

Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Thiago Correr Junqueira

**Estrutura Espiral da Galáxia baseada no
estudo de órbitas estelares**

São Paulo

2013

Thiago Correr Junqueira

Estrutura Espiral da Galáxia baseada no estudo de órbitas estelares

Tese apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências. Versão Corrigida. O original encontra-se disponível na Unidade.

Área de Concentração: Astronomia

Orientador: Prof. Dr. Jacques R. D. Lépine

São Paulo

2013

*Essa tese é dedicada a todas as pessoas que fazem parte da minha vida,
principalmente aos meus pais e amigos.*

Agradecimentos

Agradeço à minha família, em especial minha mãe Carmem e meu pai Paulo, pelo apoio e carinho dado ao longo de todos esses anos.

À minha namorada Juliana, pelo suporte emocional e pela compreensão durante todo este percurso.

Ao meu orientador Jacques Lépine, pelo projeto e pelas discussões construtivas que tivemos ao longo destes quatro anos.

Ao pesquisador e professor Walter Maciel, pelos pareceres positivos aos relatórios do departamento.

Aos colegas e amigos do IAG-USP, principalmente aqueles que sempre estiveram ao meu lado durante os momentos difíceis que todos nós passamos pelo caminho. Em especial ao Gustavo Rocha, Grzegorz kowal, Vinicius C. Busti, Carlos de S. Braga, Douglas A. de Barros, Felipe A. Oliveira, Reinaldo S. de Lima e Oscar Cavichia.

Gostaria de agradecer a todos os funcionários do instituto, pois sem a ajuda diária deles seria muito difícil a realização desse trabalho.

À CNPq, pelo apoio financeiro.

“Qual a resposta para a vida o universo e tudo mais?”

Douglas Adams

*“Todos os grandes feitos são simples, e muitos podem ser expressados em palavras únicas:
liberdade, justiça, honra, dever, misericórdia, esperança.”*

Winston Churchill

Resumo

Propomos uma nova descrição, mais realista, para o potencial gravitacional perturbador das galáxias espirais. Esse potencial tem a forma de um poço com um perfil Gaussiano. O objetivo é encontrar uma descrição auto-consistente da estrutura espiral, ou seja, a perturbação inicialmente imposta no potencial gera, mediante as órbitas estelares, braços espirais com um perfil semelhante ao da perturbação aplicada. A auto-consistência é uma condição necessária para termos estruturas de longa duração.

Utilizando este novo potencial perturbador investigamos as órbitas periódicas e não periódicas nos discos galácticos, bem como o efeito que algumas ressonâncias podem exercer sobre essas órbitas. Alguns dos modelos gerados foram baseados em nossa Galáxia, pois fazem uso do potencial axissimétrico calculado a partir da curva de rotação Galáctica, além de outros parâmetros de entrada semelhantes aos da nossa Galáxia. A influência da massa do bojo nas órbitas mais internas do disco também foi investigada.

Através de uma análise cinemática, utilizando os aglomerados abertos, calculamos a velocidade do padrão espiral onde obtivemos um valor médio de $23 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. A nova descrição do potencial oferece uma grande vantagem sobre as outras. Nela é possível controlar a largura do potencial, definida pelo parâmetro σ . O contraste de densidade calculado entre os braços e a região interbraços para Galáxia permite uma faixa de valores para a amplitude de perturbação de 400 a $800 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$, implicando uma razão máxima entre a força tangencial e a axissimétrica de aproximadamente 3% a 6%. Adotando um contraste de ~ 0.18 encontramos uma amplitude de perturbação de $600 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$. Uma boa auto-consistência da forma dos braços foi obtida entre a ressonância interna de Lindblad (ILR) e a ressonância 4:1. Perto da ressonância 4:1, a densidade de resposta começa a se desviar do formato em espiral inicialmente imposto. Isto gera bi-

furcações que aparecem como segmentos de braços. Portanto, o desvio de uma espiral logarítmica perfeita, observado em muitas galáxias, pode ser entendido como um efeito natural da ressonância 4:1. Além dessa ressonância encontramos órbitas fechadas que se assemelham com os braços observados em nossa Galáxia. Fora da corrotação, nenhum tipo de auto-consistência foi encontrada, sugerindo que a estrutura espiral não é capaz de se auto-manter além dessa ressonância. Em regiões próximas ao centro, órbitas estelares alongadas aparecem naturalmente na presença de um bojo massivo, sem que se imponha inicialmente qualquer forma de potencial do tipo barra. A perturbação é descrita apenas por meio de uma pequena prolongação da espiral dos braços espirais para dentro da ILR. Isso sugere que a barra possa ser formada por um mecanismo semelhante ao dos braços espirais e seria consequência da existência destes.

O potencial perturbador que adotamos representa um passo importante em direção à auto-consistência, se comparado às descrições anteriores do tipo senoidal. Além disso, o modelo produz uma descrição realista da estrutura espiral, que é capaz de explicar vários detalhes que ainda não foram compreendidos.

Abstract

We propose a new and more realistic description of the perturbed gravitational potential of spiral galaxies. This potential has a Gaussian-shaped groove profile. The aim is to reach a self-consistent description of the spiral structure, that is, one in which an initial potential perturbation generates, by means of the stellar orbits, spiral arms with a profile similar to that of the imposed perturbation. Self-consistency is a necessary condition for having long-lived structures.

Using the new perturbed potential we investigate the periodic and non-periodic stellar orbits in the galactic disk, as well as the influence that some resonances may have over the disk. Some of the generated models were applied to our Galaxy by making use of the axisymmetric component of the potential computed from the Galactic rotation curve, in addition to other input parameters similar to those of our Galaxy. The influence of the bulge mass on the stellar orbits in the inner regions of a disk was also investigated.

Through a kinematic analysis using the open clusters, we calculate the spiral pattern's speed, for which we obtained an average value of $23 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. The new description offers a great advantage over the previous ones. In it is possible to control how wide the potential can be, using the parameter σ . The density contrast computed between the arms and the inter-arms regions for the Galaxy allows a range of values for the perturbation amplitude between 400 up to $800 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$, this implies an approximate maximum ratio of the tangential force to the axisymmetric force between 3% and 6%. Assuming a contrast of ~ 0.18 we find a perturbation amplitude of $600 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$. Good self-consistency of arm shapes was obtained between the Inner Lindblad resonance (ILR) and the 4:1 resonance. Near the 4:1 resonance the response density starts to deviate from the imposed logarithmic spiral form. This creates bifurcations that appear as short arms.

Therefore the deviation from a perfect logarithmic spiral, observed in many galaxies, can be understood as a natural effect of the 4:1 resonance. Beyond the 4:1 resonance we find closed orbits that have similarities with the arms observed in our Galaxy. Outside corotation no kind of self-consistency was found, suggesting that the spiral structure is not able to sustain itself beyond this resonance. In regions near the center, elongated stellar orbits appear naturally in the presence of a massive bulge, without imposing any bar-shaped potential, but only extending the spiral perturbation a little inward of the ILR. This suggests that a bar could be formed by a mechanism similar to that of the spiral arms, being a consequence of it.

The potential energy perturbation that we adopted represents an important step in the direction of self-consistency, compared to previous sine function descriptions of the potential. In addition, our model produces a realistic description of the spiral structure, which is able to explain several details that were not yet understood.

Notação e Convenções adotadas

Neste trabalho adotamos algumas convenções que serão seguidas em toda tese.

A constante gravitacional é sempre representada pela letra G , as densidades são representadas sempre com Σ , e o uso de σ sem a presença de nenhum subíndice refere-se à largura de meia altura da gaussiana, usada para representar os braços espirais do nosso modelo. A letra Φ é usada sempre para se referir aos potenciais e φ é sempre a coordenada azimutal no referencial do padrão espiral.

As unidades fundamentais usadas nesse trabalho são: distâncias em quiloparsec (kpc, $1 \text{ kpc} \equiv 3.086 \times 10^{19} \text{ m}$), massa em massas solares (M_{\odot} , $1 M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$) e tempo em milhões de anos (Ma, $1 \text{ Ma} = 3.1536 \times 10^{13} \text{ s}$). Alguns parâmetros apresentados ao longo da tese podem possuir unidades fundamentais mistas como km, s e kpc. Isso ocorre devido a razões históricas e para melhor visualização de seus valores como é o caso das grandezas, amplitude de perturbação e a velocidade angular do padrão espiral. No entanto, para fins de cálculos todas as grandezas utilizadas são convertidas para as unidades fundamentais de kpc, M_{\odot} e Ma.

Nomes em outros idiomas estão em *itálico*.

Lista de Figuras

1.1	Fotografia da Via Láctea.	26
1.2	Ilustração da Via Láctea.	27
1.3	Espiral logarítmica.	30
1.4	Movimento epicíclico.	33
1.5	Relação de dispersão.	39
1.6	Esquema da força exercida em uma estrela.	41
1.7	Esquema de uma estrela atravessando a Galáxia	42
2.1	Imagem de NGC3938.	52
2.2	Pitch angle vrs velocidade de rotação média.	53
2.3	Pitch angle vrs tipo morfológico.	53
2.4	Distribuição de idade dos aglomerados.	56
2.5	Órbita integrada de M67.	58
2.6	Potencial efetivo da Galáxia.	59
2.7	Transformação de coordenadas.	60
2.8	Medida de Ω_p	64
3.1	Arranjo de orbitas elípticas rotacionadas entre si.	68
3.2	Perfil de densidade azimutal.	73
3.3	Mapa do potencial perturbador.	73
3.4	Força radial devida aos braços espirais.	74
3.5	Contraste de densidade.	77
4.1	Esquema de um referencial em rotação.	79
4.2	Potencial axissimétrico.	82

4.3	Teste entre Si6 e RK5.	83
4.4	Fluxograma.	85
4.5	Seção de Poincaré.	87
4.6	Seção de Poincaré.	88
4.7	Ilustração da seção de Poincaré.	88
4.8	Ilustração da órbita perturbada.	90
4.9	Curva de rotação.	94
5.1	Órbitas fechadas	101
5.2	Órbitas fechadas	101
5.3	Órbitas fechadas	101
5.4	Órbitas fechadas	102
5.5	Órbitas fechadas	102
5.6	Melhor modelo para Galáxia.	104
5.7	Órbitas na vizinhança solar.	106
5.8	Órbitas além da corrotação	108
5.9	Órbitas na corrotação	110
5.10	Órbitas na corrotação	111
5.11	Órbitas na corrotação	111
5.12	Órbitas na corrotação	111
5.13	Órbitas na corrotação	111
5.14	Órbitas na corrotação	112
5.15	Órbitas na corrotação	112
5.16	Órbitas na corrotação	112
5.17	Órbitas na corrotação	112
5.18	Órbitas na corrotação	113
5.19	Órbitas na corrotação	113
5.20	Órbitas na corrotação	113
5.21	Órbitas na corrotação	113
5.22	Velocidades de rotação	116
5.23	Velocidades de rotação	116
5.24	Mapa de densidade	117

5.25	Mapa de densidade	118
5.26	Relação entre as órbitas e o bojo	120
5.27	Seção de Poincaré	121

Lista de Tabelas

2.1	Porcentagem de classes de braços em galáxias SA,SAB,SB	51
2.2	Valores de R_0 e V_0	63
2.3	Valores dos parâmetros da Eq. 2.24 para cada modelo da Tabela 2.2.	63
2.4	Valores de Ω_p	65
3.1	Propriedades adotadas para os braços espirais	75
4.1	Coefficientes usados nas Eqs. 4.17 e 4.18, para $s=3$	84
4.2	Constantes do modelo de massa.	95

Sumário

1. Introdução	25
1.1 Visão Mitológica da Via Láctea	25
1.2 Estrutura da Galáxia	26
1.3 Espirais Logarítmicas	28
1.3.1 Descrição matemática das espirais logarítmicas	29
1.4 Teorias sobre a estrutura espiral	31
1.4.1 Origem dos braços espirais	31
1.4.2 Órbitas na aproximação epicíclica	33
1.4.3 Braços espirais: segundo a teoria de ondas de densidade	36
1.4.4 Algumas objeções ao modelo de ondas de densidade	39
1.5 Sistema não-colisional e tempo de relaxação	40
1.5.1 Tempo de relaxação	42
1.6 Apresentação da tese	45
2. Parâmetros da estrutura espiral da Galáxia - Determinação de Ω_p	49
2.1 Introdução	49
2.2 Número de braços e <i>pitch angle</i>	50
2.2.1 Nossa Galáxia teria dois ou quatro braços?	50
2.3 O valor do <i>pitch angle</i>	52
2.3.1 Relação entre tipos morfológicos e <i>pitch angle</i>	52
2.4 Medida da velocidade do padrão espiral utilizando aglomerados abertos	54
2.4.1 Sobre a amostra de aglomerados abertos	55
2.4.2 Interação entre as estrelas e o braço espiral	56

2.4.3	Mudança de coordenadas e a curva de rotação adotada	60
2.4.4	Resultados	63
3.	<i>Novo modelo para perturbação espiral</i>	67
3.1	Modelo Clássico	67
3.2	Nova descrição para os braços espirais	68
3.2.1	Dedução da nova perturbação	69
3.2.2	Algumas propriedades da nova descrição	72
3.3	Relação entre o contraste de densidade e a amplitude de perturbação	75
4.	<i>Modelos e Metodologias Aplicadas</i>	79
4.1	Esquema de integração	79
4.1.1	Dedução das equações de movimento	79
4.1.2	Potencial Galáctico	81
4.1.3	Integrador Simplético	82
4.2	Busca por órbitas periódicas	84
4.2.1	Descrição do algoritmo - Busca por órbitas periódicas	84
4.3	Densidade de resposta e a auto-consistência	89
4.4	Integração das partículas testes - Atualização do Potencial	92
4.4.1	Curva de rotação plana - Modelo de Massa	92
4.4.2	Condições iniciais	95
4.4.3	Flutuação axissimétrica	96
5.	<i>Resultados e discussão</i>	99
5.1	Resultados - órbitas periódicas	99
5.1.1	Parâmetros fixos	100
5.1.2	Variação dos parâmetros	100
5.2	A estrutura espiral entre as ressonâncias 4:1 e corrotação	104
5.2.1	Além da ressonância 4:1	105
5.2.2	Além da corrotação	108
5.3	Órbitas na corrotação	109
5.4	Efeito das ressonâncias - órbitas não periódicas	114
5.4.1	Deformações na curva de rotação	114

5.4.2	Evolução da densidade superficial do disco	117
5.5	Relação entre a barra e o bojo	118
5.5.1	Curva de rotação plana com um bojo: modelo simples	119
5.5.2	Análise das órbitas internas	119
6.	<i>Conclusões e perspectivas</i>	123
6.1	Conclusões	123
6.2	Perspectivas	126
	<i>Referências</i>	127
	<i>Apêndice</i>	135
A.	<i>Dedução do potencial espiral gaussiano</i>	137
B.	<i>Dedução da curva de rotação para um disco infinitesimal</i>	139

Introdução

O foco desta tese está em galáxias espirais “normais” em que a estrutura é dominada por braços espirais, e não por uma barra. Por outro lado muitas galáxias classificadas como barradas, quando observadas com suficiente resolução angular revelam que na verdade a estrutura espiral se estende mais para o centro da galáxia. O modelo que propomos pode ser útil para interpretar tais galáxias.

