\delta\right)^2\left(\mu_1+\mu_2\delta^{-2}\right). \tag{7.11}$$

Como, por hipótese,

$$\mu_j = \frac{m_j}{m_0} \ll 1 \Rightarrow \mu_j \approx m_j, \tag{7.12}$$

teremos:

$$\left(\frac{p}{a}\right) = \epsilon^{-3}\left(\mu_1\gamma_1+\mu_2\gamma_2\delta\right)^2\left(\mu_1+\mu_2\delta^{-2}\right). \tag{7.13}$$

Portanto, levando em consideração a Eq. (7.5):

$$\epsilon^{-3}\left(\mu_1\gamma_1+\mu_2\gamma_2\delta\right)^2\left(\mu_1+\mu_2\delta^{-2}\right) > 1 + 3^{4/3}\mu_1\mu_2\epsilon^{4/3} - \frac{1}{3}\mu_1\mu_2\left(11\mu_1+7\mu_2\right)\epsilon^{-2}. \tag{7.14}$$

Esta é uma equação quártica em δ, que geralmente é resolvida através de métodos numéricos. No entanto, faremos uma análise da establidade de um sistema constituído por dois planetas com órbitas inicialmente circulares, seguindo Gladman (1993).

Como $e_j = 0$, teremos que os $\gamma_j = 0$, de modo que a Eq.(7.14) toma a forma:

$$\mu_2\mu_1\delta^4 + 2\mu_1^2\mu_2\delta^3 + \delta^2\left[\mu_1^3+\mu_2^3-\epsilon^3-3^{4/3}\mu_1\mu_2\epsilon^{5/3}\right] + 2\mu_1\mu_2^2\delta\mu_1^2\mu_2 > 0. \tag{7.15}$$

Supondo que exista uma separação orbital crítica Δ_{crit}, a partir da qual, qualquer separação $\Delta > \Delta_{crit}$ mantém o sistema estável, segundo o critério de Hill, podemos expandir o parâmetro δ_0:

$$\delta_0 = \sqrt{1+\Delta} \approx 1 + \frac{\Delta_{crit}}{2} - \frac{\Delta_{crit}^2}{8} + \cdots \tag{7.16}$$

Se substituirmos a Eq.(7.16) na Eq.(7.15) teremos, considerando os termos de ordem mais baixa:

$$\Delta_c \approx 2.40\,(\mu_1 + \mu_2)^{1/3}\,. \tag{7.17}$$

Pode-se apresentar o resultado acima numa métrica mais conveniente, utilizando como unidades de distância o raio das esferas mútas de Hill:

$$R_{H_{1,2}} = \left(\frac{m_1 + m_2}{3m_0}\right)^{1/3} \frac{(a_1 + a_2)}{2}. \tag{7.18}$$

Gladman (1993), realizando integrações numéricas das equaçõs exatas do movimento concluiu que, obedecida a restrição das órbitas serem inicialmente circulares, a condição expressa na Eq.(7.19) garante a estabilidade do sistema por pelo menos 10.000 conjunções dos planetas.

$$\Delta_c \equiv \frac{a_0 - a_i}{R_H} > 2\sqrt{3}. \tag{7.19}$$

Na Fig.(7.1) temos a distribuição das distâncias mútuas dos exoplanetas de cada objeto em unidades de *Raios de Hill*. A separação crítica necessária para a estabilidade está representada pela linha vermelha na horizontal, enquanto as linhas tracejadas na horizontal representam as posições exatas das comensurabilidades.

Pode-se perceber que pares mais estáveis (*i.e.* com maior Δ), segundo o critério de Gladman (1993), apresentam-se em geral com excentricidades mais baixas, enquanto aqueles pares com excentricidades mais altas mostram-se com menor estabilidade segundo o critério adotado.

Apenas dez entre os pares analisados no trabalho apresentam valores de separação mútuas menores do que o necessário para a estabilidade. É interessante notar, contudo, que estes mesmos pares encontram-se próximos à ressonâncias de movimentos médios que, como já dito, atuam como mecanismos de proteção.

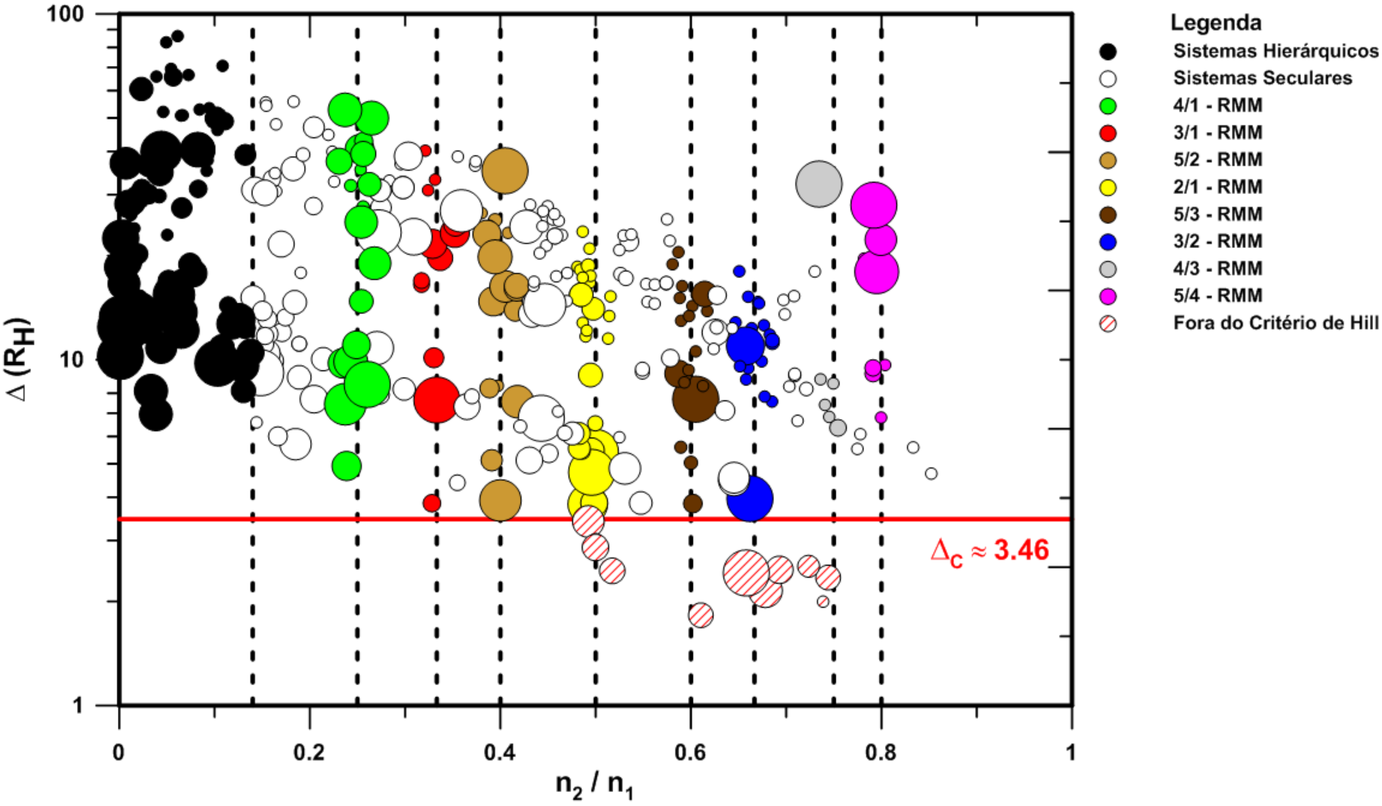


Figura 7.1: (a) Distribuição do raio das esferas mútuas de Hill em função da razão dos movimentos médios para cada objeto. As linhas tracejadas na vertical representam a posição exata das ressonâncias. O raio de cada círculo é proporcional à maior excentricidade de cada par, enquanto as cores representam as diferentes ressonâncias, seguindo o mesmo esquema de todos os painéis anteriores. Os demais painéis encontram-se no Apêndice (G)

Percebe-se também que os pares com Δ's próximos ao valor crítico, estão próximos às ressonâncias de movimentos médios, que atuam como um mecanismo de proteção do sistema.

Smith e Lissauer (2009), realizando uma série de integrações numéricas, examinaram a estabilidade de um sistema fictício de planetas, igualmente espaçados entre si e de mesma massa, baseando-se no critério de "tempo de *crossing orbit*": se nenhum nenhum evento de *crossing orbit* ocorrer no período de 10 bilhões de anos, então o sistema era considerado estável. Este critério é baseado na constatação, a partir de experimentos numéricos, que *close enconteurs* entre planetas são imediatamente precedidos (ou sucedidos) de *crossing orbits*. Os autores então encontraram que, para sistemas de 3 planetas, com massas de 1 $M_\oplus$ a separação mínima entre os planetas deve ser $\Delta_{crit} \approx 7\ R_H$ e para sistemas com cinco planetas com massas terrestres $\Delta_{crit} \approx 9\ R_H$ (Lissauer et al., 2011).

7.2 Overlap Ressonante

Wisdom (1980), analisando o problema restrito de três corpos, deduziu um critério de estabilidade a partir da largura da zona caótica, baseando-se no *overlap* de ressonâncias de movimentos médios de primeira ordem. Segundo este critério, o *overlap* se extende por uma região ao redor do planeta de largura

$$\Delta_j = k\mu_j^{2/7} a_j, \tag{7.20}$$

onde $\mu_j = \dfrac{\mu_j}{m_0}$, com m_j sendo a massa do j-ésimo planeta do sistema, a_j é o semieixo do j-ésimo planeta, enquanto m_0 é a massa da estrela e k é uma constante de proporcionalidade.

Giuppone et al. (2013), considerando que o critério desenvolvido por Wisdom (1980) seja ainda válido mesmo para órbitas excêntricas, estipularam uma zona de *crossing orbits*, simplesmente adicionando a região de *overlap* dos dois planetas vizinhos, de modo que:

$$\Delta_{j,j+1} \approx 1.57 \left(\mu_j^{2/7} a_j + \mu_{j+1}^{2/7} a_{j+1}\right), \tag{7.21}$$

onde os autores adotaram o valor $k \approx 1.57$, estimado numericamente por Duncan et al. (1989).

Portanto, para que um par de planetas seja estável, segundo o critério, sua separação mútua deve ser:

$$(a_{j+1} - a_j) \gtrsim 1.57 \left(\mu_j^{2/7} a_j + \mu_{j+1}^{2/7} a_{j+1}\right) \tag{7.22}$$

Aplicando a Eq.(7.22) aos pares da amostra trabalhada, encontramos que todos os sistemas, inclusive aqueles que falham no critério de Gladman (1993) são estáveis, mostrando que o critério do *Overlap* Ressonante é confiável.

Capítulo 8

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho realizamos uma análise da distribuição dos exoplanetas confirmados, contidos em duas bases de dados: *exoplanetarchive.ipac.caltech.edu* e *exoplanets.org*.

Iniciou-se o desenvolvimento do trabalho primeiramente estudando as diversas bases de dados contidas nos sites anteriormente citados, compreendendo as escolhas dos elementos orbitais e físicos, identificando limitações e potencialidades de cada uma.

Concomitante ao estudo das bases de dados, realizou-se uma revisão sobre o problema de 2 corpos, donde foram obtidas as relações que fornecem as definições dos elementos orbitais.

Finalizando esta primeira parte, foram realizados estudos sobre os sistemas de coordenadas astrocêntrico, baricêntrico,jacobiano e de Poincaré, para o problema de 3 corpos, para a compreensão da dinâmica de três corpos, tanto no formalismo Newtoniano quanto no Hamiltoniano. De posse de tal entendimento, pode-se compreender o comportamento dinâmico dos objetos.

O trabalho prosseguiu com o entendimento das principais características dinâmicas dos sistemas seculares, ressonantes e quase ressonantes e como estas variam de sistema para sistema.

Passou-se então ao desenvolvimento do programa, escrito em linguagem Fortran, responsável pela leitura das informações das bases de dados, bem como pela construção dos parâmetros dinâmicos $\frac{n_1}{n_2}$,$\frac{a_1}{a_2}$, $(m_1 + m_2)$ e $\frac{m_2}{m_1}$.

Conseguiu-se escrever um programa que, de maneira satisfatória, realizasse a subdivisão dos sistemas exoplanetários em objetos (estrela central +pares de planetas vizinhos), que podem, futuramente, ser estudados de maneira mais aprofundada individualmente.

Observou-se que boa parte dos sistemas colhidos nos bancos de dados mostraram-se fora das principais ressonâncias de movimentos médios, considerando os limites definidos, o que está de acordo com os trabalhos de Lissauer et al. (2011),Hobson e Gomez (2017), entre outros.

A partir da análise da distribuição dos semieixos em função das massas, pode-se concluir, que a maioria dos exoplanetas membros de sistemas planetários, encontram-se em órbitas $a \leq 1$ U.A. Com uma fração pequena dos chamados "hot Jupiters".

Os planetas do catálogo apresentram massas no intervalo ($0.0000629\ M_J \leq M_J \leq 27\ M_J$), ou seja, indo desde planetas com massas menores que a Terrestre até planetas com massas condizentes com as de anãs-marrons,com a maioria apresentando $m \leq 1\ M_J$

A massa planetária dos objetos (soma das massas dos planetas) é, em sua maioria, menor do que 1 M_J, com os objetos mais massivos localizando-se preferencialmente próximos às principais ressonâncias de movimentos médios.

Pode-se verificar, que as estrelas hospedeiras dos sistemas apresentam-se, ricas em metais. Deve-se salientar, no entanto, que há um *bias* inerente aos dados, pois a metalicidade de uma estrela é dada a partir da análise de um conjunto de linhas espectrais, cuja escolha depende de diversas condições, tais como a resolução dos equipamentos utilizados.

Baseando-se no modelo proposto por Michtchenko e Rodríguez (2011) constatou-se, partir da distribuição dos centros estáveis, que a maioria dos pares apresenta o Modo I como solução estável no caso de órbitas divergentes e o Modo II como solução estável no caso de órbitas convergentes.

Utilizando o critério de Gladman (1993), encontrou-se que apenas os pares BD +20 2457 (b,c), GJ 876 (c,b), HD 200964 (b,c), HD 204313 (b,d) , HD 5319 (b,c), HR 8799 (c,b), HR 8799 (d,c) e NN Ser (d,c) não apresentavam separações mútuas maiores que o valor crítico definido no trabalho citado. No entanto, deve-se reforçar que estes mesmos pares estão todos próximos a ressonâncias de movimentos médios, que atuam como um mecanismo protetor, evitando *close approaches* e *crossing orbits* (Martí et al. (2013), entre outros).