Nos últimos anos houve uma melhora considerável sobre o conhecimento da estrutura na Via Láctea, em particular, sobre o padrão espiral e sua curva de rotação, a qual nos fornece informação sobre o potencial gravitacional. Contudo sabemos que muitos autores consideram que a nossa Galáxia tem uma forte barra em seu centro (o que queremos dizer com “forte barra” é que a barra domina o disco), o que inviabilizaria a aplicação do nosso modelo, sem os ajustes necessários. Entretanto a comparação do modelo com as observações pode nos dar pistas se esta hipótese é razoável. Outros modelos ([Contopoulos & Grosbøl, 1986](#); [Amaral & Lepine, 1997](#); [Pichardo et al., 2003](#)) também usam a hipótese de estrutura dominada por espiral e podem ser diretamente comparados com o nosso.

1.1 Visão Mitológica da Via Láctea

Segundo a mitologia grega a Via Láctea ou Caminho de Leite, galáxia em torno da qual o sistema solar órbita, originou-se após Hércules apertar com força os seios de Hera enquanto era amamentado. Já os seguidores de Pitágoras imaginavam-na constituída por fogos. Outras escolas antigas consideravam a Via Láctea o antigo caminho do Sol. Assim como os rios que deixam suas marcas ao mudar seu rumo, o Sol deixaria seu rastro comprovado por um sem-fim de pegadas ardentes.

Por ser visível a olho nu, a Via Láctea ou Galáxia (por definição quando nos referimos à nossa própria galáxia escrevemos galáxia com “G”) provocou a curiosidade do homem desde os tempos mais antigos. Egípcios, árabes, gregos, romanos, e vários outros povos sentiram-se atraídos por esta faixa leitosa que atravessava o céu. Na Fig. 1.1 temos uma fotografia atual dessa estrutura leitosa, e mesmo nos dias atuais o nome que usamos refere-se ao leite derramado pela deusa Hera.



Figura 1.1: Fotografia da Via Láctea, obtida pelo Observatório Nacional Kitt Peak.

Entretanto atualmente sabemos que esta faixa com aspecto leitoso no céu nada mais é do que o disco da Galáxia observado de seu interior.

1.2 Estrutura da Galáxia

A natureza e estrutura de nossa Galáxia só começaram a ser compreendidas no início do século 20, com os trabalhos de Shapley entre 1915 e 1919 sobre a distribuição de aglomerados globulares e a determinação da rotação diferencial das estrelas na vizinhança Solar por Lindblad e Oort, no final da década de 20. As observações indicam que nossa Galáxia é semelhante às outras galáxias espirais, provavelmente uma Sc na classificação de Hubble. De maneira grosseira, podemos dividir nossa Galáxia em três componentes principais: halo, bojo e disco (ver Fig. 1.2).

Halo e bojo formam um sistema com simetria esférica cujos objetos típicos são estrelas pobres em metais (por exemplo, sub-anãs e variáveis RR Lyrae) e aglomerados globulares. A distribuição de densidade dessas componentes é fortemente concentrada em torno

do centro, caindo rapidamente à medida que se afastamos dele, alguns objetos ainda são encontrados a dezenas de kpc não havendo um limite claro de onde elas acabam. Análises espectroscópicas revelam um forte gradiente vertical de metalicidade na componente esferoidal, o que sugere a distinção entre halo, que se estende além de 20 kpc, e bojo, com um raio de cerca de 1.5 kpc. Estas duas componentes são caracterizadas por baixa ou nenhuma rotação e alta dispersão de velocidade.

O disco pode ser caracterizado como uma estrutura altamente achatada obedecendo a uma lei de densidade exponencial $e^{-\frac{R}{R_d} - |z_d|}$, com uma escala de comprimento $R_d \sim 2.5 - 3$ kpc e escala de altura $z_d \sim 0.3$ kpc (por exemplo, Kent et al., 1991; McMillan, 2011). Os constituintes característicos do disco são poeira, gás e estrelas. Contrariamente à componente esferoidal, o disco gira rapidamente e a dispersão de velocidade é menor. As estimativas atuais dos parâmetros estruturais globais da Via Láctea estão compiladas na Tabela 1.2 de Binney & Tremaine (2008); mais especificamente as estimativas para a massa do disco são da ordem de $5 \times 10^{10} M_\odot$ (Flynn et al., 2006; McMillan, 2011), embora ainda hoje os dados não confirmem este valor com exatidão.

O Sol está localizado aproximadamente no plano do disco, numa posição um pouco periférica (7.5 a 8.5 kpc do centro). A Fig. 1.2 mostra uma concepção artística dos constituintes básicos da Galáxia.

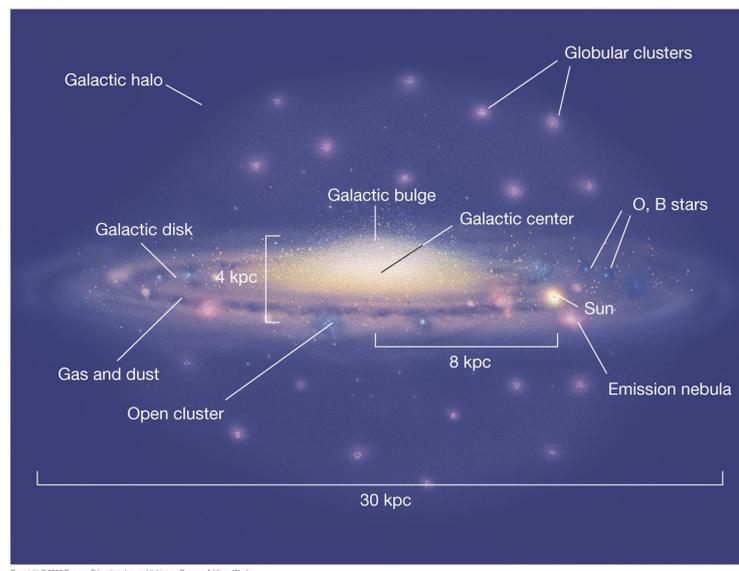


Figura 1.2: Ilustração dos componentes que compõe a Galáxia. Concepção artística retirada do site: <http://physics.uoregon.edu/~jimbrau/ast123/notes/chapter23.html#spiral>.

Desde os trabalhos de Mestel (1963) e Eggen et al. (1962), a origem e evolução dos discos em galáxias ganharam destaque. No entanto, esse ainda é um tema em debate. As simulações feitas recentemente tiveram uma boa evolução (Agertz et al., 2011; Martig et al., 2012; Stinson et al., 2013), conseguindo obter galáxias dominadas por discos, tarefa que até então não tinha sido realizada com sucesso por simulações cosmológicas que obtinham somente galáxias dominadas por bojo. Este progresso, em boa parte, parece ter surgido devido à inclusão explícita ou implícita de processos físicos que antes eram negligenciados. Em particular, o “*feedback radiativo*” de estrelas massivas antes de explodirem como supernovas parece ter sido um ingrediente importante que faltava nas simulações, pois esse processo injeta uma grande quantidade de energia no disco. Outras características do disco, como evolução química, escala de altura e migração ou variação radial, são temas ainda muito discutidos. Todos estes aspectos estão, de alguma forma, relacionados com a estrutura espiral do disco, que é um dos grandes enigmas da estrutura de galáxias espirais e da Via Láctea até hoje.

1.3 Espirais Logarítmicas

Nesta seção iremos apresentar as espirais logarítmicas para descrever os padrões espirais. O uso das espirais logarítmicas para descrever a forma dos braços não é recente. Danver (1942) estudou uma amostra de 98 galáxias espirais e determinou que o melhor ajuste à forma dos braços é o de uma espiral logarítmica. Kennicutt (1981) determinou que a forma dos braços pode ser razoavelmente bem aproximada por uma forma logarítmica e utiliza esta descrição para verificar a relação entre o chamado ângulo de inclinação ou, em inglês, *pitch angle* (como iremos nos referir a esse parâmetro a partir de agora) e o tipo morfológico. Peng (1988) desenvolveu uma técnica para determinar a espessura de discos baseado na desprojeção de discos de galáxias espirais usando espirais logarítmicas. Esta técnica foi utilizada por Ma et al. (1998) para determinar a espessura e inclinações de 71 galáxias. A mesma amostra foi mais tarde utilizada por Ma et al. (1999), mediante a qual uma relação entre o valor do *pitch angle* médio e o tipo morfológico de Hubble foi encontrada.

Os trabalhos acima motivam o uso de espirais logarítmicas para descrever a forma dos braços. Usualmente essa descrição vem sendo usada em praticamente todos os trabalhos

que tentam desvendar o mistério da estrutura espiral. Entretanto, basta olharmos para imagens de muitas galáxias que iremos perceber, facilmente, que muitas delas apresentam um desvio considerável da descrição logarítmica. Se olharmos cuidadosamente, em muitos casos, o que interpretamos à primeira vista como sendo espirais logarítmicas pode ser melhor interpretado como segmentos de linhas retas com um ângulo entre elas (por exemplo M101, NGC1232, and M51). [Chernin et al. \(2001\)](#) apresentou uma lista contendo um grande número de galáxias que contêm uma estrutura “poligonal”, a qual inclui algumas das espirais mais próximas e conhecidas. Contudo, nesse trabalho iremos adotar a descrição clássica de espirais logarítmicas por motivos de simplicidade matemática. No entanto, interpretamos esses desvios das espirais logarítmicas como devidos ao efeito das órbitas próximas às ressonâncias, como discutiremos ao longo dessa tese.

1.3.1 Descrição matemática das espirais logarítmicas

Do ponto de vista matemático a forma funcional de uma espiral logarítmica pode ser representada pela expressão

$$R = R_i e^{\tan(i)(\theta - \theta_0)}, \quad (1.1)$$

onde θ e R representam respectivamente a coordenada azimutal e a coordenada radial definidas no plano do disco da galáxia, R_i é a posição radial correspondente à posição angular θ_0 e i é o *pitch angle*. Se invertemos essa equação isolando θ de forma à termos um $\theta(R)$

$$\theta(R) = \frac{1}{\tan(i)} \left[\ln \left(\frac{R}{R_i} \right) \right] + \theta_0, \quad (1.2)$$

temos a forma da espiral em função do raio. Essa descrição é matematicamente mais vantajosa para ser aplicada em nosso modelo; no Cap. 3 ela foi generalizada para m braços na Eq. 3.6. Na sua forma paramétrica, a expressão dada na Eq. (1.1) pode ser escrita simplesmente como

$$\begin{aligned} x &= R \cos[\theta(R)], \\ y &= R \sin[\theta(R)]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Esta forma geométrica tem a interessante propriedade de o ângulo entre a reta tangente à espiral e ao círculo que a cruza em um raio R ser constante, como ilustra a Fig. 1.3.

Dessa forma, o ângulo i controla quão fechada, ou aberta, é a espiral. Quando $i \rightarrow 0$ a espiral se transforma em um círculo de raio R_i . Por outro lado quando $i \rightarrow 90^\circ$, a espiral tende para uma linha reta. O sinal de i determina o sentido de orientação do padrão espiral sendo anti-horário para valores positivos e horário para valores negativos. Existem na literatura inúmeras aplicações da espiral logarítmica para descrever a forma dos braços nas galáxias.

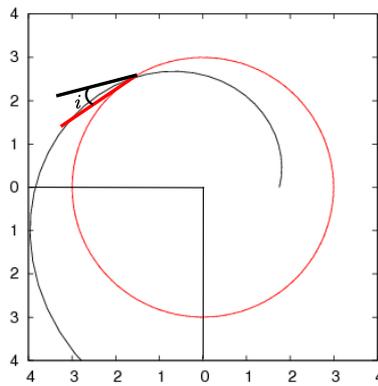


Figura 1.3: Exemplo de uma espiral logarítmica com $i = 14^\circ$. O *pitch angle* i é definido como o ângulo entre a reta tangente à espiral (linha em preto) e ao círculo que a cruza (linha em vermelho).

Derivando a Eq. 1.1 com respeito à coordenada azimutal temos:

$$\tan i = \frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta}. \quad (1.4)$$

Definindo, ainda, o número de onda k por:

$$k = \frac{d\theta}{dR}, \quad (1.5)$$

sua relação com a inclinação dos braços é dada por:

$$\tan i = \frac{1}{kR}. \quad (1.6)$$

Podemos notar, nessa equação, que para galáxias com braços espirais muito “enrolados”, i é pequeno e k é grande. Em oposto, para galáxias com braços abertos, i é grande e k é pequeno. O limite extremo de uma espiral aberta é uma barra.

Um braço espiral também pode ser classificado pela sua orientação relativa à direção de rotação da galáxia. Um braço *trailing* é aquele cujos pontos giram em direção oposta a rotação galáctica, com o aumento de R , enquanto que para um braço *leading* os pontos giram na direção de rotação. Portanto, para $k > 0$, $d\theta/dR > 0$ a espiral é dita *leading*, ou seja, R aumenta com o aumento de θ no sentido de rotação da galáxia. Para $k < 0$, a espiral é dita *trailing* e ocorre o inverso, ou seja, R diminui com o aumento de θ no sentido da rotação.

Usualmente é difícil determinar observacionalmente se os braços de uma galáxia são *leading* ou *trailing*. Não é óbvio que $d\theta/dR > 0$ corresponde ao sentido de rotação de uma galáxia, isto é apenas uma convenção para direção crescente de θ . Em certas posições, no plano de uma galáxia, os objetos podem estar se movendo com velocidades inferiores às do braço (além da corrotação), de forma que se pudéssemos visualizar no tempo, alguns teriam órbitas progressivas e outros retrógradas com relação ao padrão espiral, indicando assim a presença dos dois modos de enrolamento.

1.4 Teorias sobre a estrutura espiral

Visando responder a pergunta de como as estruturas espirais se formam e se mantêm, algumas teorias surgiram nas últimas décadas. Nesta seção iremos discutir brevemente o mecanismo da estrutura espiral dentro do contexto de ondas de densidade, proposto por [Lin & Shu \(1964\)](#).

1.4.1 Origem dos braços espirais

Para muitos autores o tempo de vida de uma onda de densidade é curto, devido à dissipação de sua energia como discutido por [Toomre \(1969\)](#). Isso obriga a teoria a pressupor um reabastecimento contínuo de energia ou, então, uma frequente geração de novas ondas de densidade. Existem alguns possíveis mecanismos para geração das ondas de densidade, os quais podem criar e/ou manter a estrutura espiral:

1) Força de maré:

Companheiras permanentes ou passageiras próximas a uma galáxia seriam capazes de criar as ondas de densidade ([Toomre, 1969](#)). A interação por força de maré entre duas ga-

laxias produziria as perturbações necessárias para criação de uma estrutura espiral. Para nossa Galáxia, a Grande Nuvem de Magalhães poderia ser a fonte de tais perturbações. Essas perturbações aconteceriam primeiro nas regiões externas das galáxias e se propagariam em direção ao centro produzindo uma estrutura espiral também nas partes internas. Embora a interação por maré seja um mecanismo promissor para gerar as ondas de densidade em algumas galáxias com companheiras, é difícil de acreditar que este seja o único mecanismo capaz de criá-las, visto que, um grande número de galáxias não possuem nenhum sinal de interação.

2) Barra central:

Uma pequena barra central ou uma distorção oval na região interna seria capaz de excitar e manter as ondas de densidade em uma galáxia. [Feldman & Lin \(1973\)](#) encontram que uma distorção oval geraria uma espiral próximo ao raio de corotação. Tais ondas se propagariam em direção ao centro, gerando uma estrutura espiral permanente sobre uma grande região da galáxia. Recentemente, [Athanassoula et al. \(2009\)](#) encontraram também que uma estrutura espiral e anéis podem ser excitados devido a uma barra central, porém o mecanismo proposto por eles não está associado a ondas de densidade. A estrutura espiral surgiria devido às órbitas geradas próximas aos pontos L_1 e L_2 de Lagrange da barra. Esta explicação para origem e manutenção da estrutura espiral é atraente, mas meramente desvia o problema para questão de como a barra se forma. Evidentemente, pode ser justamente a própria estrutura espiral quem produz uma deformação oval próxima à ressonância interna de Lindblad ([Contopoulos, 1970](#); [Junqueira et al., 2013](#)).

3) Transferência de Momento Angular:

[Lynden-Bell & Kalnajs \(1972\)](#) e [Kalnajs \(1973\)](#) propuseram que ondas de densidade são excitadas e mantidas devido à transferência de energia e momento angular pelas ondas, de dentro para fora da galáxia. Esta transferência reduziria a energia total da galáxia. Portanto, a energia necessária para manter a onda de densidade seria retirada a partir da rotação da galáxia. Postulando-se a tendência das galáxias evoluírem em direção à entropia crescente e, portanto, energia rotacional menor (disco aquecido), a estrutura espiral poderia ser justamente o mecanismo pelo qual uma galáxia tentaria seguir tal evolução termodinâmica. No entanto, os detalhes para este mecanismo são incertos.

Atualmente, o maior problema das teorias que tentam explicar a estrutura espiral é certamente a resposta não convincente para a questão de como essas ondas são realmente excitadas e mantidas na maioria das galáxias. A manutenção pode ser mais bem explicada se existir um mecanismo de auto-consistência para estrutura espiral, uma vez que esta já exista. A questão da formação da estrutura espiral ainda é um tema de difícil resolução.

1.4.2 Órbitas na aproximação epicíclica

Tanto no modelo de Kalnajs (1973), quanto no de Lin & Shu (1964), a teoria epicíclica está presente. Os epiciclos não são uma ideia nova, eles foram usados por Ptolomeu, no século II, para explicar o movimento dos planetas em torno da Terra. Apesar de a teoria de Ptolomeu estar equivocada, a ideia dos epiciclos é uma aproximação válida quando queremos descrever uma órbita que sofreu uma perturbação. Para entendermos como funciona o epiciclo, imaginemos o seguinte: um planeta está sobre a influência de uma força central em órbita perfeitamente circular e, de repente, por algum motivo, ele sofre uma pequena perturbação em sua órbita. O que irá acontecer? Devido ao impulso que este planeta sofreu ele irá se afastar da sua posição de equilíbrio, ou seja, tenderá a oscilar em torno da posição de equilíbrio. Portanto, a órbita do planeta pode ser interpretada, agora, por duas componentes de velocidade, uma na direção azimutal e outra na direção radial, a qual dará origem aos epiciclos em torno do raio que descreve a órbita circular, como ilustrado na Fig. 1.4.

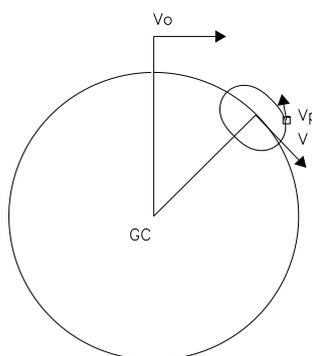


Figura 1.4: Movimento epicíclico em torno de uma órbita circular. O centro da Galáxia está no ponto GC, V_0 representa a velocidade azimutal do sol, V é a velocidade azimutal de uma dada estrela e V_p é sua velocidade epicíclica.

Assumindo que a perturbação é pequena, podemos fazer uma aproximação de primeira

ordem, que em termos matemáticos descrevem os epiciclos como:

$$R = R_0 + \delta R, \quad (1.7)$$

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta, \quad (1.8)$$

onde os termos com índices zero representam a órbita não perturbada.

A equação de movimento na direção radial é descrita por:

$$\ddot{R} = R\dot{\theta}^2 - \frac{\partial\Phi(R)}{\partial R}, \quad (1.9)$$

com o primeiro termo do lado direito da equação representando a aceleração centrípeta, originária do movimento na direção θ , e o segundo representando a componente da aceleração na direção radial. Na ausência de perturbação esses termos se cancelam e a aceleração na direção radial é nula.

Substituindo a expressão 1.7 em 1.9 e tendo em mente que $\dot{R}_0 = 0$:

$$\delta\ddot{R} = (R_0 + \delta R)\dot{\theta}^2 - \frac{\partial\Phi(R_0 + \delta R)}{\partial R}. \quad (1.10)$$

Considerando o momento angular $J_0 = R^2\dot{\theta}$, a expressão acima torna-se:

$$\delta\ddot{R} = \frac{J_0^2}{(R_0 + \delta R)^3} - \frac{\partial\Phi(R_0 + \delta R)}{\partial R}. \quad (1.11)$$

Uma vez que a perturbação é pequena, o termo $\delta R/R_0 \ll |1|$; assim, se expandirmos o termo $(1 + \delta R/R_0)$ em torno de zero na expressão acima, ficamos com:

$$\delta\ddot{R} = \frac{J_0^2}{R_0^3} \left(1 - 3\frac{\delta R}{R_0}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial R}\Big|_0 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2}\Big|_0 \delta R. \quad (1.12)$$

Em uma órbita não perturbada o termo relativo à força centrípeta se iguala à aceleração radial de forma que:

$$\frac{J_0^2}{R_0^3} = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\Big|_0, \quad (1.13)$$

substituindo 1.13 em 1.12 chegamos à seguinte equação

$$\delta\ddot{R} + \kappa^2\delta R = 0, \quad (1.14)$$

com

$$\kappa^2 = \left(\frac{3}{R_0} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \Big|_0 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \Big|_0 \right). \quad (1.15)$$

Essa expressão representa a equação diferencial de um oscilador harmônico, tendo como solução:

$$\delta R = A \sin[\kappa(t - t_0)] \Rightarrow \kappa^2 > 0, \quad (1.16)$$

$$\delta R = A \sinh[\kappa(t - t_0)] \Rightarrow \kappa^2 < 0, \quad (1.17)$$

dependendo do sinal da frequência epicíclica κ . O termo A dá a amplitude de oscilação do epiciclo, podendo ser obtido pelas condições iniciais do problema.

Para $\kappa^2 < 0$, a perturbação aumenta indeterminadamente com o tempo, como podemos perceber pela solução da Eq. 1.14, que depende de um seno hiperbólico. Dessa forma a aproximação linear deixa de ser consistente. Portanto, $\kappa^2 > 0$ representa a condição de estabilidade para órbita.

Podemos proceder da mesma forma na coordenada azimutal. A solução nesse caso é

$$\delta \dot{\theta} = \frac{-2\Omega}{R_0} \delta R, \quad (1.18)$$

onde Ω é a velocidade angular de rotação da partícula. Podemos notar que a partícula oscila no sentido oposto a θ crescente. Assim a partícula descreve uma elipse com relação à trajetória não perturbada em um sistema de coordenadas com eixos $\delta R = A$ e $\delta \theta = -(2A\Omega/R_0\kappa)$.

As órbitas são então descritas por duas frequências básicas (κ e Ω) que dependem da distância ao centro galáctico.

Em um referencial inercial as órbitas perturbadas, geralmente, não se fecham após uma volta, então Kalnajs teve a ideia de rotacionar todas as órbitas com uma certa frequência angular Ω_p , que fecharia as órbitas. Essa frequência é conhecida como velocidade angular do padrão espiral. Visto em um referencial girando com Ω_p as frequências básicas deverão ser alteradas para:

$$\Omega(R) - \Omega_p \quad e \quad \kappa(R). \quad (1.19)$$

Para determinados valores de R , poderão ocorrer ressonâncias entre essas duas frequências se a razão $\nu(R)$:

$$\nu(R) = -\frac{m[\Omega(R) - \Omega_p]}{\kappa(R)}, \quad (1.20)$$

for um número inteiro.

As ressonâncias mais importantes são:

a) Ressonâncias internas de Lindblad:

$$\Omega_p = \Omega - \frac{\kappa}{m} \quad (\nu = -1), \quad (1.21)$$

b) Corrotação:

$$\Omega_p = \Omega \quad (\nu = 0), \quad (1.22)$$

c) Ressonâncias externas de Lindblad:

$$\Omega_p = \Omega + \frac{\kappa}{m} \quad (\nu = 1). \quad (1.23)$$

Esses valores de ν podem ser interpretados da seguinte forma:

a) No caso das ressonâncias internas de Lindblad, a estrela gira uma vez em torno do centro da galáxia enquanto faz m oscilações em torno do seu centro de guia ou raio da órbita circular.

b) Na corrotação a estrela só possui movimento epicíclico, ou seja, oscilação na direção radial e azimutal, gerando uma elipse estacionária.

c) O mesmo fato que ocorre na ressonância interna de Lindblad se passa na ressonância externa, exceto que, como a razão de sinal é oposta, a órbita é retrograda.

1.4.3 Braços espirais: segundo a teoria de ondas de densidade

Lin e seus colaboradores consideraram entre os muitos possíveis tipos de ondas de densidade, um modo especial na forma de espiral; braços apertados, onda neutra que gira rigidamente. A consideração de que a onda gira rigidamente com frequência angular Ω_p exclui qualquer variação com o tempo do potencial gerado pela estrutura espiral e resolve o problema do enrolamento dos braços devido à rotação galáctica. E, por sua vez, a consideração de onda neutra, ou seja, que a amplitude desta não aumenta e nem

diminui com o tempo, permite a permanência dos braços espirais e preserva o contraste de densidade entre os braços e as regiões interbraços.

Em seguida eles consideraram o problema de resposta, que visa responder a seguinte questão: qual é a onda de densidade criada a partir de uma certa perturbação imposta ao potencial gravitacional? Analiticamente esse problema pode ser resolvido para espirais muito enroladas em uma aproximação assintótica, onde o número de onda k , que depende da forma da espiral, multiplicado pelo raio é muito maior que um. Isso é o mesmo que dizer que o comprimento de onda λ é pequeno se comparado a R . Para o modelo de Lin e Shu ($|kR| \gg 1$) a resolução da equação de Poisson conduz a uma simples relação local entre a perturbação no potencial e a densidade superficial:

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi G \Sigma_1}{k} = -\lambda G \Sigma_1. \quad (1.24)$$

No início do Cap. 3, iremos demonstrar essa relação e usar essa ideia em nosso próprio modelo.

Visto que o potencial Φ_1 produz a densidade de perturbação Σ_1 ou, vice-versa, tem como fonte a própria perturbação (auto-consistência), espera-se que Φ_1 seja proporcional a Σ_1 . Por outro lado, se o máximo de densidade deve ser mantido quando o espaçamento entre os braços ($\lambda = 2\pi/k$) aumenta, então Φ_1 precisa aumentar quando λ aumenta, caso contrario existiria uma região de baixo potencial entre os braços onde o gás poderia residir, enfraquecendo assim o padrão espiral. Desta forma Φ_1 precisa ser proporcional a λ . Uma vez que o mínimo em Φ_1 corresponde a um máximo na perturbação de densidade, a Eq. 1.24 confirma esta oposição de fase entre as duas grandezas. Como a maior parte das galáxias estão isoladas é necessário um mecanismo de auto-consistência, onde a onda de densidade causada por Φ_1 , seja idêntica a densidade necessária para produzir o mesmo potencial. Essa relação entre causa e efeito pode ser encontrada pela equação de dispersão.

A equação de dispersão nos dá a relação entre o número de onda k e a frequência ω do padrão espiral. Assumindo (a) que a relação entre a densidade e o potencial é dada pela Eq. 3.4 para um disco fino e (b) as ondas tem baixas amplitudes, portanto os termos de segunda ordem podem ser desconsiderados, a equação de dispersão local para uma onda de densidade curta pode ser dada por:

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma_1 |k| \mathcal{F}(s, \chi), \quad (1.25)$$

(Kalnajs, 1965), onde \mathcal{F} é um fator de redução, com dois termos adimensionais que serão explicados mais adiante. Lin & Shu (1966) independentemente derivaram uma relação generalizada para uma onda espiral enrolada (*tightly wound spiral*) girando rigidamente, o que requer mais duas suposições: (c) que o vetor de onda k seja aproximadamente radial, e (d) que a perturbação não esteja próxima de nenhuma das principais ressonâncias. Sua relação mais conhecida simplesmente substitui a frequência ω , acima, por $\omega - m\Omega$:

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma_1 |k| \mathcal{F}(s, \chi), \quad (1.26)$$

onde $\omega \equiv m\Omega_p$.

Quando o disco possui movimentos randômicos (movimentos não circulares), a resposta estelar depende de dois fatores: 1) da razão entre a vibração que a estrela sofre e a sua frequência natural, $s \equiv |\omega - m\Omega|/\kappa$; 2) da razão entre o tamanho típico de um epiciclo ($\propto \nu_R^2 >^{1/2} / \kappa$) e o comprimento de onda da estrutura espiral ($\propto k^{-1}$). Portanto, para uma distribuição Gaussiana de velocidades radiais, \mathcal{F} é uma função de ambos, s e $\chi = \sigma_R^2 k^2 / \kappa^2$ (χ pode ser interpretado fisicamente como sendo a amplitude de vibração). Obviamente, quando χ é grande, a maioria das estrelas irão oscilar ao longo de muitas ondas radiais, e o apoio enfraquecido a resposta surge principalmente de uma pequena fração de estrelas próximas do centro da distribuição de velocidades.

Toomre (1964) determinou a condição marginal de estabilidade para uma onda axissimétrica, resolvendo a Eq.1.25 para $\omega^2 = 0$. Uma vez que todos os fatores dessa equação são intrinsecamente positivos, ω^2 só poderia ser negativo se $|k|$ por grande o suficiente, implicando em instabilidade. Sem movimentos randômicos, $\mathcal{F} = 1$, as ondas curtas com $k > k_{crit}$ ou $\lambda < \lambda_{crit} = 4\pi^2 G\Sigma_1 / \kappa^2$, seriam instáveis.

Para discos com velocidades randômicas, o fator de redução $\mathcal{F} \rightarrow 0$, para $|k|$ grande, independente da frequência. Portanto, movimentos randômicos estabilizam as ondas curtas. Toomre (1964) mostrou que para uma distribuição gaussiana de velocidades radiais, o lado direito da Eq. 1.25 é maior do que zero para todo $|k|$, quando $\sigma_R > \sigma_{R_{crit}}$, onde

$$\sigma_{R_{crit}} = \frac{3.36 G\Sigma_1}{\kappa}. \quad (1.27)$$

Portanto, o critério de estabilidade local de Toomre é $Q \equiv \sigma_R / \sigma_{R_{crit}} \geq 1$. A Fig. 1.5 mostra, para diferentes valores de Q , um gráfico representando a relação de dispersão para as estrelas.