Aplicou-se também aos objetos analisados neste trabalho, o teste de estabilidade descrito em Giuppone et al. (2013), baseado no *overlap ressonante*, obtendo-se valores condizentes com a estabilidade de longo período para todos os pares de exoplanetas dos bancos de dados.

Como perspectivas ao prosseguimento do trabalho, buscar-se-á uma melhoria na amostra de exoplanetas analisados, incluindo outras bases de dados.

Será realizada a implementação de um portal onde os parâmetros físicos, orbitais e dinâmicos dos objetos sejam facilmente encontrados por pesquisadores que desejem estas informações.

Continuação da pesquisa, num futuro Doutorado, onde os objetos serão submetidos a testes mais robustos de estabilidade dinâmica além da determinação de zonas habitáveis ao redor das estrelas.

Referências Bibliográficas

Alves A. J., Michtchenko T. A., Tadeu dos Santos M., Dynamics of the 3/1 planetary mean-motion resonance: an application to the HD60532 b-c planetary system, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2016, vol. 124, p. 311

Andrade E. A. I., Movimento Planetário nos Sistemas de Estrelas Múltiplas, São Paulo: Universidade 1, 2010, Dissertação de Mestrado

Armitage P. J., Rice W. K. M., Planetary migration, arXiv e-prints, 2005, pp astro–ph/0507492

Bashi D., Helled R., Zucker S., Mordasini C., Two empirical regimes of the planetary mass-radius relation, A&A, 2017, vol. 604, p. A83

Batygin K., Bodenheimer P. H., Laughlin G. P., In Situ Formation and Dynamical Evolution of Hot Jupiter Systems, ApJ, 2016, vol. 829, p. 114

Beaugé C., Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Multi-planet extrasolar Systems - detection and dynamics., Research in Astronomy and Astrophysics, 2012, vol. 12, p. 1044

Beaugé C., Michtchenko T. A., Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system, MNRAS, 2003, vol. 341, p. 760

Boley A. C., Granados Contreras A. P., Gladman B., The In Situ Formation of Giant Planets at Short Orbital Periods, ApJ, 2016, vol. 817, p. L17

Borucki W., Koch D., Batalha N., Caldwell D., Christensen-Dalsgaard J., D. Cochran W., Dunham E., N. Gautier T., Geary J., Gilliland R., Jenkins J., Kjeldsen H., J. Lissauer

J., Rowe J., KEPLER: Search for earth-size planets in the habitable zone , vol. 253, 2009, p. 289

Brouwer D., Clemence G. M., Methods of Celestial Mechanics. Academic Press New York 1961, 1961

Campbell B., Asbell-Clarke J. E., Weiler J., Deblasi C., Persson S. E., Survey of New Young Stellar Objects Found by IRAS: Centimeter-wave Detections and Dust Emission. In Bulletin of the American Astronomical Society , vol. 20 of BAAS, 1988, p. 956

Chambers J., , 2010 Terrestrial Planet Formation. pp 297–317

Charbonneau D., Sizing Up Close-In Planets Around Sun-Like Stars. In American Astronomical Society Meeting Abstracts , vol. 32 of Bulletin of the American Astronomical Society, 2000, p. 1506

Deeg H., The CoRoT mission's exoplanet program, EPJ Web of Conferences, 2013, vol. 47, p. 10001

Duncan M., Quinn T., Tremaine S., The long-term evolution of orbits in the solar system - A mapping approach, Icarus, 1989, vol. 82, p. 402

Endl M., Robertson P., Cochran W. D., MacQueen P. J., Brugamyer E. J., Caldwell C., Wittenmyer R. A., Barnes S. I., Gullikson K., Revisiting ρ^1 Cancri e: A New Mass Determination of the Transiting Super-Earth, ApJ, 2012, vol. 759, p. 19

Ferraz-Mello S., Canonical perturbation theories: degenerate systems and resonance. vol. 345, Springer Science & Business Media, 2007

Ferraz-Mello S., Micchtchenko T. A., Beaugé C., , 2006 Regular motions in extra-solar planetary systems. Springer p. 255

Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., The Orbits of the Extrasolar Planets HD 82943c and b, ApJ, 2005, vol. 621, p. 473

Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., Callegari N., Extrasolar Planetary Systems. In Chaos and Stability in Planetary Systems , vol. 683 of Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, 2005a, p. 219

Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., Callegari N., Extrasolar Planetary Systems. In Chaos and Stability in Planetary Systems , vol. 683 of Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, 2005b, p. 219

Fischer D. A., Valenti J., The Planet-Metallicity Correlation, ApJ, 2005, vol. 622, p. 1102

Giuppone C. A., Morais M. H. M., Correia A. C. M., A semi-empirical stability criterion for real planetary systems with eccentric orbits, MNRAS, 2013, vol. 436, p. 3547

Gladman B., Dynamics of systems of two close planets, Icarus, 1993, vol. 106, p. 247

Heller R., Formation of hot Jupiters through disk migration and evolving stellar tides, arXiv e-prints, 2018, p. arXiv:1806.06601

Henry G. W., Marcy G., Butler R. P., Vogt S. S., HD 209458, IAU Circ., 1999, vol. 7307

Hobson M. J., Gomez M., Multiple planetary systems: Properties of the current sample, New A, 2017, vol. 55, p. 1

Laskar J., Large Scale Chaos and the spacing of the inner planets., Astronomy and Astrophysics, 1997, vol. 317, p. 75

Lissauer J. J., Fabrycky D. C., Ford E. B., Borucki W. J., Fressin F., Marcy G. W., Orosz J. A., Rowe J. F., Torres G., Welsh W. F., Batalha N. M., Bryson S. T., Buchhave L. A., Caldwell D. A., Carter J. A., Charbonneau D., Christiansen J. L., others. A closely packed system of low-mass, low-density planets transiting Kepler-11, 2011, vol. 470, p. 53

Lissauer J. J., Ragozzine D., Fabrycky D. C., Steffen J. H., Ford E. B., Jenkins J. M., Shporer A., Holman M. J., Rowe J. F., Quintana E. V., Batalha N. M., Borucki W. J., et al Architecture and Dynamics of Kepler's Candidate Multiple Transiting Planet Systems, ApJS, 2011, vol. 197, p. 8

Marchal C., Bozis G., Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem, Celestial Mechanics, 1982, vol. 26, p. 311

Martí J., Giuppone C., Beaugé C., Dynamical analysis of the Gliese-876 Laplace resonance, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2013, vol. 433

Mayor M., Udry S., Naef D., Pepe F., Queloz D., Santos N. C., Burnet M., The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XII. Orbital solutions for 16 extra-solar planets discovered with CORALIE, A&A, 2004, vol. 415, p. 391

Melendez J., Ramirez I., Planet signatures in the chemical composition of Sun-like stars, ArXiv e-prints, 2016

Michtchenko T., Beaugé C., Ferraz-Mello-S. Dynamic Portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance-I. Systems with a more massive outer planet, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2008, vol. 387, p. 747

Michtchenko T., Malhotra R., Secular Dynamics of the Three-Body Problem: Application to the υ Andromedae Planetary System, Icarus, 2004, vol. 168, p. 237

Michtchenko T., Rodríguez A., Modelling the secular evolution of migrating planets pairs, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2011

Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System, Icarus, 2001, vol. 149, p. 357

Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Beaugé C., Dynamics of the Extra-solar Planetary Systems., Extrasolar Planets: Formation, Detection and Dynamics 1, 2006

Mills S. M., Mazeh T., The Planetary Mass-Radius Relation and Its Dependence on Orbital Period as Measured by Transit Timing Variations and Radial Velocities, ApJ, 2017, vol. 839, p. L8

Murray C. D., Dermott S. F., Solar System Dynamics. 1 ed. 5 reimpressão. Cambridge: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2008, 579 p.

Perryman M., The Exoplanet Handbook. 1 ed. Cambridge: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2011, 100 p.

Ramos X., Charalambous C., Benítez-Llambay P. Beaugé C., Planetary migration and the origin of the 2/1 and 3/2 (near)-resonant population of close-in exoplanets, Astronomy & Astrophysics, 2016

Rivera E. J., Laughlin G., Butler R. P., Vogt S. S., Haghighipour N., Meschiari S., The Lick-Carnegie Exoplanet Survey: a Uranus-Mass Fourth Planet for GJ 876 in an Extrasolar Laplace Configuration, ApJ, 2010, vol. 719, p. 890

Rodriguez A., Michtchenko T. A., Miloni O., Angular momentum exchange during secular migration of two-planet systems. In EPSC-DPS Joint Meeting 2011 , 2011, p. 1264

Santos N. C., Israelian G., Mayor M., Confirming the Metal-Rich Nature of Stars with Giant Planets, ArXiv Astrophysics e-prints, 2001

Santos N. C., Israelian G., Mayor M., Bento J. P., Almeida P. C., Sousa S. G., Ecuvillon A., Spectroscopic metallicities for planet-host stars: Extending the samples, A&A, 2005, vol. 437, p. 1127

Silva R. A., Introdução à teoria de movimentos ressonantes em sistemas planetários, São Paulo: Universidade 1, 2017, Dissertação de Mestrado

Smith A. W., Lissauer J. J., Orbital stability of systems of closely-spaced planets, Icarus, 2009, vol. 201, p. 381

Struve O., Proposal for a project of high-precision stellar radial velocity work, The Observatory, 1952, vol. 72, p. 199

Swift D. C., Eggert J. H., Hicks D. G., Hamel S., Caspersen K., Schwegler E., Collins G. W., Nettelmann N., Ackland G. J., Mass-Radius Relationships for Exoplanets, The Astrophysical Journal, 2012, vol. 744

Tadeu dos Santos M., Correa-Otto J. A., Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Formation and evolution of the two 4/3 resonant giants planets in HD 200964, A&A, 2015, vol. 573, p. A94

Wang J., Fischer D. A., Horch E. P., Huang X., On the Occurrence Rate of Hot Jupiters in Different Stellar Environments, ApJ, 2015, vol. 799, p. 229

Weiss L. M., Marcy G. W., The Mass-Radius Relation for 65 Exoplanets Smaller than 4 Earth Radii, ApJ, 2014, vol. 783, p. L6

Wisdom J., The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem, AJ, 1980, vol. 85, p. 1122

Wolszczan A., Frail D. A., A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12, Nature, 1992, vol. 355, p. 145

Wright J. T., Fakhouri O., Marcy G. W., Han E., Feng Y., Johnson J. A., Howard A. W., Fischer D. A., Valenti J. A., Anderson J., Piskunov N., The Exoplanet Orbit Database, PASP, 2011, vol. 123, p. 412

Apêndice

Apêndice A

Programa

Neste apêndice está o programa escrito, em linguagem Fortran, para a leitura das informações dos exoplanetas e estrelas, baixadas das bases de dados Exoplanet.org e Nasa Exoplanet Archive.

```
PROGRAM leituramovimentosmedios
integer,parameter::num=20000
real,parameter::me=5.97219E24/1898.19E24,mj=1.898E+27,re=(6356.8/66854),rj=1,
G=6.67408E-11,ms = 1.9891E+30,au=1.50E+8
character(1024) :: buffer
character(1024)::starname2
character(25)::detecmethod
character(20)::planetname2(num),starname(num),planetname(num)
real::a(num),errau(num),errad(num),erral(num),alpha(num),erralphau(num),
erralphad(num),
p(num),errpu(num), errpd(num),errpl(num), rmm(num),errrmmu(num),errrmmd(num),
massratio(num),m(num),errmu(num),errmd(num),errml(num),errmassratiou(num), errmas-
sratiod(num),ratiomass(num),radius(num),errradiusu(num),errradiusd(num),m1(num),
xu(num),xd(num), yu(num),errradiusl(num), yd(num),errm1u(num),errm1d(num),ecc(num),
erreccu(num),erreccd(num),erreccl(num),hiecc(num),errhieccu(num), errhieccd(num),
hip(num), errhipu(num),errhipd(num),m2(num),errm2u(num),errm2d(num),
res(num),mt(num), errmtu(num),errmtd(num), rm(num),errrmu(num),errrmd(num),sm(num),
```

sa(num),rh(num), crh(num),starmass(num),errstarmassu(num), errstarmassd(num), starradius(num),errstarradiusu(num),errstarradiusd(num),errstarradiusl(num), mu(num), Lambda(num),C(num), scaled(num),inc(num),errincu(num),errincd(num),errincl(num),

rp(num), sigmahillm(num), omega(num), erromegau(num), erromegad(num),

erromegal(num),bigomega(num),errbigomegau(num),errbigomegad(num),

errbigomegal(num), t0(num),errt0u(num),errt0d(num),

errt0l(num),teff(num),errteffu(num),errteffd(num),errteffl(num),

msini(num),
errmsiniu(num),errmsinid(num),errmsinil(num),erratiomassu(num),erratiomassd(num), mpp(num),mpp2(num), M3(num),crht(num),fe(num),errfeu(num),errfed(num),errfel(num), delta(num)

real*8::e,ft

integer::pos,pos1,k,j,pos2,cont,cont1,cont2,cont3,cont4,cont5,cont6,cont7, cont8,cont9, cont10,cont11,cont12,i1, cont13,cont14,i2,q,contradius1,contradius2,contradius3, contradius4,contradius5, nstar

!!!!AQUI DEVE SER FEITA A INICIALIZAÇÃO DE TODOS OS ARQUIVOS QUE, PARA ECONOMIA DE ESPAÇO, FORAM OMITIDOS NESTE APÊNDICE!!!!!!

DO i=1,3 !SALTANDO O CABEÇALHO

READ(10,”(A)”)

ENDDO

DO i = 1,2300 ! LENDO OS DADOS!