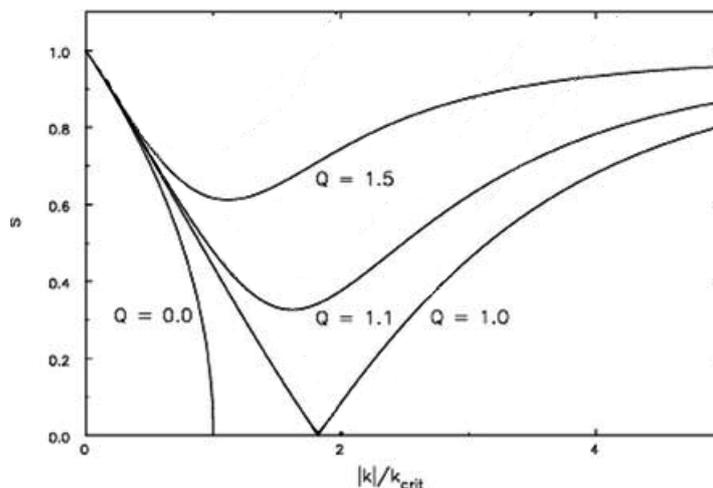


Figura 1.5: A linha sólida mostra a relação de dispersão da Eq. 1.26, cada uma para diferentes valores de Q . Note que $s = 0$ é a corrotação e $s = 1$ é a ressonância de Lindblad. Pela definição dada no texto $s = |\nu|$, ν dada pela Eq. 1.20. Como os eixos x e y são os módulos de k e ν , o gráfico para os valores negativos dessas grandezas é o reflexo desse.

Gostaríamos de chamar a atenção para o fato da Eq.1.26 ter sido derivada adotando $|kR| \gg 1$ e que as ondas são apertadas, ou seja, seu vetor de onda é basicamente radial. Esta é uma boa aproximação para ondas curtas (k grande), mas para ondas longas não existe uma boa solução, exceto para o caso onde o disco tem uma massa muito baixa onde k_{crit} seria alto ou λ_{crit} baixo, o que permite $|k| \rightarrow 0$. Lynden-Bell & Kalnajs (1972) melhoraram a relação de dispersão (Eq. A11 no trabalho deles) que relaxa um pouco na exigência de que o vetor de onda tem que ser radial, mas ainda usa o potencial que exige $|kR| \gg 1$. A relação de dispersão que eles encontraram é mais correta para ondas mais abertas.

1.4.4 Algumas objeções ao modelo de ondas de densidade

Essa teoria pode explicar a preferência de espirais com dois braços, uma vez que tais ondas podem cobrir uma vasta região da Galáxia. Se Q é maior que um, então a região em torno do raio de corrotação é proibida para ondas de densidade. Pela Fig. 1.5 podemos ver isso melhor: para cada valor de s existem dois valores para k , um para ondas curtas e outro para longas, ou não existe nenhuma solução. Somente para o caso de estabilidade marginal de $Q = 1$ existem soluções para todas as frequências $0 \leq s \leq 1$ e todos os $|k|$. Quando, $Q > 1$, regiões proibidas aparecem perto da corrotação ($s = 0$), onde as ondas serão instáveis. Toomre (1981) propôs um mecanismo de amplificação por oscilação onde

os braços poderiam cruzar a região proibida próximo à corrotação, para $Q > 1$. No entanto, nessa visão, os braços seriam um fenômeno transiente.

Como já mencionamos acima, a relação de dispersão de Lin & Shu (Eq. 1.26) fornece duas soluções de $|k|$, para cada valor de s , que se referem às ondas curtas e longas. Eles consideraram basicamente as ondas curtas, ou seja, espirais apertadas. As espirais longas são inconsistentes com a aproximação usada, no entanto, evidências observacionais sugerem valores significativamente maiores para o *pitch angle* dos braços espirais.

O tratamento dado por Lin e Shu às ondas de densidade não é coerente nas ressonâncias de Lindblad ($s = 1$) e na região de corrotação, devido aos efeitos não-lineares. A teoria linear produz para $s \rightarrow 1$, $k = 0$ (ver Fig. 1.5) e $\Sigma_1 \rightarrow \infty$, o que é irrealista.

Desta forma, a amplitude da onda de densidade permanece indeterminada na teoria linear. Uma solução completa para o problema da amplitude pode ser resolvido por investigações não-lineares.

Embora a teoria explique bem algumas estruturas observadas, como braços bem definidos, ela não se ajusta bem a braços locais, os quais, na nossa visão, poderiam ser explicados pelas ressonâncias que capturariam estrelas nesse local formando assim esses segmentos de braços, como por exemplo o braço de Órion existente em nossa Galáxia.

1.5 Sistema não-colisional e tempo de relaxação

Existe uma diferença fundamental entre galáxias e sistemas que geralmente são tratados com mecânica estatística como, por exemplo, um gás confinado numa caixa. Esta diferença está na natureza das forças que agem entre as partículas que constituem o sistema. A interação entre duas moléculas é de curto alcance: a força entre elas é fraca, a menos que as moléculas estejam muito próximas umas das outras; quando isto ocorre há uma forte repulsão. Consequentemente, moléculas num gás difusivo estão sujeitas a abruptas e violentas acelerações conforme colidem umas com as outras. Tal processo é intercalado com longos períodos que elas se movem a velocidades praticamente constantes. Em contraste, a força gravitacional que age entre as estrelas numa galáxia é de longo alcance.

Considere a força exercida por várias estrelas, no cone mostrado na Fig. 1.6, sobre uma estrela que se encontra no centro do cone.

A força que cada estrela exerce sobre o centro do cone é proporcional a r^{-2} ; logo, cada

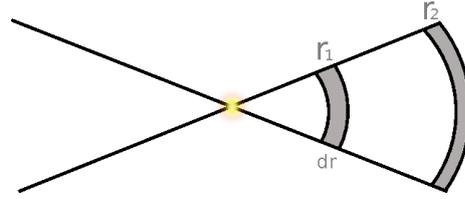


Figura 1.6: Se a densidade fosse constante, as estrelas nas regiões hachuradas do cone iriam contribuir igualmente para a força exercida no ponto central do cone. Portanto, a aceleração da estrela no centro do cone seria determinada principalmente pela distribuição de estrelas em grande escala, e não pelas estrelas próximas.

estrela exerce um diferencial de força

$$dF = \frac{Gm \, dm}{r^2}, \quad (1.28)$$

onde G é a constante gravitacional, m é a massa da estrela no centro do cone e dm é a massa de estrelas na região hachurada que pode ser expressa da seguinte forma

$$dm = \rho r^2 d\Omega dr, \quad (1.29)$$

onde ρ é a densidade e $d\Omega$ é o ângulo sólido. Supondo uma densidade constante de estrelas ao longo do cone temos

$$dF = G \, m \, \rho d\Omega \, dr, \quad (1.30)$$

integrando a Eq. 1.30, podemos ver facilmente que a força exercida no centro do cone é proporcional a r . Este simples argumento mostra que a força exercida no centro do cone é dominada pelas estrelas mais distantes do sistema ao invés de o ser pelas estrelas mais próximas. É claro que se a densidade tiver simetria esférica a aceleração sofrida pela estrela no centro do cone seria nula. Mas, em geral, a densidade de estrelas decai mais devagar em uma dada direção do que em outra. Portanto a estrela no centro do cone estará sujeita a uma rede de forças, e esta será determinada pela estrutura da galáxia em grande escala. Consequentemente, em contraste com o exemplo dado no gás, a força em uma estrela não varia rapidamente e podemos supor que cada uma acelera suavemente através do campo de força, que é gerado pela galáxia como um todo. Em outras palavras, podemos tratar a força gravitacional, que é exercida sobre uma estrela, vinda de uma distribuição de densidade ao invés de uma coleção de massas puntiformes.

1.5.1 Tempo de relaxação

Vamos investigar quantitativamente a afirmação feita na Sec. 1.5 perguntando-nos: o quão preciso é aproximar uma galáxia que contenha N estrelas com massas idênticas m , por um campo gravitacional gerado por uma distribuição suave de densidade?

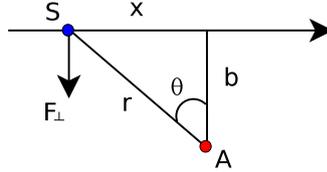


Figura 1.7: Uma dada estrela S (ponto azul) aproximando-se de uma estrela de campo A (ponto vermelho), com velocidade v e parâmetro de impacto b . Nós estimamos o impulso resultante na estrela S adotando uma trajetória retilínea com relação a estrela de campo A.

Para responder a esta pergunta, vamos analisar o movimento individual de uma estrela que atravessa uma galáxia e ver o quanto sua velocidade varia depois de sucessivos encontros com estrelas de campo, distribuídas homoganeamente nesta galáxia. Suponha que uma estrela S passa a uma distância b da outra (ver Fig. 1.7), queremos estimar a quantidade $\delta\mathbf{v}$, gerada por esses encontros que desviam a velocidade \mathbf{v} da estrela. Para estimar esta grandeza vamos considerar que em um encontro $|\delta\mathbf{v}|/v \ll 1$ e que a estrela de campo permanece fixa em sua posição. Neste caso $\delta\mathbf{v}$ é perpendicular a \mathbf{v} , uma vez que, em média, a aceleração paralela a v é zero. Podemos calcular a magnitude absoluta da mudança de velocidade, $\delta v \equiv |\delta\mathbf{v}|$, considerando que a estrela passa pela estrela de campo com uma trajetória retilínea, e integrando a força perpendicular F_{\perp} ao longo dessa trajetória. No instante mostrado na Fig.1.7, a força perpendicular é expressada pela equação abaixo

$$F_{\perp} = \frac{Gm^2}{b^2 + x^2} \cos \theta = \frac{Gm^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (1.31)$$

Mas, pela lei de Newton,

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}, \quad (1.32)$$

portanto

$$\delta v = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt F_{\perp}, \quad (1.33)$$

e temos

$$\delta v = \frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[1 + (vt/b)^2]^{3/2}} = \frac{Gm}{bv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(1 + s^2)^{3/2}} = \frac{2Gm}{bv}. \quad (1.34)$$

Em outras palavras, δv é aproximadamente igual à aceleração no ponto mais próximo, Gm/b^2 , vezes o tempo de duração desta aceleração, $2b/v$. Note que a hipótese de trajetória retilínea não é mais válida, e a Eq. 1.34 torna-se inválida, quando $\delta v \simeq v$; analisando a Eq. 1.34, isso ocorre se o parâmetro de impacto $b \leq 2Gm/v^2$.

Agora vamos supor que a densidade de estrelas de campo em uma certa galáxia seja na ordem de $N/\pi R^2$, onde N é o número de estrelas e R é o raio da galáxia. Portanto uma dada estrela que cruza a galáxia uma vez sofre

$$\delta n = \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b db = \frac{2N}{R^2} b db, \quad (1.35)$$

encontros com parâmetro de impacto entre b e $b + db$. Cada encontro produz uma perturbação δv na velocidade da estrela, mas estas pequenas perturbações são randomicamente orientadas no plano perpendicular a \mathbf{v} para uma distribuição homogênea de estrelas; portanto, na média, ela é zero. Apesar da média da variação de velocidade ser zero, a variação da velocidade média quadrática não é:

$$\Sigma \delta v^2 \simeq \delta v^2 \delta n = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2N}{R^2} b db. \quad (1.36)$$

Integrando a Eq. 1.36 sobre todos os parâmetros de impacto de b_{min} à b_{max} , encontramos a variação da velocidade média quadrática da estrela por travessia pela galáxia,

$$\Delta v^2 = 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \Lambda, \quad (1.37)$$

onde o fator

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (1.38)$$

é conhecido como logaritmo de Coulomb. Como já analisamos acima, a hipótese de trajetória retilínea é inválida se b for menor do que $b_0 = 2Gm/v^2$. Portanto podemos definir

$b_{min} = f_1 b_0$, onde f_1 é um fator na ordem da unidade. A hipótese de homogeneidade é quebrada se o parâmetro de impacto tiver um valor na ordem de R , desta forma podemos definir $b_{max} = f_2 R$. Assim temos

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{R}{b_0} \right) + \ln(f_2/f_1). \quad (1.39)$$

Na maioria dos sistemas em interesse temos $R \gg b_0$ (por exemplo, em galáxias elípticas típicas $R/b_0 \gtrsim 10^{10}$), assim a incerteza em $\ln \Lambda$ fica por conta da incerteza nos valores de f_1 e f_2 . Mas a fração f_2/f_1 é bem pequena, logo perdemos pouca acurácia se definirmos $f_2/f_1 = 1$.

A partir da Eq. 1.37, podemos concluir que os encontros entre as estrelas de campo e a estrela que está viajando através da galáxia gera uma certa deflexão na velocidade desta, que se difere da velocidade gerada pela aceleração causada por uma distribuição de massa do sistema estelar como um todo. Este processo difusivo é chamado de *two-body relaxation*, uma vez que ele emerge do efeito acumulativo de inúmeros encontros de dois corpos entre uma certa estrela e as estrelas de campo.

A velocidade de uma estrela pode ser grosseiramente expressada pela velocidade de uma partícula em movimento circular na borda de uma galáxia,

$$v^2 \approx \frac{GNm}{R}. \quad (1.40)$$

Se eliminarmos R da Eq. 1.37 usando a Eq. 1.40, temos

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \approx \frac{8 \ln \Lambda}{N}. \quad (1.41)$$

Para cada volta completa da estrela em torno da galáxia, sua velocidade irá variar aproximadamente por Δv^2 . Portanto para que haja uma variação na ordem da própria velocidade, ou seja $(n_{relax} \Delta v^2)/v^2 \approx 1$, o número de travessias n_{relax} necessárias é

$$n_{relax} \approx \frac{N}{8 \ln \Lambda}. \quad (1.42)$$

Agora podemos definir o tempo de relaxação como $t_{relax} = n_{relax} t_{trav}$, onde $t_{trav} = R/v$ é o tempo de travessia necessário para uma estrela cruzar a galáxia uma única vez. Além disso $\Lambda = R/b_0 \approx Rv^2/(Gm)$, tomando a Eq. 1.40 podemos deduzir que $\Lambda \approx N$. Portanto o resultado final é

$$t_{relax} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} t_{trav}. \quad (1.43)$$

Depois de um tempo de relaxação, o efeito acumulativo de pequenos “chutes” vindos de diversos encontros, alteraria a órbita da estrela significativamente daquela que ela teria em um campo gravitacional regular. O efeito disso seria que a estrela perderia a memória de sua condição inicial, depois de um tempo de relaxação. Em galáxias típicas temos $N \approx 10^{11}$ estrelas com algumas centenas de milhares de anos de travessia. Portanto para estas galáxias o efeito entre o encontro de estrelas não é importante, a não ser em suas regiões centrais.

Em tais sistemas a escala de tempo dinâmica é menor que t_{relax} , ou seja, podemos considerar que o sistema é não-colisional, no qual as partículas (estrelas) que o constituem se movem sobre a influência de um campo gravitacional gerado por uma distribuição suave de massa, ao invés de sob a influência de uma coleção de massas puntiformes.