!cont=cont+1

READ(10,”(A)”,END=120) buffer

pos = index(buffer, ”,”)

planetname(i) = buffer(1:pos-1)

READ(buffer(pos+1:), ’(A)’)star$_name2$

pos2 = index(starname2, ”,”)

starname(i) = starname2(1:pos2-1)

IF ((LEN_TRIM(planetname(i))==0)) THEN

!PRINT*,’BLANK’

ELSE

cont=cont+1

```
!PRINT*,”,cont,planetname(i)
!LEITURA DOS DADOS!
READ(starname2(pos2+1:),*)a(i),errau(i),errad(i),erral(i),p(i),errpu(i),errpd(i),errpl(i),
m(i), errmu(i),errmd(i),errml(i),msini(i),errmsiniu(i),errmsinid(i),errmsinil(i), ecc(i),
erreccu(i), erreccd(i),erreccl(i),inc(i),errincu(i),errincd(i),errincl(i), omega(i),erromegau(i),
erromegad(i),
erromegal(i),bigomega(i),errbigomegau(i),errbigomegad(i),
errbigomegal(i),t0(i),errt0u(i),errt0d(i),errt0l(i),teff(i),errteffu(i),errteffd(i),errteffl(i),
radius(i), errradiusu(i),errradiusd(i),errradiusl(i),starmass(i),errstarmassu(i), errstarmassd(i),
starradius(i),errstarradiusu(i),errstarradiusd(i),errstarradiusl(i),fe(i),errfeu(i),errfed(i)
!nstar=nstar+1
!PRINT*,”,nstar,planet_name(i)
!mpp(i) = (i/(100*re))**(2.06)
!mpp2(i) = 10**(0.60+0.92*log(i/(100*re)))
!!!!!!!!!RAIOS PLANETÁRIOS!!!!!!!!!
IF (radius(i) .NE. 0 ) THEN
IF (11.209*radius(i).lt. 1.25) THEN
!PRINT*,'1-',planetname(i),radius(i)
contradius1=contradius1+1
ELSE
IF ((11.209*radius(i).GE. 1.25) .AND. (11.209*radius(i).LT. 2)) THEN
!PRINT*,'2-',planetname(i),radius(i)
contradius2=contradius2+1
ELSE
IF ((11.209*radius(i).GE. 2) .AND. (11.209*radius(i).LT. 6)) THEN
!PRINT*,'3-',planetname(i),radius(i)
contradius3=contradius3+1
ELSE
IF ((11.209*radius(i).GE. 6) .AND. (11.209*radius(i).LT. 15)) THEN
!PRINT*,'4-',planetname(i),radius(i) contradius4=contradius4+1
ELSE
IF (11.209*radius(i).GE. 15) THEN
```

```
! PRINT*,'5-',planetname(i),radius(i)
contradius5=contradius5+1
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
!!!!!!!!!SEMIEIXOS!!!!!!!!!
IF (((a(i) .NE. -999).AND.(a(i) .NE. -99))) THEN
!IF (a(i) .EQ. 0) THEN
!PRINT*,",planet_name(i), a(i)
!ENDIF
!IF ((radius(i) .EQ. -99) .OR. (radius(i) .EQ. -999)) THEN
! radius(i) = 0
!ELSE
! IF ((m(i) .EQ. -99 ) .OR. (m(i) .EQ. -999 )) THEN
! m(i) = 0
! WRITE(271,*)a(i),r(i),m(i)
!ELSE
! WRITE(271,*)a(i),r(i),m(i)
!ENDIF
!ENDIF
WRITE(27,*)planet_name(i), a(i), radius(i), m(i)
WRITE(271,*)a(i),m(i),radius(i)
ENDIF
!!!!!!!!!EXCENTRICIDADES!!!!!!!!!
IF ((ecc(i) .NE. -999) .AND. (ecc(i) .NE. -99) ) THEN
write(12,*)planetname(i),ecc(i),erreccu(i),erreccd(i),erreccl(i)
write(121,*)ecc(i),erreccu(i),erreccd(i),erreccl(i)
ENDIF
!!!!!!!!!NÚMERO DE SISTEMAS!!!!!!!!!
```

```
IF (i .GE. 2 ) THEN
IF (starname(i) .NE. starname(i-1)) THEN
nstar=nstar+1
!PRINT*,' ',nstar,star_name(i)
ENDIF
ENDIF
!!!!!!!!!METALICIDADE!!!!!!!!!
IF ((i .GE. 2 ) .AND. ((fe(i) .NE. -9999) .OR. (fe(i) .NE. -9999))) THEN
IF ((starname(i) .NE. starname(i-1))) THEN
WRITE(300,*)starname(i),fe(i),errfeu(i)
WRITE(301,*)fe(i),errfeu(i)
ENDIF
ENDIF
!!!!!!!!!HOT JUPITERS!!!!!!!!!
IF (( m(i) .GE. 0.1) .AND. ( (p(i)+errpd(i)) .LE. 10)) THEN
WRITE(14,*)planetname(i),m(i),errmu(i),errmd(i),erml(i),p(i),errpu(i),errpd(i),
errpl(i)
ENDIF
!!!!!!!!!RAZÃO DAS MASSAS!!!!!!!!!
IF (i .GT. 1) THEN
IF (m(i) .EQ. 0) THEN
m(i) = msini(i)
errmu(i) = errmsiniu(i)
errmd(i) = errmsinid(i)
ELSE
IF (m(i-1) .EQ. 0) THEN
m(i-1) = msini(i-1)
errmu(i-1) = errmsiniu(i-1)
errmd(i-1) = errmsinid(i-1)
ENDIF
ENDIF
IF (m(i) .EQ. 0) THEN
```

```
ratiomass(i) = 0
errratiomassu(i) = 0
errratiomassd(i) = 0
errratiomassu(i-1) = 0
errratiomassu(i-1) = 0
!PRINT*,”,ratiomass(i)
ELSE
ratiomass(i) = (m(i-1)/m(i))
errratiomassu(i) =ratiomass(i)*SQRT((errmu(i-1)/m(i-1))**2+(errmu(i)/m(i))**2)
errratiomassd(i) =ratio_mass(i)*SQRT((errmd(i-1)/m(i-1))**2+(errmd(i)/m(i))*
*2)
rmm(i) = p(i)/p(i-1)
errrmmu(i) = rmm(i)*SQRT((errpu(i-1)/p(i-1))**2+(errpu(i)/p(i))**2)
errrmmd(i) = rmm(i)*SQRT((errpd(i-1)/p(i-1))**2+(errpd(i)/p(i))**2)
!PRINT*,”,ratiomass(i)
if (ratiomass(i) .NE. 0) then
!print*,”,planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i), errratiomassd(i),rmm(i),
errrmmu(i),errrmmu(i)
WRITE(16,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),
rmm(i),errrmmu(i),errrmmu(i)
WRITE(161,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),
rmm(i),errrmmu(i),errrmmu(i)
IF ((rmm(i) .LE. 0.52 ) .AND. (rmm(i) .GE. 0.48)) THEN
WRITE(17,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),
errrmmu(i), errrmmu(i)
WRITE(171,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),
errrmmu(i),errrmmu(i)
ELSE
IF((rmm(i) .LE. ((2.0/3.0)+0.02 )) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/3.0)-0.02 ))) THEN
WRITE(18,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),
errrmmu(i),errrmmu(i)
WRITE(181,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),
```

errrmmu(i),errrmmu(i)

ELSE

IF((rmm(i) .LE. ((1.0/3.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/3.0)-0.02))) THEN

WRITE(19,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i)

WRITE(191,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i)

ELSE

IF((rmm(i) .LE. ((1.0/4.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/4.0)-0.02))) THEN

WRITE(20,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i), errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i)

WRITE(200,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i)

ELSE

IF ((rmm(i) .LE. ((3.0/4.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/4.0)-0.02))) THEN

WRITE(21,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i), errratiomassd(i),

rmm(i),errrmmu(i),errrmmu(i)

WRITE(201,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i)

ELSE

IF ((rmm(i) .LE. ((1.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. (0.14))) THEN

WRITE(22,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i)

WRITE(202,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i)

ELSE

IF ((rmm(i) .LE. ((2.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/5.0)-0.02))) THEN

WRITE(23,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratio$_{m}assu(i),errratiomassd(i)$,

rmm(i),errrmmu(i), errrmmu(i)

WRITE(203,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i)

ELSE

IF ((rmm(i) .LE. ((3.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/5.0)-0.02))) THEN

WRITE(24,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i), errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i), errrmmu(i)

WRITE(204,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i)

ELSE

IF ((rmm(i) .LE. ((4.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((4.0/5.0)-0.02))) THEN

WRITE(241,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i), errratio$_{m}assd(i)$,

rmm(i),errrmmu(i), errrmmu(i)

WRITE(2041,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),errrmmu(i), errrmmu(i)

ELSE

IF (rmm(i) .LT. 0.14) THEN

WRITE(25,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i), errratiomassd(i),

rmm(i),errrmmu(i), errrmmu(i)

WRITE(205,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),

rmm(i),errrmmu(i), errrmmu(i)

ELSE

WRITE(26,*)planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i), errratiomassd(i),

rmm(i),errrmmu(i), errrmmu(i)

WRITE(206,*)ratiomass(i),errratiomassu(i),errratiomassd(i),rmm(i),

errrmmu(i),errrmmu(i) print*,",planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i), errratiomassd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmu(i)

endif

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

```
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
!!!!!!!!CÁLCULO DOS ALPHAS!!!!!!!!!
IF ((i.GT. 1) .AND. (a(i-1) .NE. 0) ) THEN
alpha(i) = a(i)/a(i-1)
erralphau(i) = alpha(i)*SQRT( (errau(i-1)/a(i-1))**2+(errau(i)/a(i))**2)
erralphad(i) = alpha(i)*SQRT( (errad(i-1)/a(i-1))**2+(errad(i)/a(i))**2)
rmm(i) = p(i)/p(i-1)
ENDIF
!!!!!!!!CÁLCULO DAS MMR's E MAIORES EXCENTRICIDADES!!!!!!!!!
IF ((p(i-1) .NE. 0) .AND. (i .GT. 1) ) THEN
rmm(i) = p(i)/p(i-1)
errrmmu(i) = rmm(i)*SQRT((errpu(i-1)/p(i-1))**2+(errpu(i)/p(i))**2)
errrmmd(i) = rmm(i)*SQRT((errpd(i-1)/p(i-1))**2+(errpd(i)/p(i))**2)
IF (((ecc(i) .EQ. -99) .OR. (ecc(i) .EQ. -999)) .OR. ((ecc(i-1) .EQ. -99) .OR. (ecc(i-1)
.EQ. -999))) THEN
!PRINT*,", planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i)
ELSE
IF (ecc(i).LT.ecc(i-1)) THEN
hiecc(i)=ecc(i-1)
errhieccu(i) = erreccu(i-1)
errhieccd(i) = erreccd(i-1)
ELSE
hiecc(i)=ecc(i)
errhieccu(i) = erreccu(i)
errhieccd(i) = erreccd(i)
ENDIF
WRITE(1009,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),
errhieccu(i),errhieccd(i)
WRITE(1109,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),errhieccd(i)
```

```
IF ((rmm(i) .LE. 0.52) .AND. (rmm(i) .GE. 0.48)) THEN
WRITE(1000,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
WRITE(1100,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
ELSE
IF((rmm(i) .LE. ((2.0/3.0)+0.02 )) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/3.0)-0.02 ))) THEN
WRITE(1001,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
WRITE(1101,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),errhieccd(i)
ELSE
IF((rmm(i) .LE. ((1.0/3.0)+0.02 )) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/3.0)-0.02 ))) THEN
WRITE(1002,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
WRITE(1102,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((1.0/4.0)+0.02 )) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/4.0)-0.02 ))) THEN
WRITE(1003,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
WRITE(1103,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((3.0/4.0)+0.02 )) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/4.0)-0.02 ))) THEN
WRITE(1004,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
WRITE(1104,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((1.0/5.0)+0.02 )) .AND. (rmm(i) .GE. (0.14))) THEN
WRITE(1005,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
```

```
WRITE(1105,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i),
errhieccd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((2.0/5.0)+0.02 )) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/5.0)-0.02 ))) THEN
WRITE(1006,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), er-
rhieccd(i)
WRITE(1106,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), errhieccd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((3.0/5.0)+0.02 )) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/5.0)-0.02 ))) THEN
WRITE(1007,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), er-
rhieccd(i)
WRITE(1107,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), errhieccd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((4.0/5.0)+0.02 )) .AND. (rmm(i) .GE. ((4.0/5.0)-0.02 ))) THEN
WRITE(10071,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), er-
rhieccd(i)
WRITE(11071,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), errhieccd(i)
ELSE
IF (rmm(i) .LT. 0.14) THEN
WRITE(1010,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), er-
rhieccd(i)
WRITE(1110,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), errhieccd(i)
ELSE
WRITE(1008,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), er-
rhieccd(i)
WRITE(1108,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i),errhieccu(i), errhieccd(i)
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
```

```
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
!!!!!!!!!CÁLCULO DAS MMR's E MAIORES PERÍODOS!!!!!!!!!
IF ((p(i-1) .NE. 0) .AND. (i .GT. 1) ) THEN
IF (p(i-1).GT.p(i)) THEN
hip(i) =p(i-1)
errhipu(i) = errpu(i-1)
errhipd(i) = errpd(i-1)
ELSE
hip(i) =p(i)
errhipu(i) = errpu(i)
errhipd(i) = errpd(i)
ENDIF
WRITE(2009,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(2109,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
IF ((rmm(i) .LE. ((1.0/2.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/2.0)-0.02))) THEN
WRITE(2000,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(2100,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((2.0/3.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/3.0)-0.02))) THEN
WRITE(2001,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(2101,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((1.0/3.0)+0.02)).AND. (rmm(i).GE.((1.0/3.0)-0.02))) THEN
WRITE(2002,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(2102,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((1.0/4.0)+0.02)).AND. (rmm(i).GE.((1.0/4.0)-0.02))) THEN
```

```
WRITE(2003,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(2103,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((3.0/4.0)+0.02)).AND. (rmm(i).GE.((3.0/4.0)-0.02))) THEN
WRITE(2004,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(2104,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((1.0/5.0)+0.02)).AND. (rmm(i).GE.(0.14))) THEN
WRITE(2005,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(2105,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((2.0/5.0)+0.02)).AND. (rmm(i).GE.((2.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(2006,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(2106,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((3.0/5.0)+0.02)).AND. (rmm(i).GE.((3.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(2007,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(2107,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
IF ((rmm(i) .LE. ((4.0/5.0)+0.02)).AND. (rmm(i).GE.((4.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(20071,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
WRITE(21071,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
IF (rmm(i) .LT. 0.14) THEN
WRITE(2010,*)planetname(i-1),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i), errhipd(i)
WRITE(2110,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ELSE
WRITE(2008,*)planetname(i-1),rmm(i), errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),
errhipd(i)
WRITE(2108,*)rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hip(i),errhipu(i),errhipd(i)
ENDIF
ENDIF
```

```
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
!!!!!!!!!MASSAS NULAS!!!!!!!!!
IF (m(i) .NE. 0) THEN
WRITE(15,*)planetname(i),m(i)
WRITE(151,*)m(i)
ENDIF
!IF ((m(i) .EQ. 0) .AND. (m(i) .EQ. msini(i))) THEN
! m3(i) = (((radius(i)*11.209)**(2.06))*(1/317.83))
! WRITE(15,*)planetname(i),m(i),
m3(i),a(i),radius(i)
!PRINT*,",planetname(i),m(i), m3(i)
! WRITE(151,*)planetname(i),m(i), m3(i),a(i),radius(i)
!IF ( ((radius(i)/11.209) .LE. (3.8*(1/11.209)) .AND. (radius(i) .NE. 0.0))) THEN
! m2(i) = (1/317.83)*((10**(0.60))*(10**(0.32*log(11.209*radius(i)))))
! ELSE
! IF (((radius(i)/11.209) .GT. (3.8*(1/11.209)) .AND. (radius(i) .NE. 0.0))) THEN
!m2(i) = (1/317.83)*((10**(-0.13))*(10**(2.18*log(11.209*radius(i)))))
! ENDIF
! ENDIF
! ELSE
! IF ((m(i) .EQ. 0) .AND. (m(i) .NE. msini(i))) THEN !
! m1(i) = msini(i)
! ! ENDIF
! ENDIF
```

```
!!!!!!!!!SOMA DAS MASSAS!!!!!!!!!
IF ((i.GE.2) .AND. (starname(i).EQ.starname(i-1))) THEN
IF (m(i) .EQ. 0) THEN
m(i) = msini(i)
errmu(i) = errmsiniu(i)
errmd(i) = errmsinid(i)
ELSE
IF (m(i-1) .EQ. 0) THEN
m(i-1) = msini(i-1)
errmu(i-1) = errmsiniu(i-1)
errmd(i-1) = errmsinid(i-1)
ENDIF
ENDIF
IF ((m(i) .EQ. 0) .OR. (m(i-1) .EQ. 0)) THEN
mt(i) = 0
ELSE
mt(i) = m(i)+m(i-1)
errmtu(i) = SQRT((errmu(i))**2+(errmu(i-1))**2)
errmtd(i) = SQRT((errmd(i))**2+(errmd(i-1))**2)
WRITE(3009,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i), hi-
ecc(i)
WRITE(3109,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
IF ((rmm(i).LE. ((1.0/2.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/2.0)-0.02))) THEN
WRITE(3000,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),
hiecc(i)
WRITE(3100,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((2.0/3.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/3.0)-0.02))) THEN
WRITE(3001,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),
hiecc(i)
WRITE(3101,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
```

```
IF ((rmm(i).LE. ((1.0/3.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/3.0)-0.02))) THEN
WRITE(3002,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),
hiecc(i)
WRITE(3102,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((1.0/4.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/4.0)-0.02))) THEN
WRITE(3003,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),
hiecc(i)
WRITE(3103,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((3.0/4.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/4.0)-0.02))) THEN
WRITE(3004,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),
hiecc(i)
WRITE(3104,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((1.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. (0.14))) THEN
WRITE(3005,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),
hiecc(i)
WRITE(3105,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((2.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(3006,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i), errrmmd(i),
hiecc(i)
WRITE(3106,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((3.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(3007,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i),hiecc(i)
WRITE(3107,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((4.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((4.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(30071,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),
```

```
errrmmd(i),hiecc(i)
WRITE(31071,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),
errrmmu(i),errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
IF (rmm(i) .LT. 0.14) THEN
WRITE(3010,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i),hiecc(i)
WRITE(3110,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i),hiecc(i)
ELSE
WRITE(3008,*)starname(i),mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i),hiecc(i)
WRITE(3108,*)mt(i),errmtu(i),errmtd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i),hiecc(i)
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
!!!!!!!!!CENTRO ESTÁVEL!!!!!!!!!
IF (i .GT. 1) THEN
IF (m(i) .EQ. 0) THEN
m(i) = msini(i)
errmu(i) = errmsiniu(i)
errmd(i) = errmsinid(i)
```

```
ELSE
IF (m(i-1) .EQ. 0) THEN
m(i-1) = msini(i-1)
errmu(i-1) = errmsiniu(i-1)
errmd(i-1) = errmsinid(i-1)
ENDIF
ENDIF
IF (m(i) .EQ. 0) THEN
rm(i) = 0
errrmu(i) = 0
errrmd(i) = 0
errrmu(i-1) = 0
errrmd(i-1) = 0
!PRINT*,",ratiomass(i)
ELSE
rm(i) = (m(i-1)/m(i))
errrmu(i) =ratiomass(i)*SQRT((errmu(i-1)/m(i-1))**2+(errmu(i)/m(i))**2)
errrmd(i) =ratiomass(i)*SQRT((errmd(i-1)/m(i-1))**2+(errmd(i)/m(i))**2)
rmm(i) = p(i)/p(i-1)
errrmmu(i) = rmm(i)*SQRT((errpu(i-1)/p(i-1))**2+(errpu(i)/p(i))**2)
errrmmd(i) = rmm(i)*SQRT((errpd(i-1)/p(i-1))**2+(errpd(i)/p(i))**2)
!PRINT*,",ratiomass(i)
if (ratiomass(i) .NE. 0) then
!print*,",planetname(i-1),ratiomass(i),errratiomassu(i),
! errratiomassd(i),rmm(i),errrmmu(i),
! errrmmu(i)
IF ((rmm(i).LE. ((1.0/2.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/2.0)-0.02))) THEN
WRITE(4000,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(4100,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
```

```
IF((rmm(i).LE. ((2.0/3.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/3.0)-0.02))) THEN
WRITE(4001,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(4101,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
IF((rmm(i).LE. ((1.0/3.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/3.0)-0.02))) THEN
WRITE(4002,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(4102,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((1.0/4.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/4.0)-0.02))) THEN
WRITE(4003,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(4103,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((3.0/4.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/4.0)-0.02))) THEN
WRITE(4004,*)planetname(i- 1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(4104,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((1.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. (0.14))) THEN
WRITE(4005,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(4105,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((2.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(4006,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
```

```
errrmmd(i)
WRITE(4106,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((3.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(4007,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(4107,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((4.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((4.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(40071,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(41071,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
IF (rmm(i) .LT. 0.14) THEN
WRITE(4010,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(4110,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
ELSE
WRITE(4008,*)planetname(i-1),rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
WRITE(4108,*)rm(i),errrmu(i),errrmd(i),rmm(i),errrmmu(i),
errrmmd(i)
endif
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
```

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

!!!!!!!!!HILL STABILITY!!!!!!!!!

crht(1) = 0

IF((i .GE. 2) .AND. ((a(i-1) .NE. 0).AND.(a(i) .NE. 0))) THEN

IF (((m(i).NE. 0) .AND. (m(i-1).NE. 0.0)) .AND. (starmass(i) .NE. 0.0)) THEN

sm(i)= m(i-1)+m(i)

sa(i)=a(i-1)+a(i)

sigma$_{h}ill_{m}(i) = (1/3)*((((m(i)+m(i-1))/3*starmass(i))**(-2/3))*((a(i)+a(i-1))/2))$

!cont=cont+1

rh(i) = (((sm(i)/(3*starmass(i)*1047.348))**(0.333333))*(sa(i)/2))

scaled(i) = (sm(i)/(3*star$_{m}ass(i)*1047.348)$)

crh(i)=ABS((a(i-1)-a(i)))/rh(i)

!!CRITÉRIO DE GIUPPONE!!

delta(i) = 1.57*((a(i)*(m(i)/star$_{m}ass(i)$*1047.348)**(2/7)+$a(i-1)*(m(i-1)/star_{m}ass(i-1)*1047.348)**(2/7)$))

IF (delta(i) .GE. ABS((a(i-1)-a(i)))) THEN

!PRINT*,'Estavel-',delta(i),ABS((a(i-1)-a(i)))

ELSE

!PRINT*,'Instavel-',delta(i),ABS((a(i-1)-a(i)))

ENDIF

!!CRITÉRIO DE GLADMANN!!

IF (crh(i) .LT. 2*SQRT(3.0)) THEN

WRITE(516,*)crh(i),rmm(i),planet$_{n}ame(i), planetname(i-1), hiecc(i)$

ELSE

IF (starname(i) .EQ. starname(i-1)) THEN crht(i) = crht(i)+crh(i)

ENDIF

!PRINT*,",planetname(i),planetname(i-1),starname(i)

WRITE(504,*)crh(i),rmm(i),star$_mass(i) * 1047.348, hiecc(i), sm(i)$

WRITE(5504,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i),planetname(i), planet$_name(i-1)$

!WRITE(505,*)crh(i),rmm(i),starname(i),star$_mass(i) * 1047.348, scaled(i)$

IF(((rmm(i).LE. ((1.0/2.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/2.0)-0.02)))) THEN

!PRINT*,",crh(i),rmm(i),planet$_name(i), planetname(i-1), hiecc$

WRITE(506,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)

WRITE(5506,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)

ELSE

IF ((rmm(i).LE. ((2.0/3.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/3.0)-0.02))) THEN

WRITE(507,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)

WRITE(5507,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)

ELSE

IF ((rmm(i).LE. ((1.0/3.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/3.0)-0.02))) THEN

WRITE(508,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)

WRITE(5508,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)

ELSE

IF ((rmm(i).LE. ((1.0/4.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((1.0/4.0)-0.02))) THEN

WRITE(509,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)

WRITE(5509,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)

ELSE

IF ((rmm(i).LE. ((3.0/4.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/4.0)-0.02))) THEN

WRITE(510,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)

WRITE(5510,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),star$_name(i)$

ELSE

IF ((rmm(i).LE. ((1.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. (0.14))) THEN

WRITE(511,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)

WRITE(5511,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)

ELSE

```
IF ((rmm(i).LE. ((2.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((2.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(512,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)
WRITE(5512,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((3.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((3.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(513,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)
WRITE(5513,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)
ELSE
IF ((rmm(i).LE. ((4.0/5.0)+0.02)) .AND. (rmm(i) .GE. ((4.0/5.0)-0.02))) THEN
WRITE(5131,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)
WRITE(55131,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)
ELSE
IF (rmm(i) .LT. 0.14) THEN
WRITE(514,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)
WRITE(5514,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)
ELSE
WRITE(515,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i)
WRITE(5515,*)crh(i),rmm(i),starmass(i)*1047.348,hiecc(i),starname(i)
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
120 ENDDO
```

DO i1 = 0,500

ratio$_{m}ass(i1) = (0.002 * i1) * *(1.3333333)$

WRITE(500,*)i1*0.002,ratio$_{m}ass(i1)$

!PRINT*,”,i1*0.002,ratio$_{m}ass(i1)$

ENDDO

ENDPROGRAM

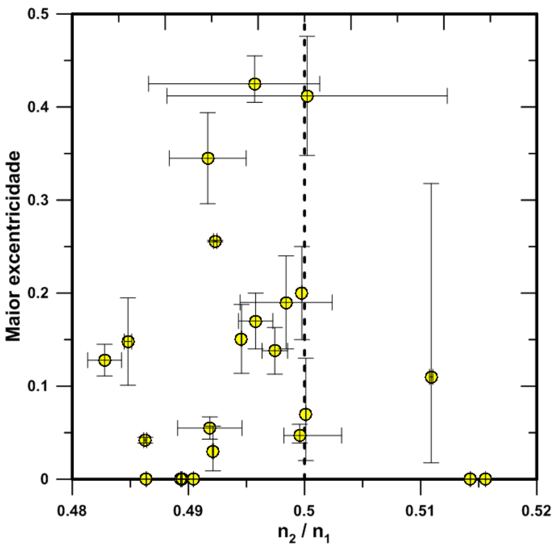
Apêndice B

Distribuições das excentricidades

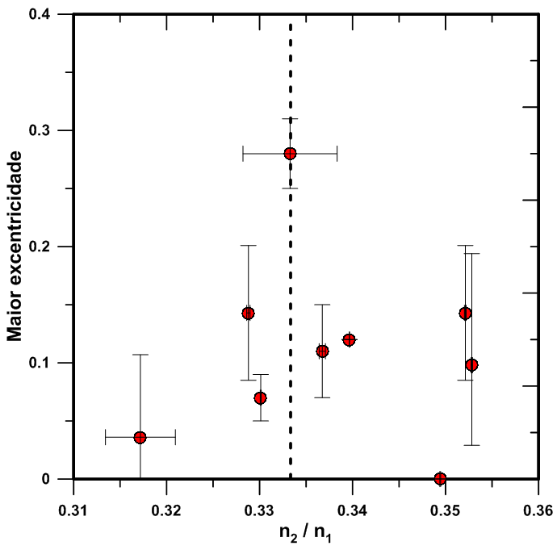
Neste apêndice estão os painéis com as distribuições das maiores excentricidades de cada par (círculos) de planeta vizinhos em função da razão dos movimentos médios.

As linhas tracejadas verticais indicam a posição exata das razões de movimentos médios. A legenda de cada painel indica a ressonância em torno da qual os pares estão distribuídos.

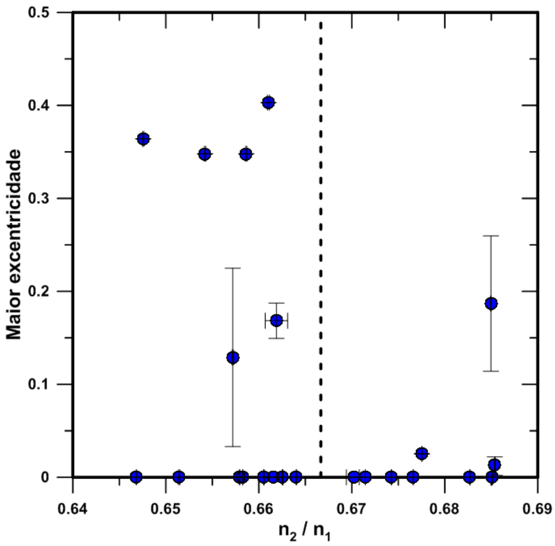
As barras de erro nas excentricidades foram obtidas a partir das bases de dados, enquanto que os erros nas razões dos movimentos médios foram calculados pelos métodos de propagação de erros.