Todo este trabalho está focado nesta hipótese de sistema dinâmico não-colisional.

1.6 Apresentação da tese

Um dos problemas clássicos, até hoje, na dinâmica de galáxias é o estudo da estrutura espiral. Uma das primeiras pessoas a atacar este problema foi o astrônomo sueco Bertil Lindblad, que trabalhou com o assunto desde 1927 até sua morte em 1965. Lindblad reconheceu corretamente que a estrutura espiral vinha da interação entre as órbitas estelares no disco das galáxias e não devido ao campo magnético interestelar, como muitos astrônomos acreditavam. Sabe-se atualmente que a intensidade deste campo é muito fraca para sustentar a estrutura espiral.

Aproximadamente dois terços das galáxias conhecidas apresentam uma estrutura espiral. Na Via Láctea, a história não é diferente; evidências observacionais, principalmente devido à emissão de HI na linha de 21 cm, apontam que ela possui uma estrutura espiral. Com o surgimento do SDSS (da sigla em inglês, *Sloan Digital Sky Survey*), tivemos acesso às imagens em alta qualidade de um grande número de galáxias. Isso trouxe um desafio ainda maior, podemos perceber que a forma e complexidade da estrutura espiral está muito além do que os modelos existentes podem explicar. Muitas delas não apresentam braços logarítmicos bissimétricos bem definidos. Na verdade, bifurcações nos braços são

bem frequentes. A presença ou não da barra em muitas delas apresenta um desafio, não existindo um consenso de quem surge primeiro: a barra ou a espiral? Outra estrutura que podemos notar em galáxias espirais são braços que se parecem mais com polígonos do que com espirais e também a presença de estruturas em forma de anel. Todos esses fatores somados a como essas estruturas se formam e se mantêm e o que define a velocidade do padrão espiral, geram um grande quebra-cabeça para a astronomia moderna.

Em meio a este turbilhão de informações e poucas respostas, nessa tese tentamos elucidar e dar alguma direção de como podemos entender algumas das estruturas observadas em galáxias. Boa parte do trabalho é focado na Galáxia, mas muitos resultados que discutiremos têm validade global.

Esta tese está estruturada basicamente em seis capítulos, seguindo a sequência natural de desenvolvimento para a estrutura espiral. Uma sinopse de cada capítulo é apresentada a seguir:

Neste capítulo introdutório apresentamos uma breve revisão da estrutura da Galáxia, discutimos as propriedades básicas de espirais segundo o modelo clássico de onda de densidade proposto por Lin e Shu. Além dos possíveis mecanismos de excitação de ondas de densidade, algumas objeções ao modelo desenvolvido pelos autores foram discutidas. E por fim, argumentamos porque o disco estelar pode ser tratado em um contexto não colisional.

No capítulo 2, uma revisão dos parâmetros da estrutura espiral da Galáxia é apresentada como o número de braços, o *pitch angle* e a velocidade do padrão espiral. Um novo método, baseado na cinemática dos aglomerados abertos, para se determinar Ω_p é apresentado.

No capítulo 3, apresentamos a nova descrição para o potencial que define a estrutura espiral, bem como algumas de suas propriedades. Este capítulo é a base para o desenvolvimento dessa tese e apresenta uma nova maneira de entender os braços.

Na sequência, todos os métodos desenvolvidos para elaboração desse trabalho como: o algoritmo e as equações de movimento para integrar as órbitas, o método para encontrar as órbitas periódicas e calcular a resposta ao potencial imposto e o desenvolvimento de uma curva de rotação baseada na distribuição exponencial de massa no disco, para realizar uma simulação com 10^5 partículas, são apresentados no capítulo 4.

No capítulo 5, estão discutidos todos os resultados que obtivemos a partir dos métodos descritos no capítulo anterior e com as bases dadas pelos capítulos 2 e 3.

Finalmente, conclui-se o trabalho no capítulo 6 com perspectivas de continuação, pois essa tese representa uma semente que mostra uma maneira nova de entender a estrutura espiral.

Parâmetros da estrutura espiral da Galáxia - Determinação de Ω_p

2.1 Introdução

A estrutura espiral, geralmente, é vista como uma perturbação de densidade no disco. Mas o que entendemos por perturbação? Comumente, as teorias de perturbação descrevem as funções com um termo de ordem zero, o qual descreve o sistema de forma simples e, para o qual, na maioria das vezes se conhece a solução, mais uma parte perturbativa que apresenta pequenas alterações em relação ao sistema não perturbado. Isto significa que consideramos que qualquer uma das funções que aparecem nas equações (densidade, velocidade, potencial) pode ser representada como a soma de uma função conhecida mais uma pequena perturbação. Por exemplo, a densidade superficial de matéria no disco, Σ , pode ser escrita como

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1. \quad (2.1)$$

O termo de ordem zero, Σ_0 , é a densidade de equilíbrio que, no nosso caso, podemos entender como a densidade que descreve o disco axissimétrico, e Σ_1 é uma perturbação, que descreveria os braços espirais, tal que para teorias de pequenas perturbações $\Sigma_1 \ll \Sigma_0$. Como a solução para o termo de ordem zero é conhecida, temos somente que nos preocupar com o termo perturbativo e saber como este afeta o sistema. No caso dos discos de galáxias, podemos dizer que a função que melhor descreve o termo Σ_1 é uma espiral logarítmica. No Cap. 3, isso será melhor discutido.

Os braços espirais, no disco de galáxias, são suas estruturas mais proeminentes e são

formados devido a variações gravitacionais induzidas por perturbações na densidade superficial do disco estelar (Rix & Zaritsky, 1995; Grosbøl et al., 2004; Zibetti et al., 2009; Elmegreen et al., 2011). De que modo essas perturbações são induzidas ainda é um objeto de debate, como discutimos no Cap. 1. Alguns autores acreditam que os braços espirais no disco de galáxias possam ser excitados por forças de maré devido a uma galáxia companheira próxima (por exemplo, Oh et al., 2008; Dobbs et al., 2010; Struck et al., 2011). Outros acreditam que eles possam ser induzidos por uma barra central (por exemplo, Sellwood & Sparke, 1988; Salo et al., 2010). Adicionalmente, Lin & Shu (1964) postularam que os braços espirais possam também ser auto induzidos e mantidos sem a presença de um potencial gravitacional externo e ainda se propagariam como ondas de densidade estacionárias em um disco estável. Entretanto, a sua origem e evolução dinâmica em galáxias espirais estão longe de serem totalmente compreendidas.

As dúvidas com relação à estrutura espiral não são apenas teóricas. Em nossa Galáxia há dúvidas observacionais que permanecem ainda hoje como, por exemplo, o valor exato do *pitch angle* i , o número de braços m e, o mais importante, a natureza e o valor da velocidade angular do padrão espiral Ω_p . O modelo Galáctico interpretado inicialmente por Lin et al. (1969) através de ondas de densidade possui dois braços espirais com ângulo de inclinação de 6° . Eles associaram o braço observado de 3 kpc com a ressonância de Lindblad e estimaram um valor de Ω_p de $11 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

Nesta seção iremos discutir sobre os possíveis valores de i e m , mas daremos uma maior importância à determinação de Ω_p , para cujo valor em nossa Galáxia apresentaremos um novo método de determinação, com base na integração de órbitas estelares.

2.2 Número de braços e *pitch angle*

2.2.1 Nossa Galáxia teria dois ou quatro braços?

Essa não é uma questão trivial a se responder, pois estamos tentando visualizar a estrutura a partir de uma posição situada no plano galáctico. Geralmente, adota-se um modelo de quatro braços espirais para Via Láctea. Georgelin & Georgelin (1976) e Russeil (2003) delinearão quatro segmentos de braços com base em observações de regiões HII (hidrogênio ionizado), mas a distribuição é tão esparsa e irregular que é difícil ter certeza da estrutura que pode ser ajustada. Hou et al. (2009) coletaram dados mais recentes para

estudar a distribuição de nuvens moleculares gigantes (NMG) e regiões HII, encontrando que estruturas de dois ou quatro braços são compatíveis com as observações. Entretanto, nenhum dos ajustes é realmente convincente, e isso, em parte, é devido à dificuldade de se obter uma medida precisa das distâncias. Outros modelos, baseados na distribuição de hidrogênio neutro mapeado por [Oort et al. \(1958\)](#) e posteriormente por [Levine et al. \(2006\)](#), também encontraram uma estrutura espiral de quatro braços, mas eles não descartam a hipótese de que outros ajustes sejam possíveis. Mais recentemente, [Francis & Anderson \(2012\)](#) usando dados do 2MASS (do inglês, *Two Micron All Sky Survey*) encontraram evidências de que a nossa Galáxia possui uma estrutura espiral de dois braços bissimétricos (entende-se por bissimétricos braços bem definidos com simetria de 180°).

Na tabela abaixo, mostramos a porcentagem de galáxias classificadas por tipos morfológicos retiradas do trabalho de [Elmegreen & Elmegreen \(1989\)](#), que são flocculentas (F), têm múltiplos braços (M) e as que apresentam 2 braços (G, do nome em inglês “*Grand Design*”).

Tabela 2.1 - Porcentagem de classes de braços em galáxias SA,SAB,SB

Tipo Morfológico de Hubble	F	M	G
SA	47%	42%	11%
SAB	42%	46%	12%
SB	40%	44%	16%

A primeira coisa que podemos observar é que a maioria das galáxias não possui preferencialmente 2 braços, apresentando uma tendência maior a serem do tipo flocculentas ou com múltiplos braços. Outra coisa interessante a se notar é que a porcentagem de galáxias com 2 braços aumenta consideravelmente nas do tipo SB.

Na Fig. 2.1 à esquerda, mostramos um exemplo de uma galáxia que apresenta múltiplos braços. Mas, igualmente, podemos dizer que essa galáxia apresenta dois braços bem definidos com bifurcações e segmentos de braços, como ilustrado na Fig. 2.1 à direita. Em outras palavras, muitas galáxias que apresentam múltiplos braços podem ser interpretadas como galáxias que possam dois braços definidos, com a presença de segmentos de braços e bifurcações que seriam desvios da estrutura principal. Esses desvios podem ser consequência de um efeito natural das ressonâncias no disco galáctico, como será discutido mais a

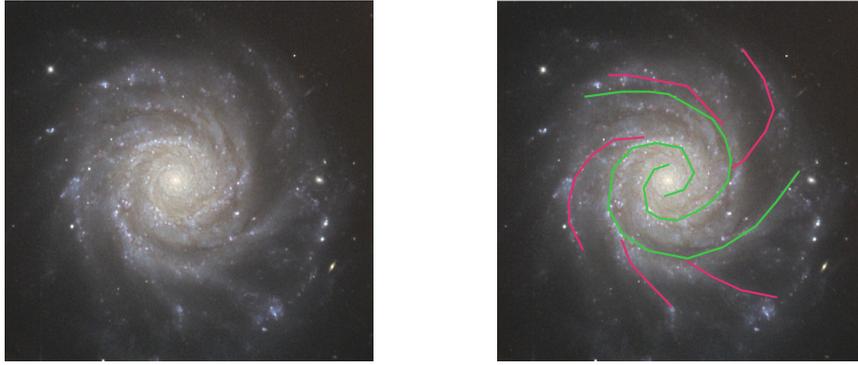


Figura 2.1: À esquerda, temos a imagem da galáxia NGC3938 na banda do visível, tirada com o Faulkes Telescope North. Na imagem à direita, sobreposemos dois braços espirais bissimétricos (verde) e os seguimentos menores (vermelho) que saem da estrutura principal. Esta é uma mera visualização feita à mão, não sendo feito nenhum ajuste aos braços.

frente.

Portanto, 1) baseando-se no trabalho de [Francis & Anderson \(2012\)](#) que mostra a existência de dois braços bissimétricos na Galáxia, 2) considerando que o intervalo de existência de braços espirais é limitado pelas ressonâncias externas e internas de Lindblad, logo um módulo de quatro braços seria muito curto no plano galáctico, 3) que a ressonância 4:1 teria um papel fundamental na estrutura da galáxia ([Lépine et al., 2011a](#)) e seria responsável pelo aparecimento de bifurcações e segmentos de braços como proposto por [Junqueira et al. \(2013\)](#), adotamos um modelo de dois braços onde os segmentos seriam uma consequência natural causados pela ressonância 4:1, o que também explicaria a tendência de múltiplos braços observada em galáxias.

2.3 O valor do *pitch angle*

Historicamente, o primeiro modelo da estrutura espiral da Galáxia, feito por [Lin et al. \(1969\)](#), possuía dois braços com *pitch angle* de 6° . No entanto, dois braços com 6° ou quatro com *pitch angle* de 14° podem parecer iguais, em termos de distância média entre os braços.

2.3.1 Relação entre tipos morfológicos e *pitch angle*

Para determinar o tipo de uma galáxia espiral, a maior parte dos estudos fotométricos usam múltiplos critérios, tais como: a razão bojo-disco, a proeminência e a distorção dos

braços, e o *pitch angle* dos braços (ver, por exemplo, Kennicutt, 1981). Kennicutt (1981) e Kennicutt & Hodge (1982) fizeram um levantamento de 113 galáxias próximas, no óptico, e mediram o *pitch angle* de seus braços espirais, obtendo os resultados mostrados nas Figs. 2.2 e 2.3. Outro estudo mais recente, analisando a correlação do *pitch angle* com diversos parâmetros das galáxias, foi feito por Davis et al. (2012).

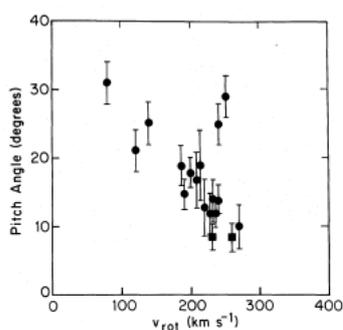


Figura 2.2: Relação entre *pitch angle* e a velocidade de rotação. Figura retirada de Kennicutt & Hodge (1982).

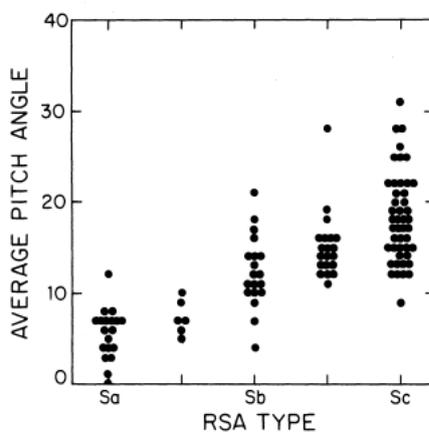


Figura 2.3: Relação entre *pitch angle* e o tipo morfológico. Figura retirada de Kennicutt (1981).

Nas Figs. 2.2 e 2.3, temos a relação entre o *pitch angle* com o máximo de velocidade na curva de rotação e com o tipo morfológico, respectivamente. A Fig. 2.3 mostra que galáxias do tipo-Sa têm um *pitch angle* médio de aproximadamente 6° , do tipo-Sab têm um *pitch angle* médio de $\sim 7^\circ$, do tipo-Sb têm um *pitch angle* médio de $\sim 12^\circ$, do tipo-Sbc têm um *pitch angle* médio de $\sim 14^\circ$ e do tipo-Sc têm um *pitch angle* médio de $\sim 18^\circ$.