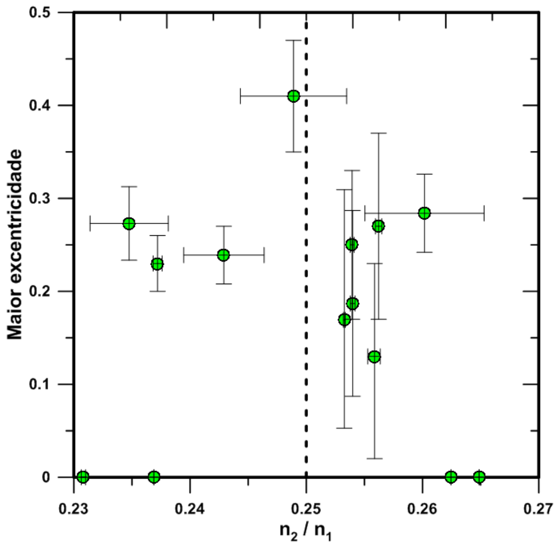
(a) 2/1



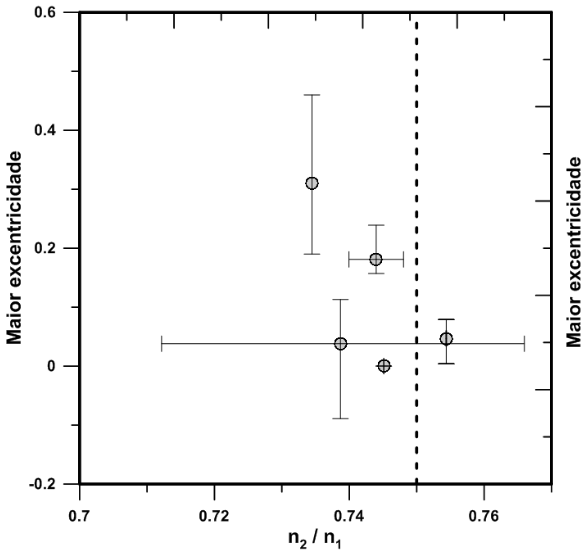
(b) 3/1



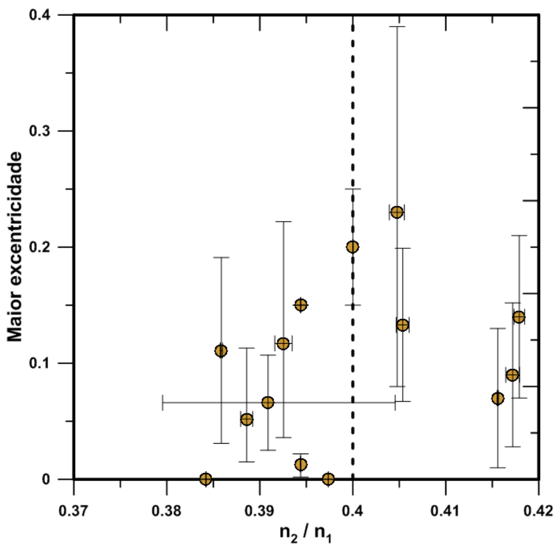
(c) 3/2



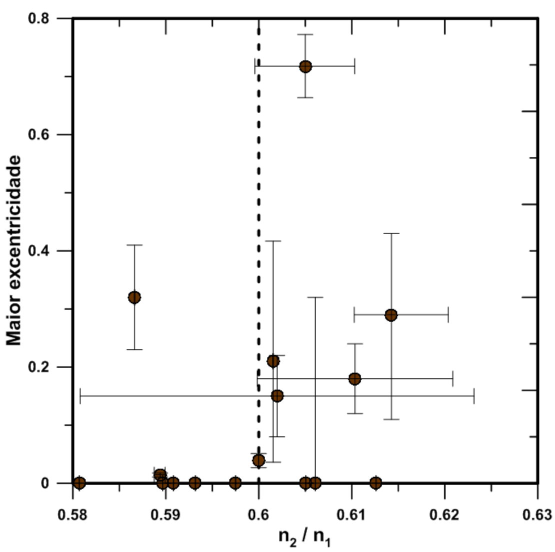
(d) 4/1



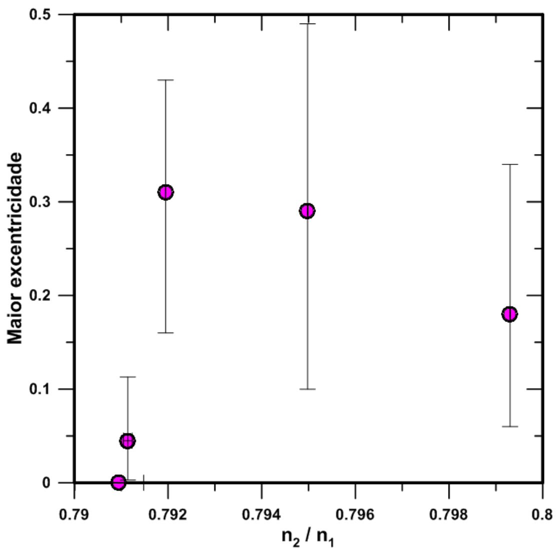
(e) 4/3



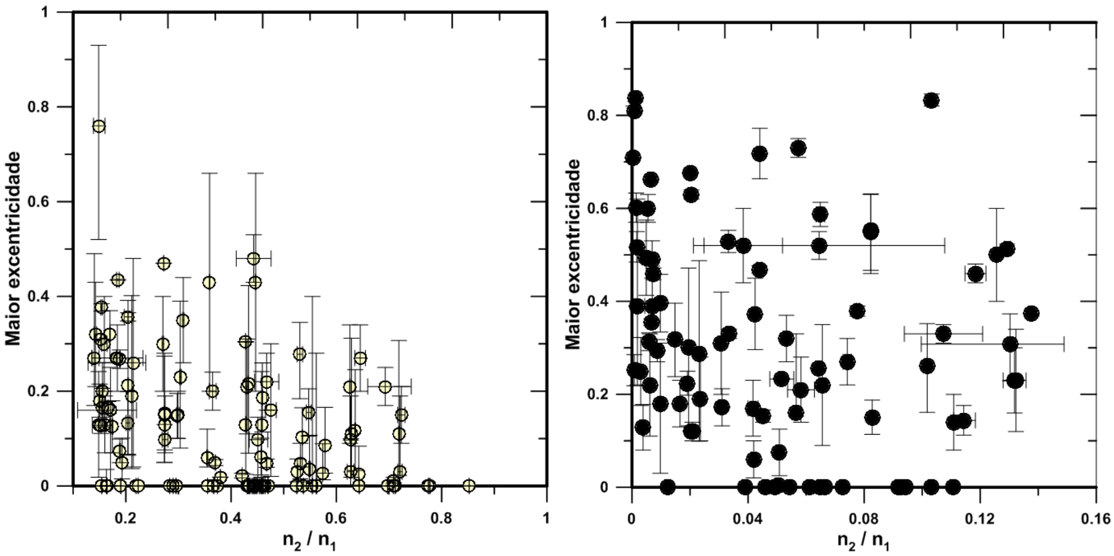
(f) 5/2



(g) 5/3



(h) 5/4



(i) Seculares

(j) Hierárquicos

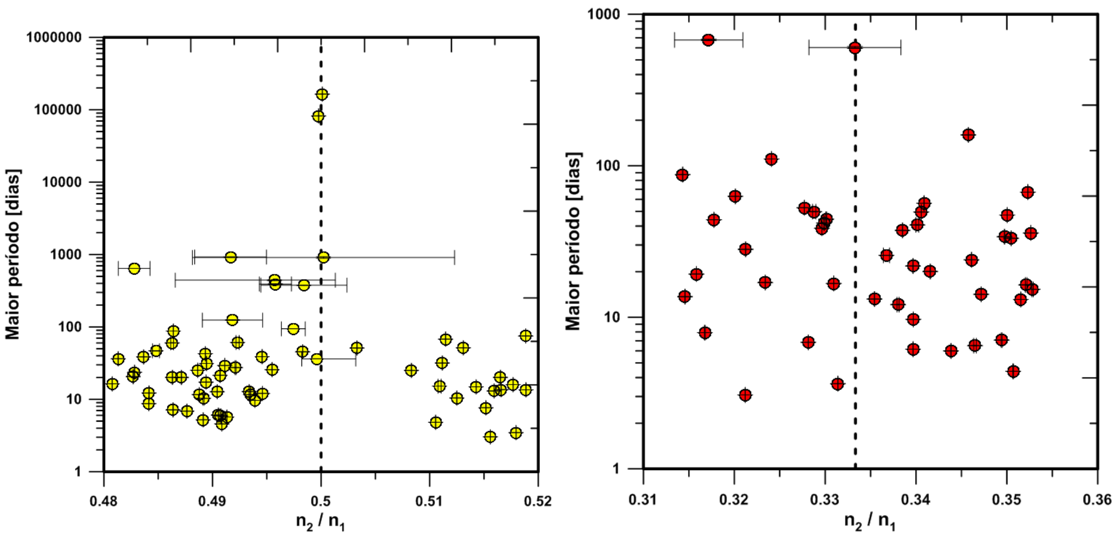
Apêndice C

Distribuições dos períodos

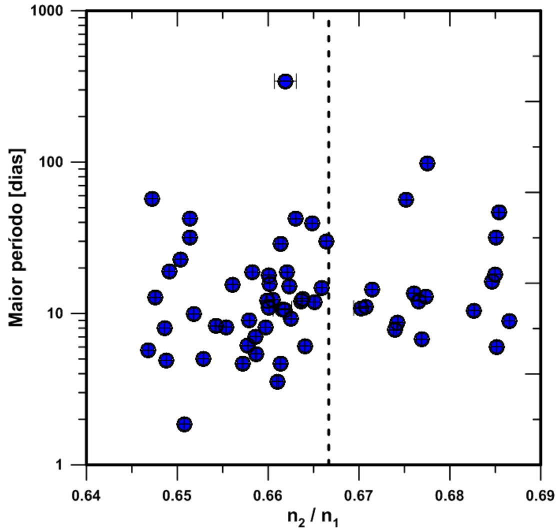
Neste apêndice estão os painéis com as distribuições dos maiores períodos de cada par (círculos) de planeta vizinhos em função da razão dos movimentos médios.

As linhas tracejadas verticais indicam a posição exata das razões de movimentos médios. A legenda de cada painel indica a ressonância em torno da qual os pares estão distribuídos.

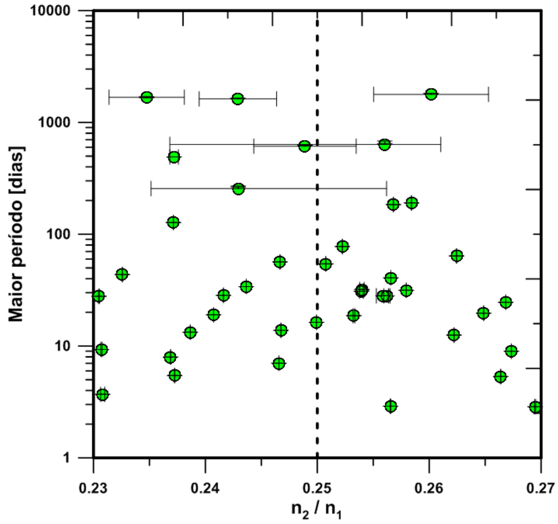
As barras de erro nos períodos foram obtidas a partir das bases de dados, enquanto que os erros nas razões dos movimentos médios foram calculados pelos métodos de propagação de erros.



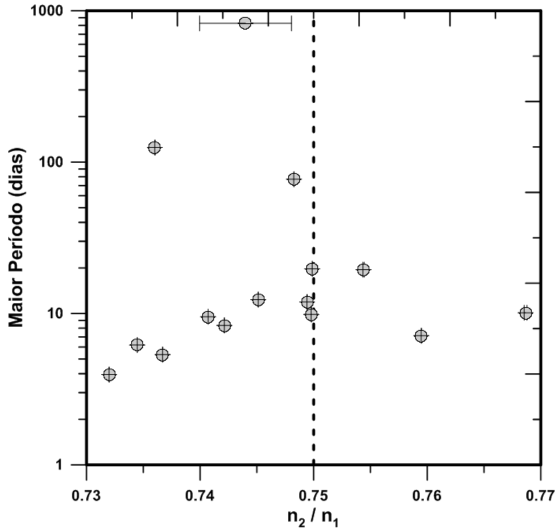
(a) 2/1 (b) 3/1



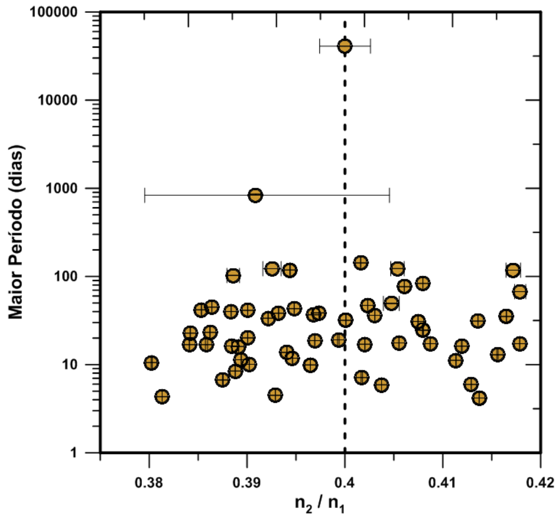
(c) 3/2



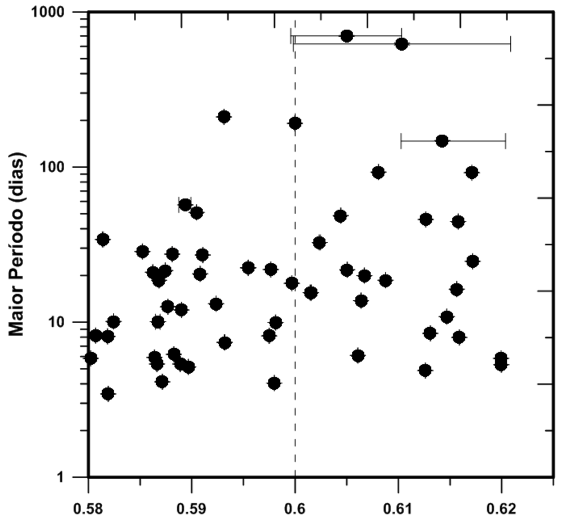
(d) 4/1



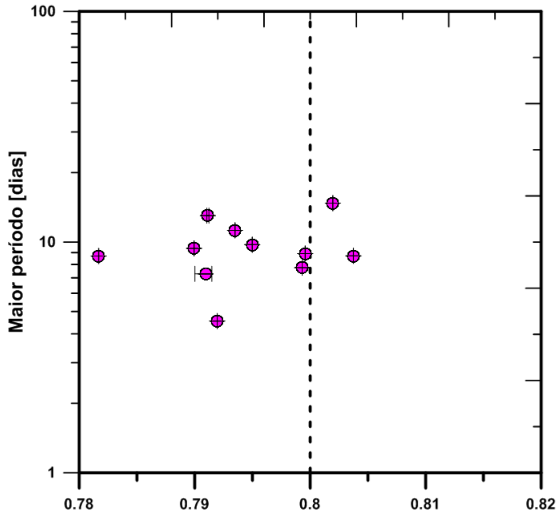
(e) 4/3



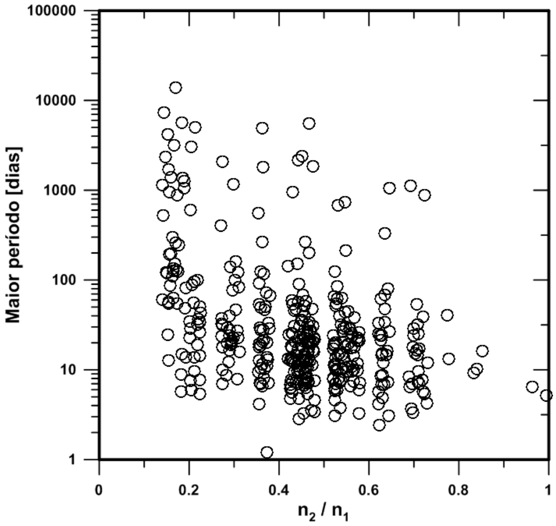
(f) 5/2



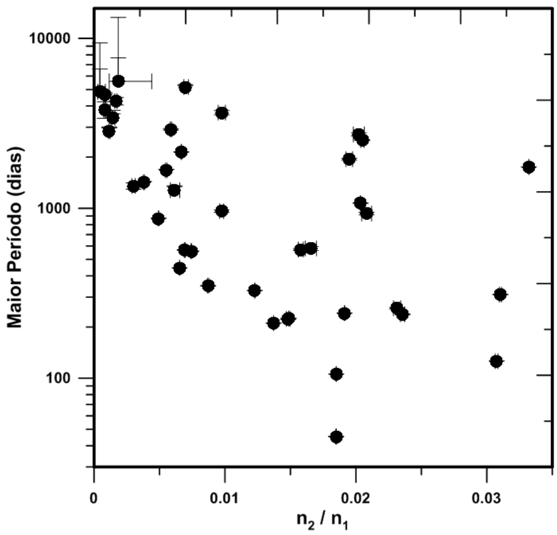
(g) 5/3



(h) 5/4



(i) Seculares



(j) Hierárquicos

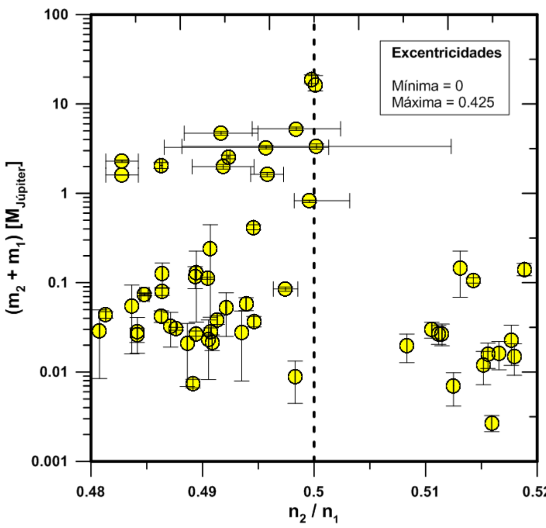
Apêndice D

Distribuições das soma das massas dos pares

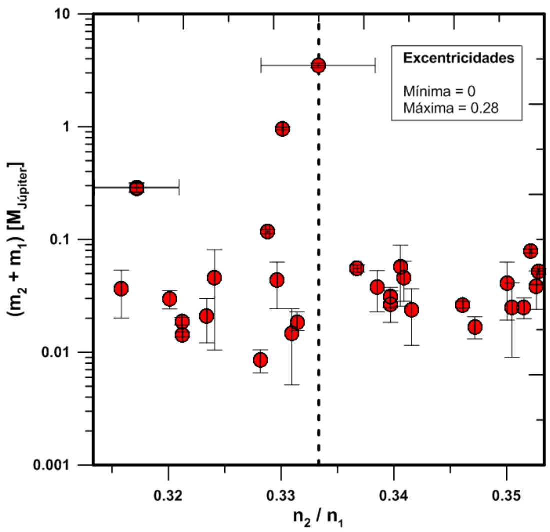
Neste apêndice estão os painéis com as distribuições das soma das massas dos exoplanetas vizinhos (círculos) em função da razão dos movimentos médios.

As linhas tracejadas verticais indicam a posição exata das razões de movimentos médios. A legenda de cada painel indica a ressonância em torno da qual os pares estão distribuídos.

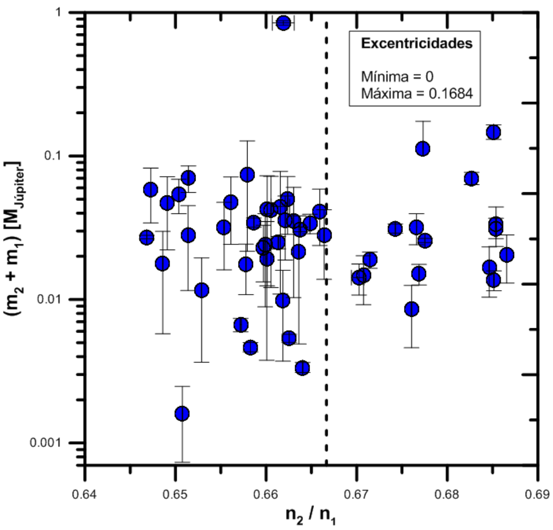
As barras de erro nas soma das massas e das razões de movimentos médios foram obtidas via fórmulas de propagação de erros.



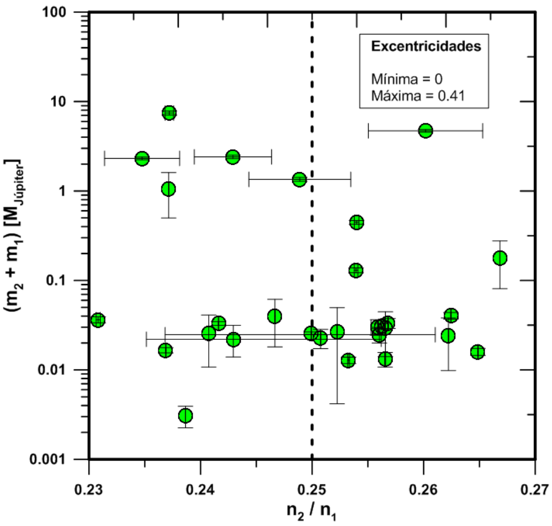
(a) 2/1



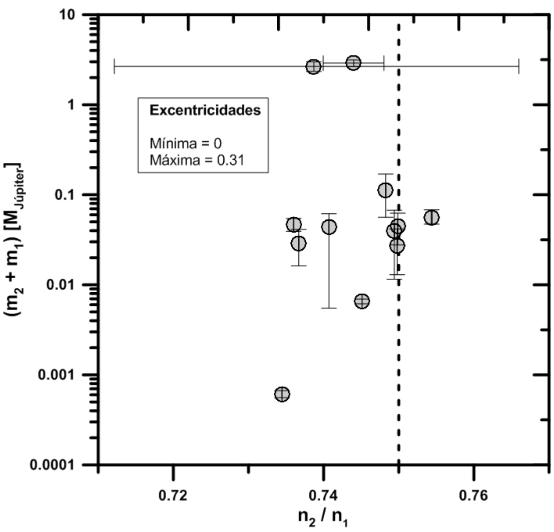
(b) 3/1



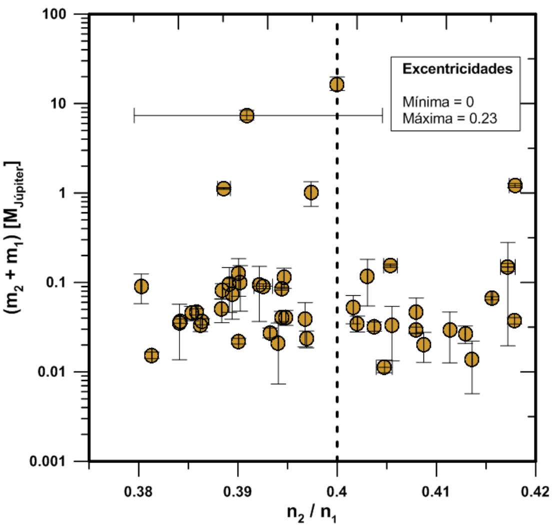
(c) 3/2



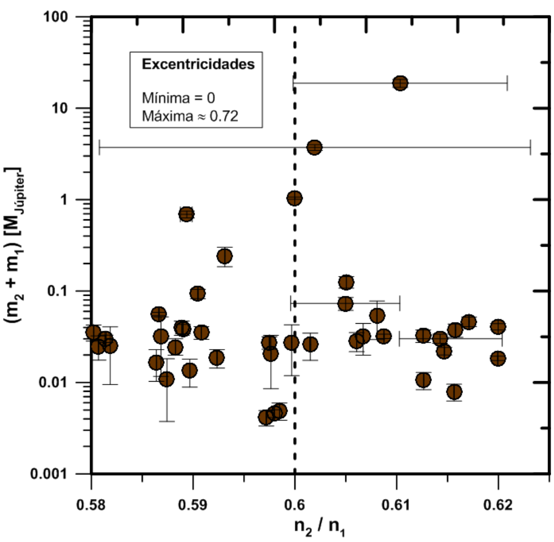
(d) 4/1



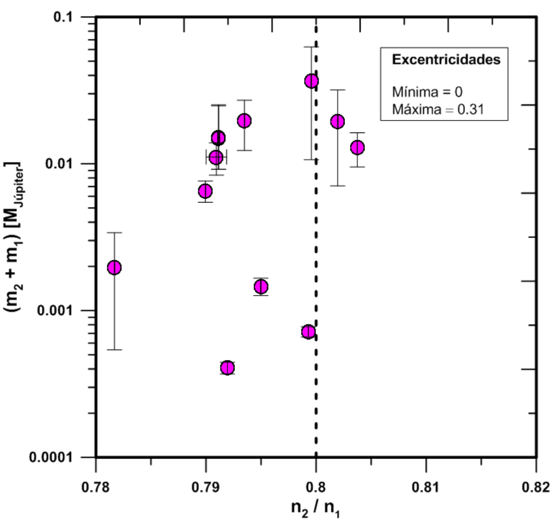
(e) 4/3



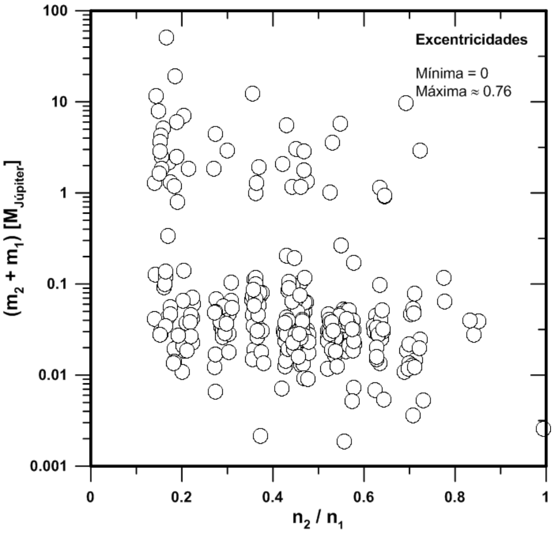
(f) 5/2



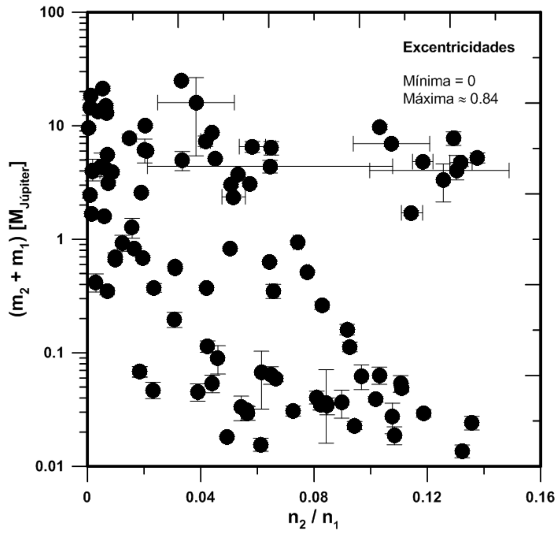
(g) 5/3



(h) 5/4



(i) Seculares



(j) Hierárquicos

Apêndice E

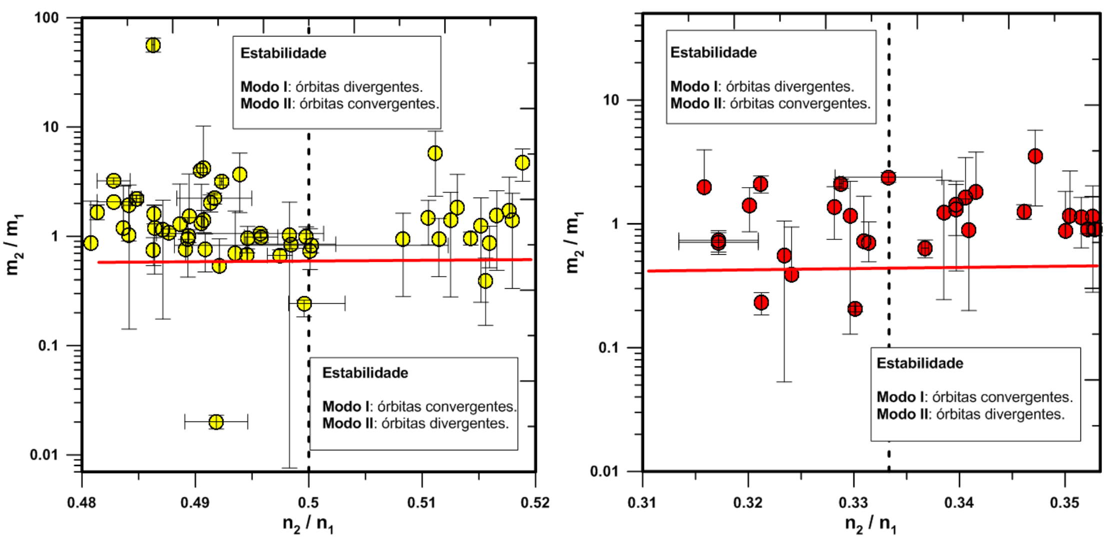
Distribuições dos centros estáveis

Neste apêndice estão os painéis com as distribuições dos centros estáveis de movimento do ângulo $\Delta\varpi$ para os pares de planetas.