Baseado em múltiplos critérios de classificação, a Via Láctea pode ser dita como uma galáxia do tipo Sbc (ver, pág. 27 de Binney & Tremaine, 2008). Analisando a Fig. 2.3,

podemos observar que as galáxias do tipo-Sbc têm *pitch angles* que variam entre 11° e 28° , possuindo um valor médio de 14° . Pelo gráfico da Fig. 2.2, um *pitch angle* de 14° é compatível com uma curva de rotação plana que possui um máximo em aproximadamente $V_{max} \simeq 220$ km/s, que é o caso da Via Láctea. Pérez-Villegas et al. (2012), baseados no estudo do comportamento orbital de estrelas e na densidade de resposta, limitaram o *pitch angle* a $\sim 20^\circ$, para que o potencial seja auto-consistente.

Baseados nas evidências acima, neste trabalho assumimos um *pitch angle* de referência de 14° .

2.4 Medida da velocidade do padrão espiral utilizando aglomerados abertos

Um dos parâmetros de maior importância no estudo da estrutura espiral da Galáxia é a velocidade do padrão espiral Ω_p . Mishurov et al. (1979) propuseram um método para estimar seu valor, baseado na cinemática das cefeidas, e encontraram $\Omega_p = 19.1 \pm 3.6$ km s⁻¹ kpc⁻¹. Popova (2006), através de outro método obteve $\Omega_p = 21.7 \pm 2.8$ km s⁻¹ kpc⁻¹, também utilizando cefeidas. Amaral & Lépine (1997) usaram dados de aglomerados abertos, baseados em seus locais de nascimento, e determinaram $\Omega_p = 20 \pm 2$ km s⁻¹ kpc⁻¹. Gerhard (2011) fez uma revisão dos valores encontrados na literatura para Ω_p e encontrou uma variação entre 15-30 km s⁻¹ kpc⁻¹.

Outra maneira de estimar o valor de Ω_p é obter o valor do raio de corrotação, R_{cr} , lugar onde o padrão espiral e as estrelas teriam a mesma velocidade angular. Nas últimas décadas, muitos artigos têm apontado para um raio de corrotação da Galáxia situado próximo à órbita solar (Marochnik et al., 1972; Creze & Mennessier, 1973; Mishurov & Zenina, 1999, entre outros). Um argumento adicional para que o R_{cr} esteja próximo ao raio da órbita solar é que a teoria clássica de braços espirais nos diz que a faixa de existência dentro da qual os braços podem existir está entre as ressonâncias interna e externa de Lindblad e a corrotação estaria aproximadamente no meio destas ressonâncias. Dados da literatura coletados por Scarano & Lépine (2013) apoiam esta teoria, mostrando que a corrotação ocorre por volta da metade da região entre as extremidades onde os braços são visíveis. Na nossa Galáxia, os braços espirais estendem-se de 3 a 13 kpc, aproximadamente (Russeil, 2003), o que situaria a corrotação por volta de 8 kpc. Recentemente, poucos métodos diretos têm permitido que a incerteza sobre o local do raio de corrotação caia

para algumas centenas de parsecs. É importante fazermos uma pausa aqui e explicar o que chamamos de métodos diretos. Basicamente são os métodos que não utilizam nenhum modelo complexo que envolva muitos parâmetros, como é o caso de simulações de N-corpos ou modelos de evolução química. Tendo isso em mente, os resultados seguintes fazem parte da categoria de determinações diretas, como o resultado mostrado por [Dias & Lépine \(2005\)](#), segundo quem $R_{cr} = (1.06 \pm 0.08)R_0$ não tem uma dependência forte com a curva de rotação adotada, sendo R_0 a posição do Sol na Galáxia. Uma segunda observação direta é a posição do anel vazio de hidrogênio neutro na corrotação ([Amôres et al., 2009](#)). Uma terceira observação seria a posição do braço espiral na forma de um quadrado situado na ressonância 4:1 ([Lépine et al., 2011a](#)).

Nessa seção, iremos descrever mais um método que se enquadra na determinação de métodos diretos. Para determinar Ω_p consideramos a interação entre as estrelas e o padrão espiral, como será melhor explicado em [2.4.2](#).

2.4.1 Sobre a amostra de aglomerados abertos

Os aglomerados abertos desempenham um importante papel no estudo da estrutura e dinâmica da Galáxia pelo fato de estarem concentrados essencialmente ao longo do plano da Via Láctea, fornecendo, portanto, evidências sobre a cinemática e evolução do disco Galáctico. Atualmente cerca de 2200 aglomerados abertos são conhecidos em nossa Galáxia. Essa é provavelmente uma pequena porcentagem da população total, sobre a qual se estima um número da ordem de 100 mil aglomerados.

Os aglomerados abertos, que foram utilizados para determinar a velocidade do padrão espiral, pertencem ao *New Catalogue of Optically Visible Open Cluster and Candidates*, publicado por ([Dias et al., 2002](#), DAML02)¹, versão 3.3, atualizado em janeiro de 2013. Tal catálogo que representa uma atualização dos catálogos prévios de [Lynga & Palous \(1987\)](#) e [Mermilliod et al. \(1995\)](#), contém 2140 objetos com parâmetros físicos como: distância (74.5%), idade (74.5%), movimento próprio (54.7%) e velocidade radial (24.2%). Neste trabalho, utilizamos 513 aglomerados abertos do DALML02, os quais possuem distância, movimento próprio e velocidade radial medidos. Na [Fig. 2.4](#), mostramos a distribuição do logaritmo da idade para esses objetos. Podemos notar que a maior parte deles possui uma idade inferior a 300 milhões de anos (387) e somente 48 possuem idades acima de 1 Gano.

¹ <http://www.astro.iag.usp.br/~wilton/>

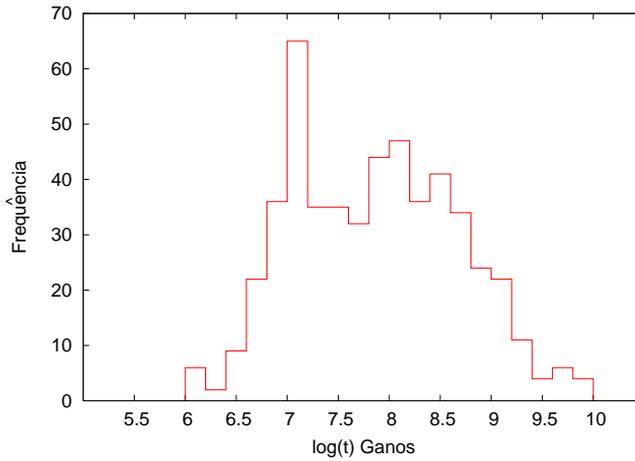


Figura 2.4: Distribuição do logaritmo da idade dos aglomerados que contém dados cinemáticos do, *New Catalogue of Optically Visible Open Cluster and Candidates*, compilado por Dias et al. (2002).

2.4.2 Interação entre as estrelas e o braço espiral

A presença de uma quebra de simetria no potencial, causado pela presença de braços espirais, induzirá órbitas não circulares. Conforme as estrelas interagem com o padrão espiral, elas trocam momento angular e energia com este. A taxa com a qual isso ocorre depende da velocidade angular do padrão espiral Ω_p .

É importante ressaltar aqui que nas equações seguintes a massa foi omitida por questão de simplicidade. Portanto, deve-se entender que estamos sempre nos referindo ao momento angular por unidade de massa e à energia por unidade de massa.

Em um referencial inercial, conforme o padrão espiral gira a estrela varia sua energia, pois temos um potencial que depende do tempo. Já em um referencial que gire com a mesma velocidade que o padrão espiral, a energia se conserva. Em termos matemáticos, podemos escrever esta situação da seguinte forma:

$$H = E - \Omega_p J, \quad (2.2)$$

onde H é a energia no referencial não-inercial, E e J são a energia total e o momento angular no referencial inercial, respectivamente (a dedução da equação acima é detalhada no Cap. 4). A energia E da estrela é dada por:

$$E = \frac{1}{2} \left[p_R^2 + \frac{J^2}{R^2} \right] + \Phi_0(R) + \Phi_1(R, \varphi), \quad (2.3)$$

onde p_R é o momento radial na direção do centro da galáxia, $\Phi_0(R)$ é o potencial axissimétrico e $\Phi_1(R, \varphi)$ é o potencial perturbador devido aos braços espirais. Uma estrela em uma órbita circular terá a Eq. 2.3 reduzida a

$$E_0 = \frac{J_0^2}{2R_c^2} + \Phi_0(R_c), \quad (2.4)$$

e, portanto, a Eq. 2.2 pode ser reescrita como

$$H = E_0 - \Omega_p J_0. \quad (2.5)$$

Uma vez que a energia no referencial não-inercial se conserva, temos que $\Delta H = 0$. Assim podemos igualar as Eqs. 2.5 e 2.2 obtendo

$$\Delta E = \Omega_p \Delta J, \quad (2.6)$$

com $\Delta E = E - E_0$ e $\Delta J = J - J_0$.

Esta relação não é nova e foi derivada também por [Lynden-Bell & Kalnajs \(1972\)](#) e [Sellwood & Binney \(2002\)](#). O desafio é encontrar as grandezas ΔE e ΔJ para uma amostra de estrelas na Galáxia. A primeira consideração que faremos é a seguinte: como $\Phi_0(R) \gg \Phi_1(R, \varphi)$, e mesmo que a variação no potencial axissimétrico seja baixa $\Delta\Phi_0 \simeq 0$ (ver Eq. 2.11), a energia cinética é muito maior do que $\Phi_1(R, \varphi)$. Portanto, podemos desprezar o termo que descreve o potencial perturbador pois, no momento da observação, esta informação estaria contida em p_R . Há uma outra implicação importante em ignorar o termo $\Phi_1(R, \varphi)$ que se deve ao fato de não estarmos dando nenhuma informação sobre a perturbação, a priori.

Para calcularmos o termo ΔE temos que saber qual era a energia inicial da estrela, ou seja, temos que nos fazer a seguinte pergunta: qual era a energia da órbita circular que corresponde a sua energia inicial antes da perturbação?

Quando efetuamos uma simulação computacional esta informação é facilmente recuperada, mas no caso real as únicas informações que temos sobre os aglomerados são a sua posição e velocidade, o que nos fornece o estado atual de energia, mas não sua variação.

Para contornar este problema fizemos o seguinte: para cada aglomerado, integramos suas órbitas somente sob a influência do potencial central $\Phi_0(R)$, por vários períodos de

rotação em um referencial inercial, ou seja, o movimento é governado pela Eq. 2.3 sem o termo $\Phi_1(R, \varphi)$. A Fig. 2.5 ilustra uma órbita integrada para o aglomerado M67.

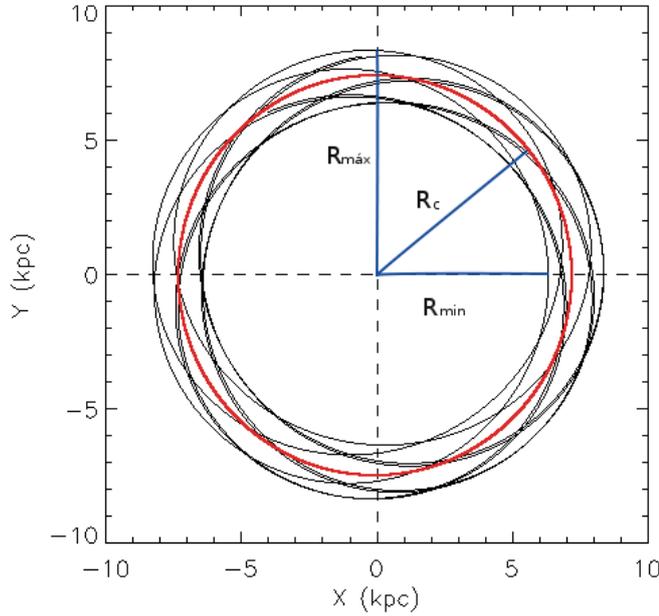


Figura 2.5: Esta figura ilustra uma órbita típica, vista de um referencial inercial, onde a estrela descreve elipses que estão confinadas dentro de uma região circular. A órbita, neste caso de M67, é ilustrada pelos contornos em preto após vários ciclos de integração. O círculo em vermelho seria o raio da órbita circular (R_c), que se situa entre o raio mínimo (R_{min}) e o raio máximo (R_{max}).

Após vários períodos de rotação, podemos perceber que a órbita fica confinada dentro de um círculo com raio mínimo R_{min} e máximo R_{max} (ver, Fig. 2.5). Isso pode ser melhor interpretado se olharmos a Fig. 2.6. Nela está representado o potencial efetivo, que é a soma do potencial da Galáxia mais o termo devido à energia rotacional da partícula ($J^2/2mR^2$). Para um dado raio (R), momento angular (J) e uma certa perturbação radial (p_R), a partícula fica confinada dentro do poço de energia, oscilando sua órbita entre um máximo e mínimo como mostra a linha tracejada da Fig. 2.6, a menos, é claro, que a perturbação seja tão grande que a partícula atinja energia suficientemente alta para escapar do potencial. O raio onde a órbita teria somente energia circular está indicado pelos pontos em preto na mesma figura. Podemos facilmente notar que eles se encontram por volta da metade entre os pontos de máximo e mínimo, $R_{min} < R_c < R_{max}$, onde

$$R_c \simeq \frac{R_{max} + R_{min}}{2}. \quad (2.7)$$

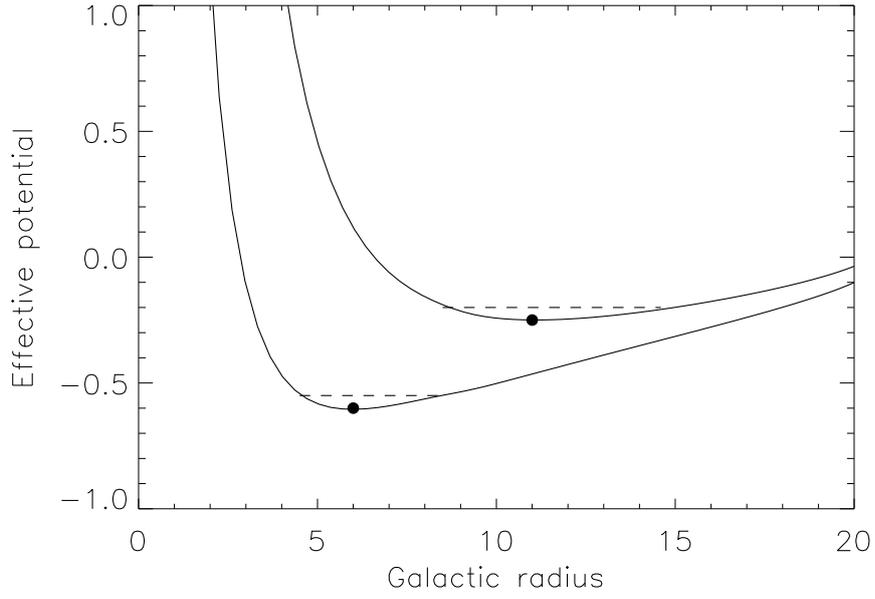


Figura 2.6: Ilustração do potencial efetivo da Galáxia feito por Lépine et al. (2011b). A figura mostra dois mínimos de energia em 6 e 11 kpc. Os pontos indicam a posição radial de um movimento puramente circular, enquanto a variação radial é indicada pela linha tracejada.