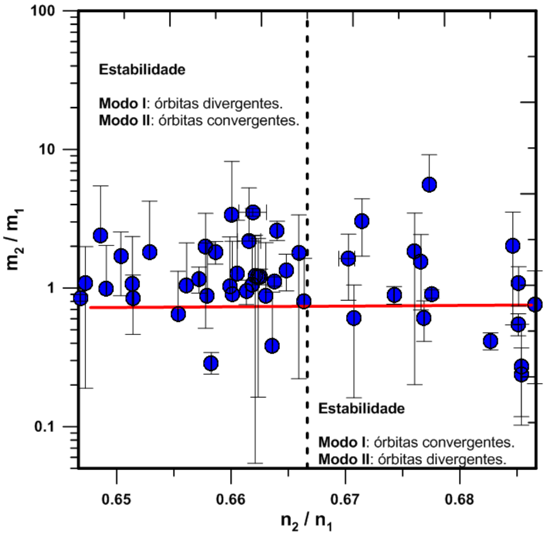
As linhas tracejadas verticais indicam a posição exata das razões de movimentos médios. A legenda de cada painel indica a ressonância em torno da qual os pares estão distribuídos.

As barras de erro nas razões das massas e das razões de movimentos médios foram obtidas via fórmulas de propagação de erros.

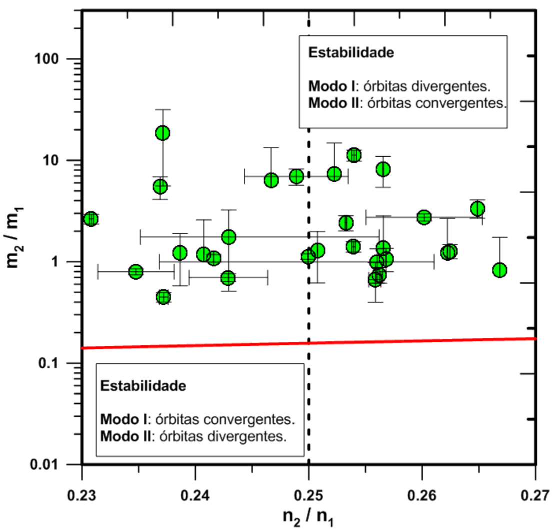
A linha vermelha representa a condição de transição descrita pela Eq. (6.5).



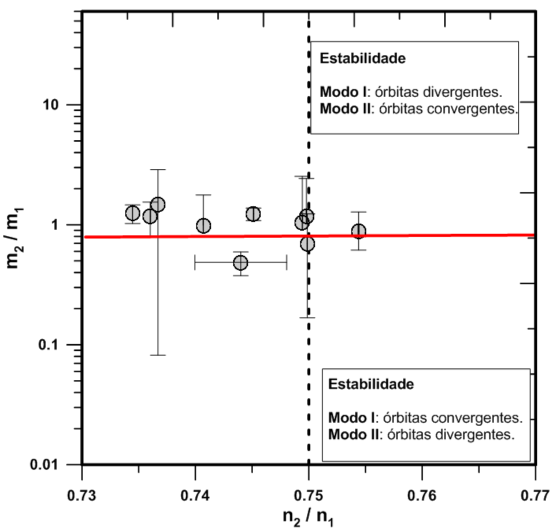
(a) 2/1 (b) 3/1



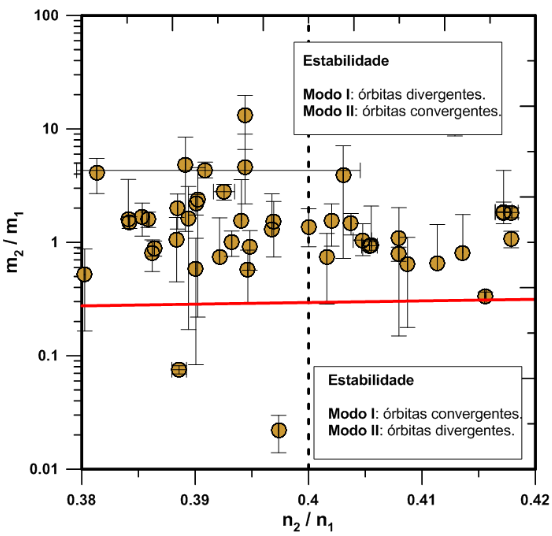
(c) 3/2



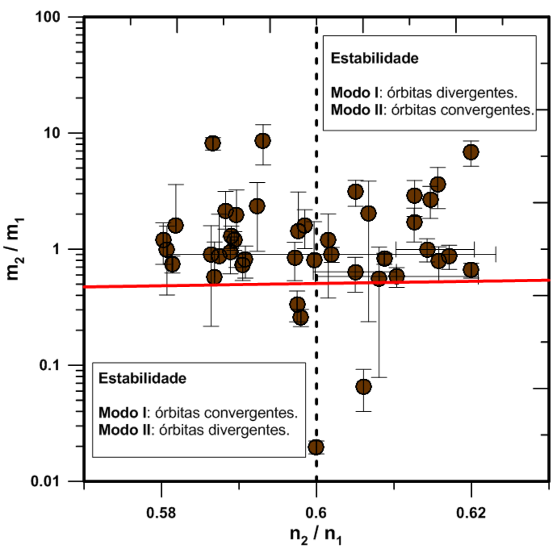
(d) 4/1



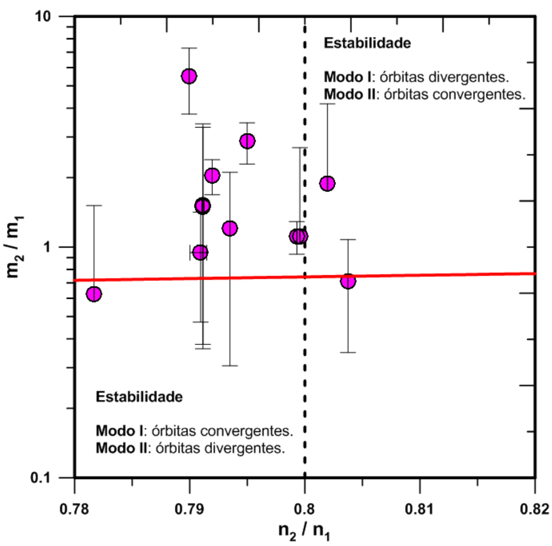
(e) 4/3



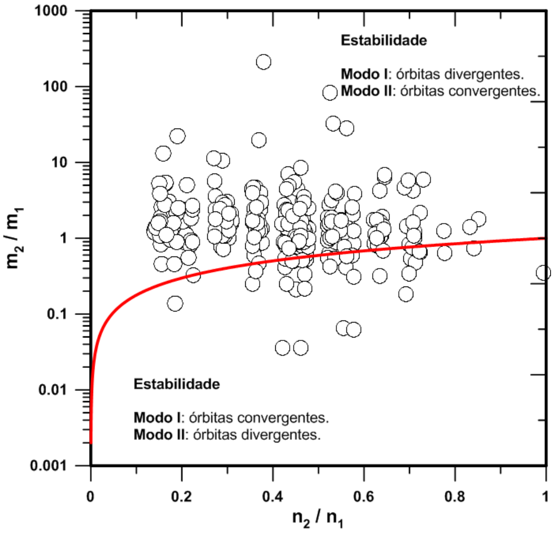
(f) 5/2



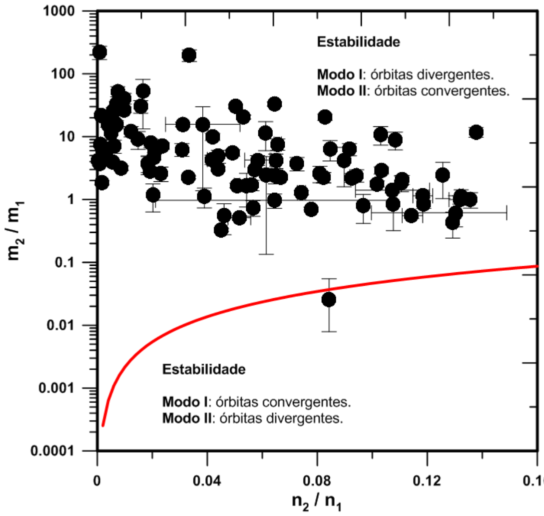
(g) 5/3



(h) 5/4



(i) Seculares



(j) Hierárquicos

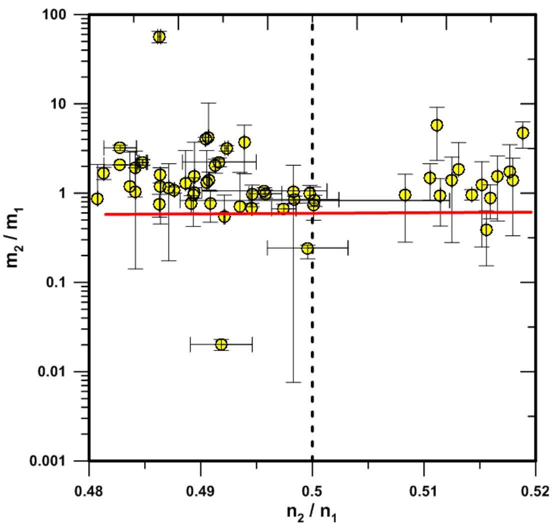
Apêndice F

Distribuições da Razão das Massas

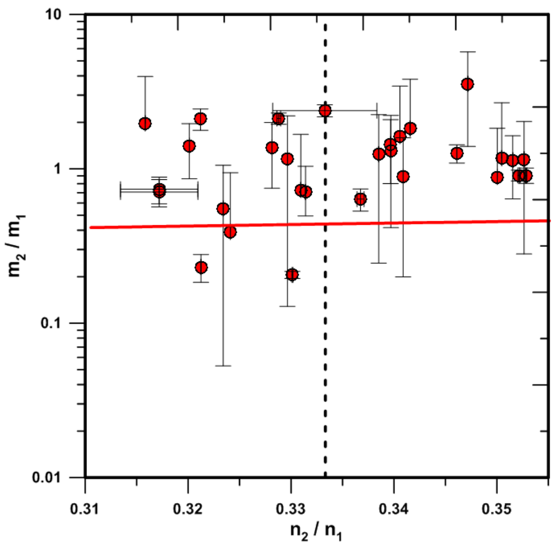
Neste apêndice estão os painéis com as distribuições das razões das massas dos pares de exoplanetas vizinhos em termos das razões de movimentos médios.

As linhas tracejadas verticais indicam a posição exata das razões de movimentos médios. A legenda de cada painel indica a ressonância em torno da qual os pares estão distribuídos.

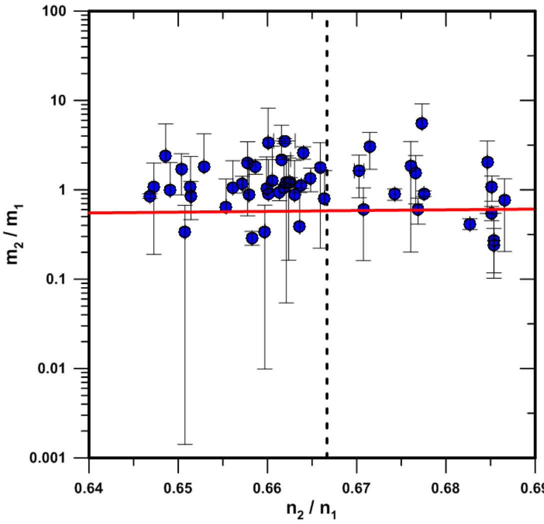
As barras de erro nas razões das massas e das razões de movimentos médios foram obtidas via fórmulas de propagação de erros.