A órbita que corresponde ao raio R_c está destacada em vermelho na Fig. 2.5. Uma vez que encontramos a posição equivalente à órbita circular, podemos calcular E_0 e J_0 , pois essas grandezas dependem somente de R_c como mostram as equações logo abaixo:

$$J_0(R_c) = R_c V_{rot}(R_c), \quad (2.8)$$

$$E_0(R_c) = \frac{J_0^2(R_c)}{2R_c^2} + \Phi_0(R_c), \quad (2.9)$$

onde V_{rot} é a curva de rotação adotada. Essa dupla de equações define o estado inicial dos aglomerados (J_0, E_0) , e os dados observacionais fornecem a informação sobre o estado atual (J, E) ; com isso, temos todos os ingredientes necessários para calcular ΔJ e ΔE :

$$\Delta J_i = R_i V_{t_i} - R_c V_{rot}(R_c), \quad (2.10)$$

$$\Delta E_i = \frac{V_{r_i}^2}{2} + \frac{V_{t_i}^2 - V_{rot}^2(R_c)}{2} + \Delta\Phi_0(R_i - R_c), \quad (2.11)$$

onde o índice i refere-se ao valor medido atualmente para os aglomerados. Dessa forma, R_i é a distância do aglomerado ao centro da galáxia, V_{t_i} é a velocidade de rotação do

aglomerado e V_{r_i} é a velocidade na direção radial, apontada para o centro da Galáxia, tal que, por comparação com a Eq. 2.3, podemos dizer que $p_R = V_{r_i}$. O termo $\Delta\Phi_0(R_i - R_c) = \Phi_0(R_i) - \Phi_0(R_c)$ pode ser calculado a partir da integral

$$\Delta\Phi_0(R_i - R_c) = \int_{R_c}^{R_i} \frac{V_{rot}^2(R)}{R} dR. \quad (2.12)$$

Portanto, a partir das grandezas observáveis: distâncias, velocidades heliocêntricas e o movimento próprio (d, V_h, μ), podemos obter (R_i, V_{r_i}, V_{t_i}) , como explicado em 2.4.3. Na curva de rotação é onde estão embutidos os únicos parâmetros do modelo R_0 e V_0 , que seriam a distância do Sol ao centro da Galáxia e a sua velocidade de rotação, respectivamente.

2.4.3 Mudança de coordenadas e a curva de rotação adotada

Nesta subseção, iremos descrever como foram feitas as transformações do sistema heliocêntrico para o sistema galactocêntrico. A Fig. 2.7 ilustra a passagem de um sistema para o outro. À esquerda, temos as velocidades obtidas com relação ao Sol e, à direita, as velocidades convertidas para o sistema centrado no centro da Galáxia, as quais iremos usar nas Eqs. 2.10 e 2.11.

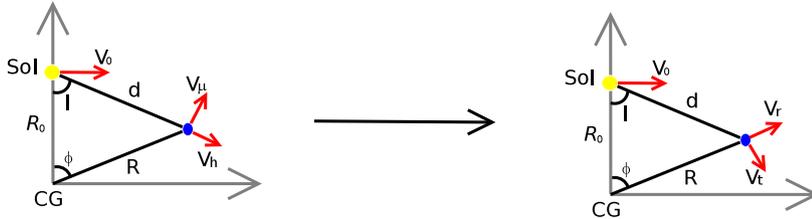


Figura 2.7: Em ambas as figuras temos: distância do Sol ao objeto (d), distância do centro da Galáxia (CG) ao objeto (R), distância do centro da Galáxia ao Sol (R_0), longitude galáctica (l), ângulo galáctico (ϕ), e a velocidade do Sol em torno da Galáxia (V_0). À esquerda temos V_h que é a velocidade heliocêntrica obtida na linha de visada, e V_μ é a velocidade calculada do movimento próprio, perpendicular à linha de visada. À direita temos as velocidades em relação ao centro galáctico onde, V_r é a velocidade radial apontada na direção do anticentro galáctico, e V_t que é a velocidade de rotação do objeto, sempre perpendicular a R .

Como já foi dito antes, o que observamos são as grandezas d, V_μ e V_h . No entanto, queremos R, V_r e V_t . A conversão de $d \rightarrow R$ é a mais trivial e pode ser obtida pela equação:

$$R = \sqrt{(R_0 - y)^2 + x^2}, \quad (2.13)$$

onde x e y denotam a posição do objeto. Pela Fig. 2.7 é fácil perceber que x e y são dados pelas equações:

$$x = d \sin(l) \cos(b), \quad (2.14)$$

$$y = d \cos(l) \cos(b). \quad (2.15)$$

O termo $\cos(b)$ que aparece nas equações acima é para projetar o objeto no plano galáctico; portanto, o angulo b é a latitude galáctica, o qual foi omitido da Fig. 2.7 para simplificar o desenho.

Agora temos que transformar as velocidades $(V_h, V_\mu) \rightarrow (V_r, V_t)$. Primeiramente, vamos definir V_μ , pois o que se observa na verdade é o movimento próprio (μ), ou seja, o movimento aparente do objeto no céu. Logo a velocidade depende da distância que esse objeto se encontra do Sol. Antes, gostaríamos de enfatizar que estamos trabalhando com velocidades e distâncias no plano da Galáxia, porém alguns aglomerados abertos situam-se um pouco acima do plano, o que torna necessária uma correção no movimento próprio. Portanto, V_μ pode ser decomposto em duas direções, $V_{\mu l}$ e $V_{\mu b}$, um na direção da longitude galáctica e o outro na direção da latitude galáctica. No catálogo DAML02 os movimentos próprios já são dados nas direções l e b . Portanto, $V_{\mu l}$ e $V_{\mu b}$ são dados pelas equações

$$V_{\mu l} = 4.74 \mu_l d \cos(b), \quad (2.16)$$

$$V_{\mu b} = 4.74 \mu_b d \sin(b), \quad (2.17)$$

onde 4.74 é um fator para corrigir unidades. Para d em unidades de kpc e μ em mas/ano ($mas = \text{milissegundo de arco}$), V_μ possui unidades de km/s.

Para ficar mais fácil de compreender, vamos projetar as velocidades V_h , $V_{\mu l}$ e $V_{\mu b}$ nas coordenadas x e y . Assim, temos:

$$V_x = V_{\mu l} \cos(l) + (V_h \cos(b) - V_{\mu b}) \sin(l), \quad (2.18)$$

$$V_y = V_{\mu l} \sin(l) - (V_h \cos(b) - V_{\mu b}) \cos(l). \quad (2.19)$$

Agora vamos corrigir as velocidades com respeito ao *LSR* (do inglês, *Local Standard of Rest*). Os valores na direção x e y que iremos adotar para esta correção são $V_{x_{lsr}} = 12.24$ km/s (na direção de rotação Galáctica) e $V_{y_{lsr}} = -11.1$ km/s (apontado para o antcentro Galáctico) que foram obtidos por Schönrich et al. (2010). Como V_h é a velocidade relativa medida em um referencial situado no Sol, a velocidade real da estrela é $V_h + V_0$. Desta forma, as velocidades corrigidas ficam:

$$V_V = V_x + V_{x_{lsr}} + V_0, \quad (2.20)$$

$$V_U = V_y + V_{y_{lsr}}. \quad (2.21)$$

A transformação final para V_r e V_t é dada simplesmente pelas equações abaixo

$$V_r = V_V \sin(\phi) + V_U \cos(\phi), \quad (2.22)$$

$$V_t = V_V \cos(\phi) - V_U \sin(\phi). \quad (2.23)$$

e ϕ é o ângulo entre R_0 e R , como ilustrado na Fig. 2.7.

A curva de rotação que adotamos (Eq. 2.24) para calcular a Eq. 2.12 é uma expressão similar a que foi derivada por Fich et al. (1989) e similar às expressões usadas pelo nosso grupo (Lépine et al., 2008; Amôres et al., 2009; Lépine et al., 2011a):

$$V_{rot}(R) = \alpha \exp \left[-\frac{R}{\beta} - \left(\frac{\gamma}{R} \right)^2 \right] + \delta \exp \left[-\frac{R}{\epsilon} - \frac{\eta}{R} \right] - \xi \exp \left[-\frac{(R - \kappa)^2}{2\lambda^2} \right]. \quad (2.24)$$

Na expressão acima, adicionamos um termo gaussiano para ajustar os dados próximos a R_0 , onde observamos um mínimo na curva de rotação (ver, Sofue et al., 2009; Lépine et al., 2011a). Uma interpretação mais detalhada de uma expressão similar a esta que usamos pode ser vista em Lépine & Leroy (2000). Para ajustar os parâmetros da Eq. 2.24 utilizamos os dados da curva de rotação observada da Galáxia obtida por Burton & Gordon (1978), Clemens (1985) e Fich et al. (1989). Os parâmetros solares (R_0, V_0) que utilizamos em cada ajuste obedecem a seguinte expressão:

$$V_0 = R_0 \Omega_0 - V_{x_{lsr}}. \quad (2.25)$$

Nesta equação, o termo Ω_0 é a velocidade angular do Sol e tem seu valor relativamente bem conhecido, $\Omega_0 = 30.24 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ (Reid & Brunthaler, 2004, baseado no movimento próprio de Sgr A* no plano Galáctico) e o valor de $V_{x_{lsr}}$ é o mesmo que mostramos anteriormente. Portanto, para cada valor de R_0 está atrelado um valor de V_0 segundo a Eq. 2.25. Com vistas a analisar a influência que R_0 e V_0 exercem sobre a determinação de Ω_p , construímos quatro modelos com diferentes valores para esses parâmetros, mostrados na Tabela 2.2.

	R_0 (kpc)	V_0 (km/s)
Modelo 1	7.0	199.44
Modelo 2	7.5	214.56
Modelo 3	8.0	229.68
Modelo 4	8.5	244.80

Tabela 2.2 - Valores de R_0 e V_0 .

Para cada modelo, ajustamos uma curva de rotação. Os valores dos parâmetros obtidos em cada ajuste encontram-se na Tabela 2.3 logo abaixo.

	α	β	γ	δ	ϵ	η	ξ	κ	λ
Modelo 1	230	140	3.3	325	3.3	0.04	24	8.36	0.8
Modelo 2	238	140	3.4	350	3.3	0.08	22	8.90	0.8
Modelo 3	251	143	3.4	323	3.5	0.04	24	9.32	0.8
Modelo 4	262	150	3.4	365	3.5	0.12	24	9.80	0.8

Tabela 2.3 - Valores dos parâmetros da Eq. 2.24 para cada modelo da Tabela 2.2.

2.4.4 Resultados

Para cada modelo, calculamos os valores de ΔE e ΔJ e, segundo a Eq. 2.6, Ω_p pode ser dado por

$$\Omega_p = \frac{\Delta E}{\Delta J}. \quad (2.26)$$

Fazendo uso dessa equação, calculamos a distribuição para toda a amostra de aglomerados abertos para cada modelo. A distribuição foi calculada utilizando o *Kernel Density*

Estimator (KDE), o qual está implementado na função “*density*” do software *R* (R core Team, 2012) e discutido com maiores detalhes no livro escrito por Bowman & Azzalini (1997).

O valor de Ω_p mais provável ocorre onde a distribuição tem um máximo (ver Sellwood & Binney, 2002). A Fig. 2.8, mostra a distribuição dos valores da razão $\Delta E/\Delta J$ que, pela Eq.2.26, implica ser igual a Ω_p . Nós também separamos a amostra em duas faixas de idades: aglomerados com mais de 150 milhões de anos e aglomerados com menos de 150 milhões de anos. Não pudemos separar mais as idades, pois a amostra ficaria estatisticamente pobre como podemos ver na Fig. 2.4 na qual se vê a distribuição de idades da amostra utilizada.

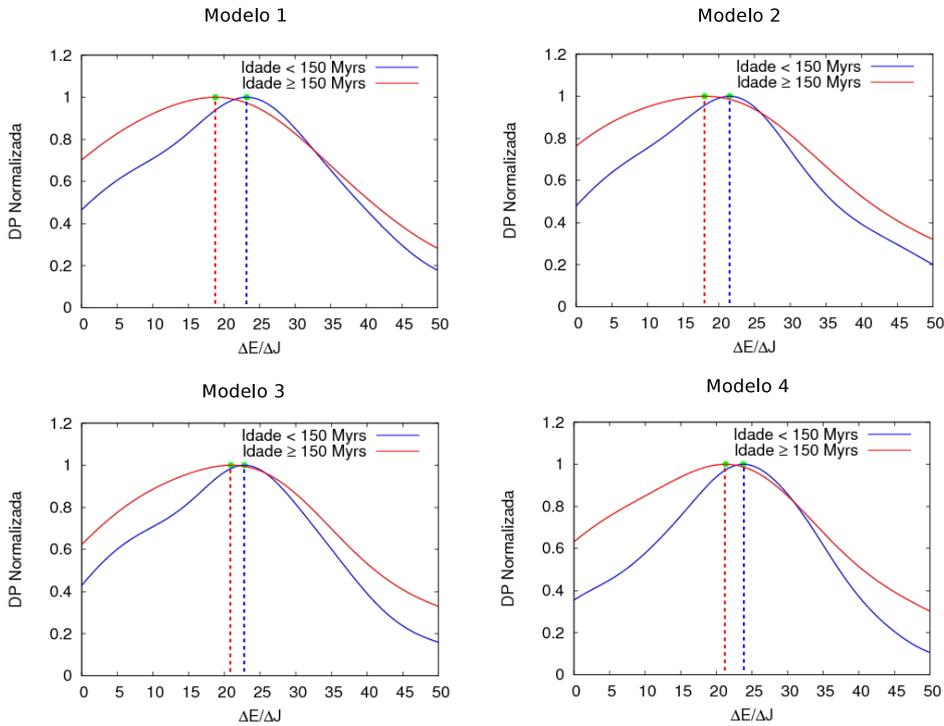


Figura 2.8: Distribuição da densidade de probabilidade normalizada. Em azul, temos a distribuição da variação da energia sobre a variação do momento angular, para os aglomerados abertos com idades inferiores a 150 milhões de anos. Em vermelho, temos a mesma distribuição só que para aglomerados abertos com idades superior a 150 milhões de anos. Os pontos em verde marcam os máximos da distribuição, equivalente ao valor mais provável para ambas as idades.

O resultado para cada modelo é mostrado na Tabela 2.4. A primeira coisa que podemos notar é que a influência da curva de rotação adotada não é tão crítica, pois a variação de Ω_p entre os modelos adotados foi de $2.3 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Já a diferença de valores devido a idade é maior. Para os aglomerados, com idades maiores do que 150 milhões de anos, os valores de Ω_p são sistematicamente menores. Essa diferença pode estar associada a

uma maior dispersão de velocidades, σ_R . Para os aglomerados mais velhos a dispersão radial de velocidades seria maior, portanto eles teriam uma maior excursão radial (ver Fig. 2.6). Assim, a determinação de R_c como descrevemos acima ficaria mais imprecisa. Parte da dispersão que observamos, também pode ser devido a erros nas medidas de V_r . Outra possível explicação para o espalhamento seria devido às estrelas que migraram suas órbitas, assim a determinação de R_c torna-se praticamente impossível.