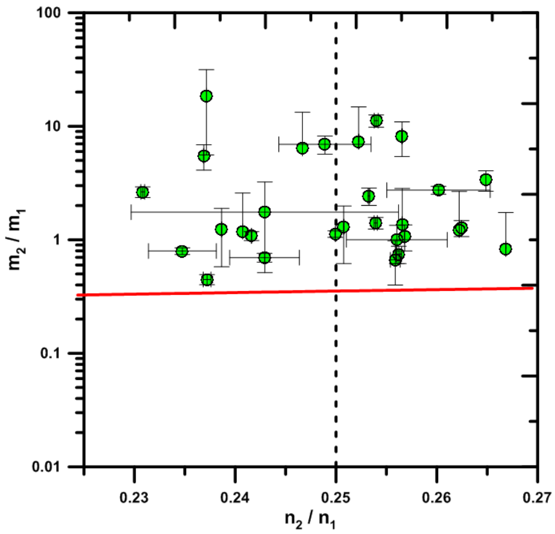
(a) 2/1



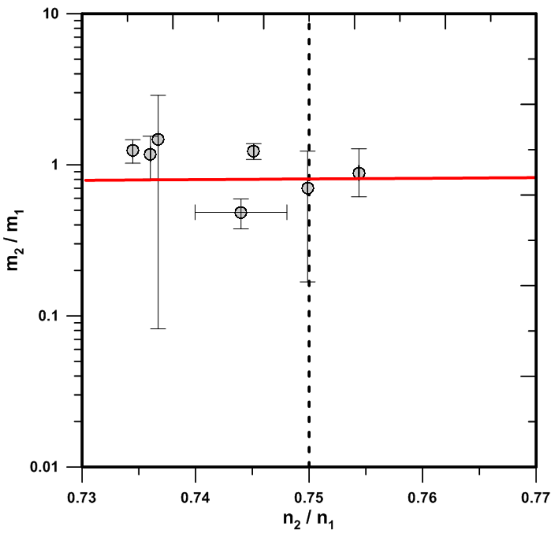
(b) 3/1



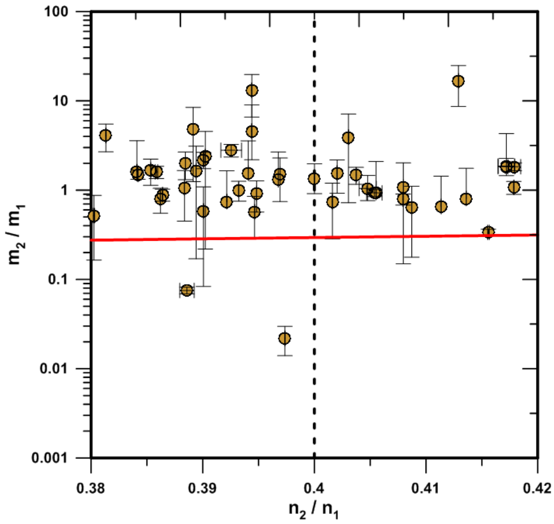
(c) 3/2



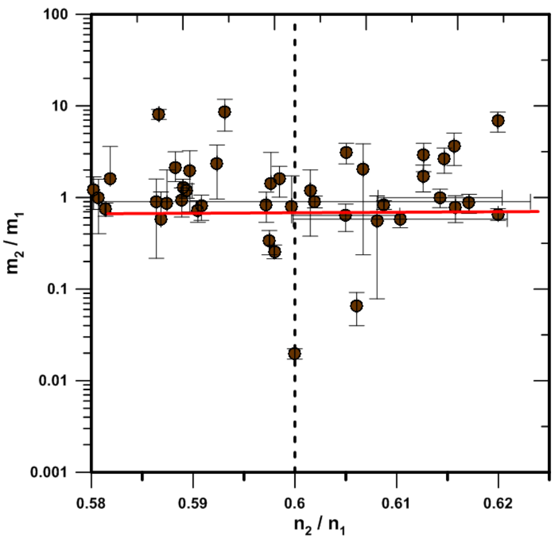
(d) 4/1



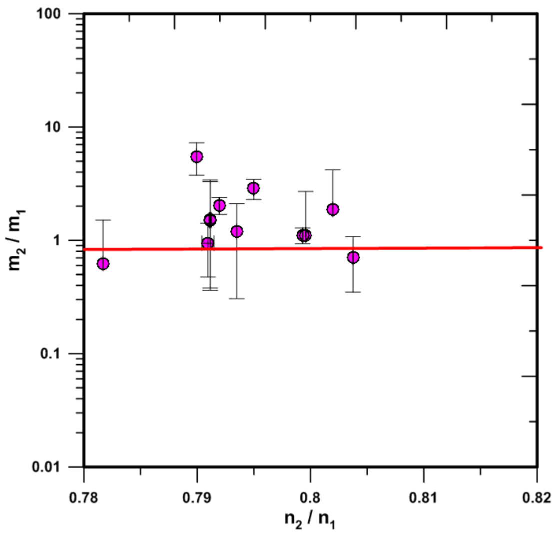
(e) 4/3



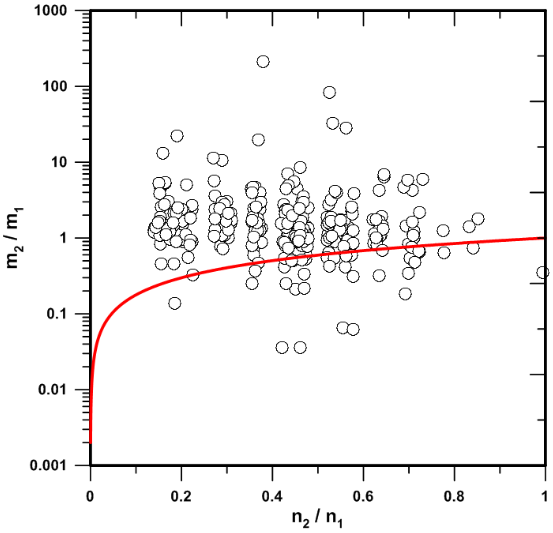
(f) 5/2



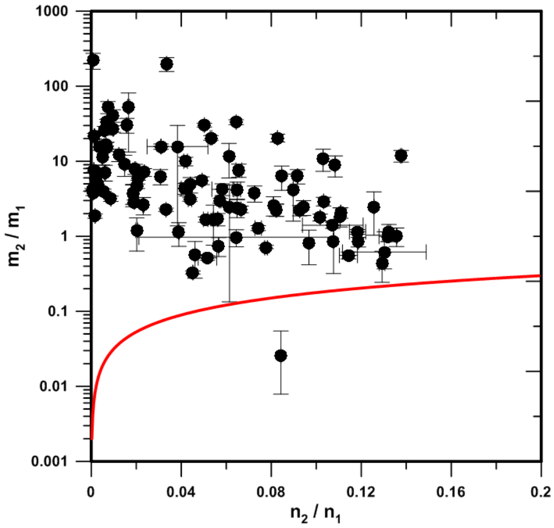
(g) 5/3



(h) 5/4



(i) Seculares



(j) Hierárquicos

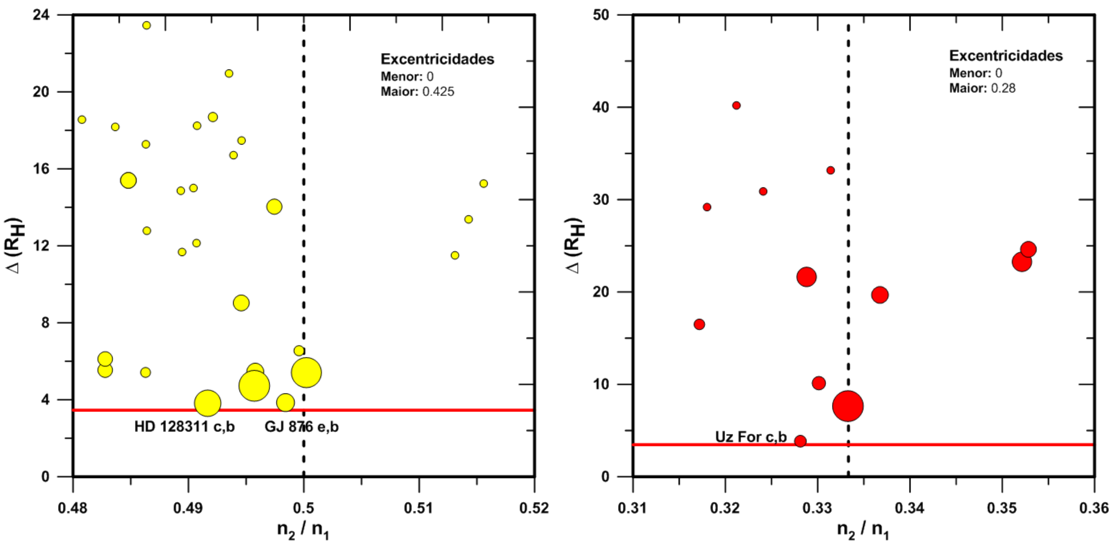
Apêndice G

Distribuições das distâncias mútuas.

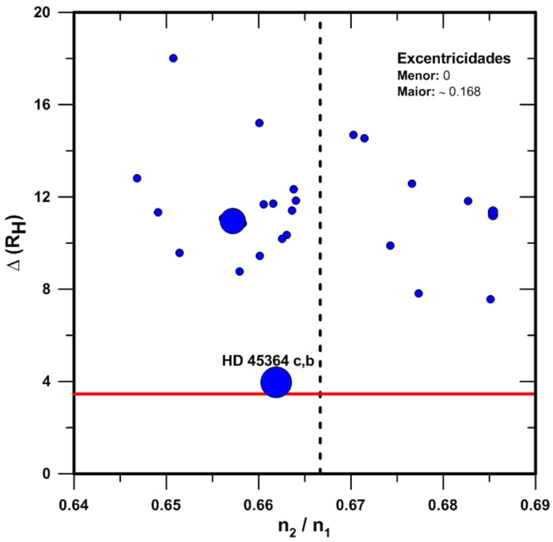
Neste apêndice estão os painéis com as distribuições das distâncias mútuas entre exoplanetas vizinhos (medidas em Raios de Hill) termos das razões de movimentos médios.

As linhas tracejadas verticais indicam a posição exata das razões de movimentos médios. A legenda de cada painel indica a ressonância em torno da qual os pares estão distribuídos.

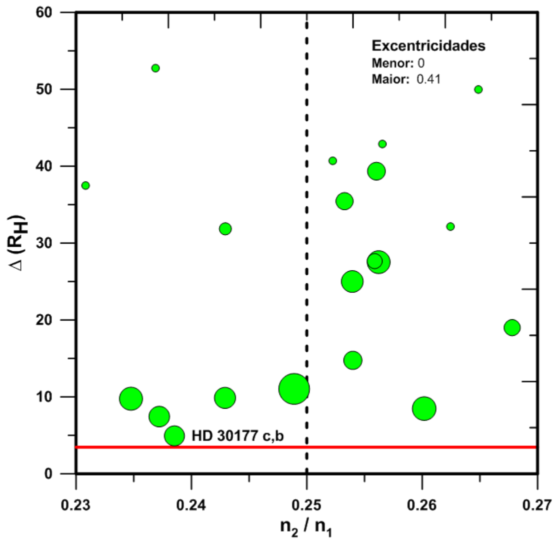
O raio dos círculos são proporcionais à excentricidade mais alta de cada par. No canto superior direito de cada painel estão os valores mínimo e máximo das excentricidades de cada distribuição.



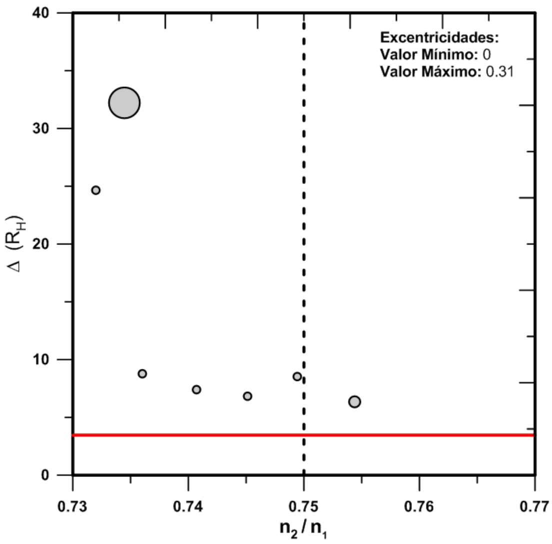
(a) 2/1 (b) 3/1



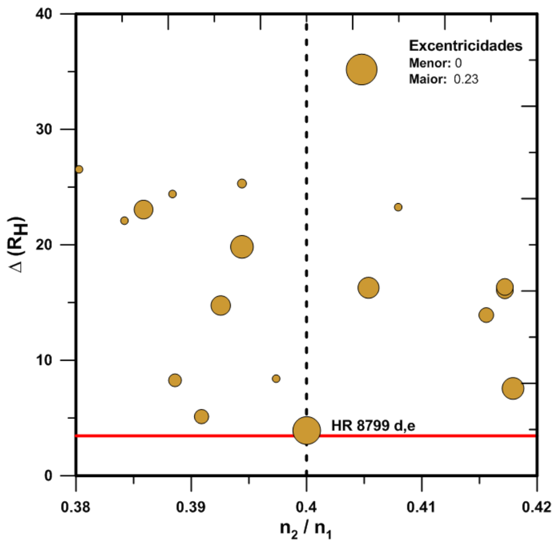
(c) 3/2



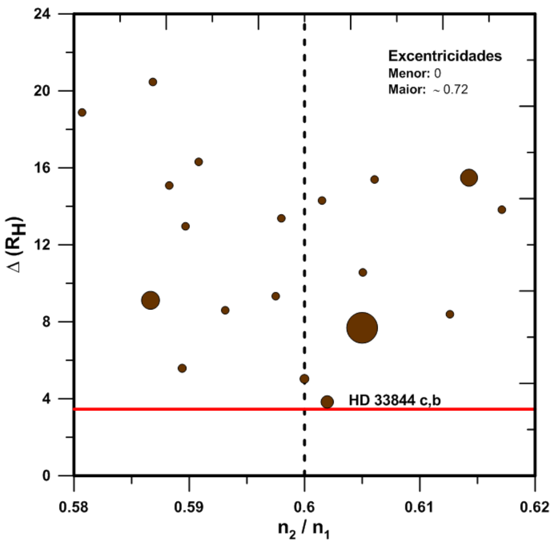
(d) 4/1



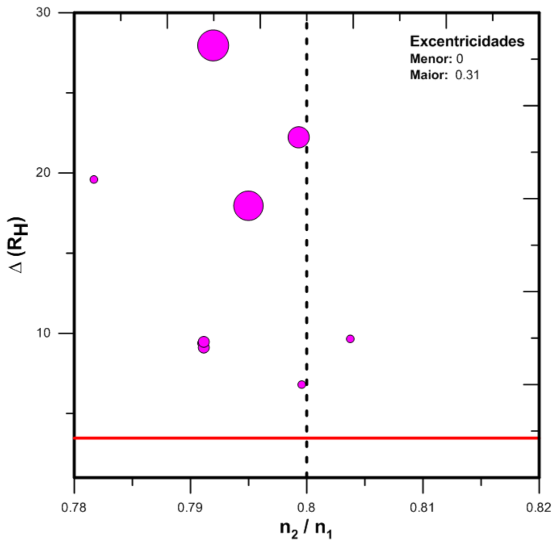
(e) 4/3



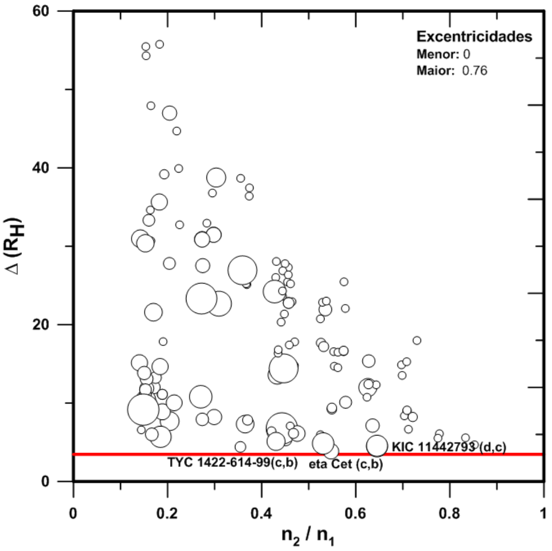
(f) 5/2



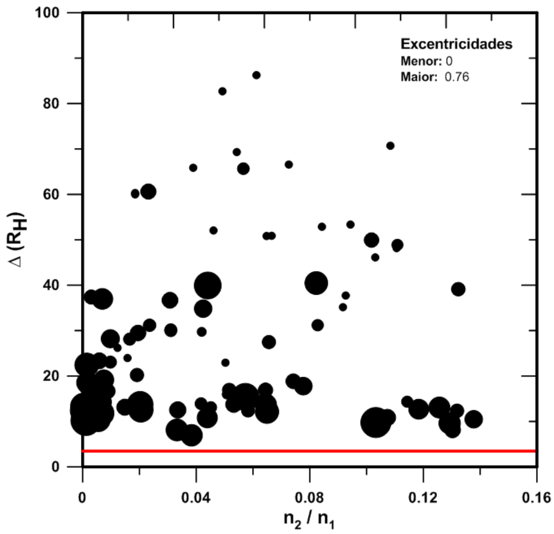
(g) 5/3



(h) 5/4



(i) Seculares



(j) Hierárquicos