	Ω_p (km s ⁻¹ kpc ⁻¹)	
	t < 150 Myrs	t ≥ 150 Myrs
Modelo 1	23.2	18.8
Modelo 2	21.5	18.0
Modelo 3	22.8	20.9
Modelo 4	23.8	21.3

Tabela 2.4 - Valores de Ω_p .

Os valores listados na Tabela 2.4 estão de acordo com os valores obtidos na literatura, discutidos no início desta seção, e não sugerem nenhuma alteração significativa no valor de Ω_p . Baseados nos resultados aqui obtidos, iremos adotar nesse trabalho um valor de $\Omega_p = 23 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

Esse método mostrou-se efetivo e promissor para analisar o valor de Ω_p . Uma perspectiva seria a aplicação em uma quantidade maior de dados, que tenham uma boa precisão tanto em determinação de distâncias quanto em movimentos próprios, como será o caso dos dados que o satélite *GAIA* irá nos disponibilizar.

Novo modelo para perturbação espiral

3.1 Modelo Clássico

A densidade superficial de um disco fino pode ser representada matematicamente como a soma de uma densidade axissimétrica, ou não-perturbada, $\Sigma_0(R)$ e uma parte perturbada $\Sigma_1(R, \varphi)$, a qual representa o padrão espiral em um referencial em rotação, girando com velocidade angular Ω_p . O ângulo azimutal, no referencial em rotação, é representado por $\varphi = \theta - \Omega_p t$, onde θ é o ângulo no referencial inercial. Geralmente, a densidade superficial é dada pela parte real da seguinte equação (veja [Binney & Tremaine, 2008](#)):

$$\Sigma_1(R, \theta - \Omega_p t) = \Sigma_s e^{i[m(\theta - \Omega_p t) + f_m(R)]}, \quad (3.1)$$

m representa o número de braços, $f_m(R)$ é conhecida como “*shape function*” e descreve os braços espirais e Σ_s é uma função que varia com o raio e nos dá a amplitude do padrão espiral. A partir de Σ_1 , como descrito pela Eq. 3.1, e usando a lei de Gauss (essa lei relaciona a integral do campo gravitacional sobre uma superfície fechada com a integral de volume do divergente desse campo, que é a aplicação do teorema da divergência) obtemos o potencial Φ_1 :

$$\Phi_1(R, \theta - \Omega_p t) = \Phi_d e^{i[m(\theta - \Omega_p t) + f_m(R)]}, \quad (3.2)$$

onde

$$\Phi_d = -\frac{2\pi G \Sigma_s}{|k|}. \quad (3.3)$$

Na expressão acima, k é o número de ondas e G é a constante gravitacional. Usando as Eqs. 3.2 e 3.3, obtemos

$$\Phi_1(R, \theta - \Omega_p t) = -\frac{2\pi G \Sigma_s}{|k|} e^{i[m(\theta - \Omega_p t) + f_m(R)]}. \quad (3.4)$$

Este é um resultado bem conhecido, encontrado por [Lin et al. \(1969\)](#), o qual deriva também da teoria WKB, abreviação de Wentzel, Kramers e Brillouin, usada para resolver certas equações diferenciais em teorias de perturbação.

3.2 Nova descrição para os braços espirais

Antes de começarmos a descrição do novo modelo, é importante esclarecer como interpretamos os braços espirais. Uma maneira de entendê-los foi discutida por [Kalnajs \(1972\)](#). Ele mostrou que se introduzirmos algum grau de organização nas órbitas estelares, com sucessivas órbitas fechadas aumentando gradativamente de raio e levemente rotacionadas uma em relação à outra, é possível reproduzir braços espirais, como ilustrado na Fig. 3.1. Através desta figura podemos ver que as regiões mais densas adquirem a forma de espirais logarítmicas. Para que tal configuração se torne possível, todas as órbitas devem precessionar com a mesma velocidade angular Ω_p , conhecida como velocidade do padrão espiral, a qual se faz necessária para transformar as órbitas, geralmente abertas no referencial inercial, em órbitas fechadas no referencial do padrão espiral.

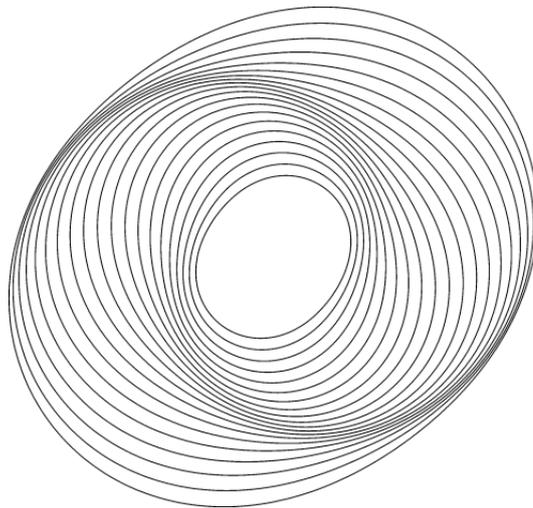


Figura 3.1: Arranjo de orbitas elípticas rotacionadas entre si.

A grande vantagem dos braços de [Kalnajs \(1972\)](#) com relação às estruturas de [Toomre \(1964\)](#), também constituídas do adensamento estelar, é que eles não sofrem o problema

de serem destruídos pela rotação diferencial, ou seja, a estrutura espiral seria mais estável e portanto, de longa duração.

Devemos lembrar que a busca por soluções estáveis ou quase estacionárias tem, tradicionalmente, sido o objetivo de modelos dinâmicos para o disco. Esta preocupação é perfeitamente justificável, uma vez que foi descoberto que a morfologia de várias galáxias *grand design*, observadas no infravermelho próximo, revelam a existência de uma estrutura contendo 2 braços proeminentes constituída principalmente de estrelas velhas (Block & Wainscoat, 1991; Rix & Zaritsky, 1994; Block et al., 1994), favorecendo as teorias que suportam a existência de braços estáveis e mantidos pelo disco estelar. Outra evidência observacional, em nossa Galáxia, de que a estrutura espiral é estável foi obtida por Lépine et al. (2011b), mostrando, baseado no gradiente de metalicidade, que a estrutura espiral da Galáxia teria pelo menos alguns bilhões de anos. Entretanto, há autores que acreditam na existência de braços espirais de curta duração ou com características transientes; essa idéia é, em grande parte, baseada em resultados obtidos das simulações como, por exemplo, as de Sellwood (2011).

3.2.1 Dedução da nova perturbação

Tradicionalmente, a perturbação da densidade superficial no disco vem sendo descrita pela Eq. 3.1, ou equações similares de funções senoidais. Essa aproximação, no entanto, não é muito realista. Por exemplo, o perfil azimuthal de brilho observado em discos de galáxias não obedece a uma função do tipo seno (Seigar & James, 1998; Kendall et al., 2011), e muito menos o perfil de densidade obtido nas simulações (Contopoulos & Grosbol, 1988). Consideramos que esses perfis são mais parecidos com um excesso de densidade que segue uma espiral logarítmica, com um caráter gaussiano na direção transversal. O potencial que produz uma densidade parecida com essa descrição tem a seguinte forma:

$$\Phi_1(R, \varphi, z) = -\zeta_0 R e^{-\frac{R^2}{\sigma^2} [1 - \cos(m\varphi - f_m(R))] - \varepsilon_s R - |kz|}, \quad (3.5)$$

onde ζ_0 é a amplitude de perturbação, ε_s^{-1} é o fator de escala da espiral, σ descreve a largura do perfil gaussiano na direção azimuthal e k é o número de onda. Os fatores de escala do disco e da estrutura espiral serão discutidos com maiores detalhes na Sec. 3.3, uma vez que seus valores não são necessariamente os mesmos. A função $f_m(R)$ determina a forma da espiral e é dada por:

$$f_m(R) = \frac{m}{\tan(i)} \left[\ln \left(\frac{R}{R_i} \right) \right] + \gamma, \quad (3.6)$$

onde m é o número de braços, i é o *pitch angle*, R_i é a posição radial correspondente à posição angular γ que é um ângulo de fase. Geralmente adotamos $\gamma = 0$. Esta equação é semelhante à Eq. 1.2, onde fizemos uma descrição matemática das espirais logarítmicas. A próxima etapa é deduzir a densidade que esse tipo de potencial gera.

Aproximação de disco fino para o novo potencial:

A equação de Poisson para um disco fino pode ser expressada da seguinte forma

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \Sigma(R, \varphi) \delta(z), \quad (3.7)$$

onde $\delta(z)$ é a função delta de Dirac. Isso representa um disco de espessura zero, para o qual a densidade em $z = 0$ é infinita e para qualquer ponto de $z \neq 0$ a densidade é nula. A Eq. 3.8, representa a forma de um potencial que é solução parcial da Eq. 3.7 na direção z

$$\Phi_1(R, \varphi, z) = \Phi_{10}(R, \varphi) e^{-|kz|}. \quad (3.8)$$

Substituindo 3.8 em 3.7 e isolando a densidade, chegamos a

$$\Sigma(R, \varphi) \delta(z) = \frac{1}{4\pi G} (e^{-|kz|} \nabla_{R,\varphi}^2 \Phi_{10} + \Phi_{10} \frac{\partial^2 e^{-|kz|}}{\partial z^2}), \quad (3.9)$$

onde $\nabla_{R,\varphi}^2$ é o Laplaciano em coordenadas polares. O segundo termo do lado direito dessa equação desaparece quando integramos ambos os lados da equação acima de $z = -\infty$ à $z = \infty$. Assim, a Eq. 3.9 torna-se:

$$\Sigma(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi G} \left(\frac{1}{k} \nabla_{R,\varphi}^2 \Phi_{10} \right). \quad (3.10)$$

O potencial Φ_{10} é a parte polar da Eq. 3.5 sem o termo em z . Ele é semelhante à Eq. A.9, deduzida no Apêndice A, com a diferença de que ele tem um termo de decaimento radial $Re^{-\varepsilon_s R}$

$$\Phi_{10}(R, \varphi) = -\zeta_0 R e^{\frac{-R^2}{\sigma^2} [1 - \cos \chi] - \varepsilon_s R}, \quad (3.11)$$

onde $\chi = m\varphi - f_m(R)$, com $f_m(R)$ dado pela Eq. 3.6. Podemos encontrar a densidade, substituindo 3.11 em 3.10 e resolver o Laplaciano, como feito nas próximas linhas:

$$\nabla_{R,\varphi}^2 \Phi_{10} = \zeta_0 e^{-\psi} (\phi_1 - \phi_2), \quad (3.12)$$

onde

$$\psi = \frac{R^2}{\sigma^2} (1 - \cos \chi) + \varepsilon_s R, \quad (3.13)$$

$$\phi_1 = 3 \frac{\partial \psi}{\partial R} + R \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)^2 \right], \quad (3.14)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{R} \left[1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (3.15)$$

As derivadas de ψ nas equações acima são:

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{2R}{\sigma^2} \left(1 - \cos \chi - \frac{m}{2 \tan i} \sin \chi \right) + \varepsilon_s, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} = \frac{1}{\sigma^2} \left[2 + \left(\frac{m^2}{\tan^2 i} - 2 \right) \cos \chi - \frac{3m}{\tan i} \sin \chi \right], \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{mR^2}{\sigma^2} \sin \chi, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \frac{m^2 R^2}{\sigma^2} \cos \chi. \quad (3.19)$$

Para um dado valor de R , um máximo de densidade ocorre quando $\cos \chi = 1$ e $\sin \chi = 0$. Assumindo que o *pitch angle* i é pequeno, o termo de maior importância é aquele que contém $\tan^2 i$ no denominador. Desta forma, a Eq. 3.12 fica reduzida a

$$\nabla_{R,\varphi}^2 \Phi_{10} = \frac{\zeta_0 m^2 R}{\sigma^2 \tan^2 i} e^{-\varepsilon_s R}. \quad (3.20)$$

Portanto, a densidade máxima é dada, simplesmente, pela substituição da equação acima em 3.10

$$\Sigma_{max} = \frac{\zeta_0}{2\pi Gk} \frac{m^2 R}{\sigma^2 \tan^2 i} e^{-\varepsilon_s R}. \quad (3.21)$$

A teoria clássica de ondas de densidade descrita por Lin & Shu (1964) foi modelada por uma função do tipo cosseno, onde o número de ondas k é igual a

$$k = \frac{m}{R|\tan i|}, \quad (3.22)$$

para uma descrição logarítmica dos braços espirais. Portanto, mantendo e substituindo tal definição de k na Eq. 3.21 e com um número de braços $m = 2$ a densidade máxima fica

$$\Sigma_{max} = \frac{\zeta_0}{\pi G} \frac{R^2}{\sigma^2 |\tan i|} e^{-\varepsilon_s R}. \quad (3.23)$$

Se escolhermos $\sigma = R$, recuperamos a fórmula clássica de Lin et al. (1969)

$$\Sigma_{max} = \frac{\zeta_0}{\pi G} \frac{1}{|\tan i|} e^{-\varepsilon_s R}. \quad (3.24)$$

Note que o contraste de densidade não depende somente da amplitude de perturbação ζ_0 , como nas teorias clássicas, mas depende também de σ , que descreve o quão largos ou estreitos os braços espirais são. No nosso modelo, o valor de σ pode ser constante ou uma função de R .

3.2.2 Algumas propriedades da nova descrição

Resolvemos a equação de Poisson para Eq. 3.5 adotando a hipótese de disco fino e de que os braços são *tightly wound spiral*, ou seja, são braços com um valor baixo de i (*pitch angle*), de forma que $k \gg 1$. Assim, para o plano $z = 0$, temos que a densidade tem uma forma geral descrita pela Eq. 3.25, que é uma aproximação da densidade deduzida em 3.2.1, próxima à densidade máxima:

$$\Sigma_s = \Sigma_{s_0} e^{-\frac{R^2}{\sigma^2} [1 - \cos(m\varphi - f_m(R))]}, \quad (3.25)$$

onde $\Sigma_{s_0} = \Sigma_{max}$, que está associada à amplitude de perturbação pela equação abaixo. Como foi deduzido anteriormente,

$$\Sigma_{s_0}(R) = \frac{\zeta_0 m}{2\pi G} \frac{R^2}{\sigma^2 |\tan i|} e^{-\varepsilon_s R}. \quad (3.26)$$

O perfil azimuthal correspondente à Eq. 3.25 está ilustrado na Fig. 3.2. Este perfil é compatível com perfis azimuthais observados em galáxias espirais (Seigar & James, 1998), e também é o mesmo perfil obtido por simulações de N-corpos (Baba et al., 2013).

Gostaríamos de enfatizar que σ é a meia altura dos braços espirais na direção de círculos galactocêntricos (ver dedução no Apêndice A). Pelo fato de todos estes círculos cruzarem

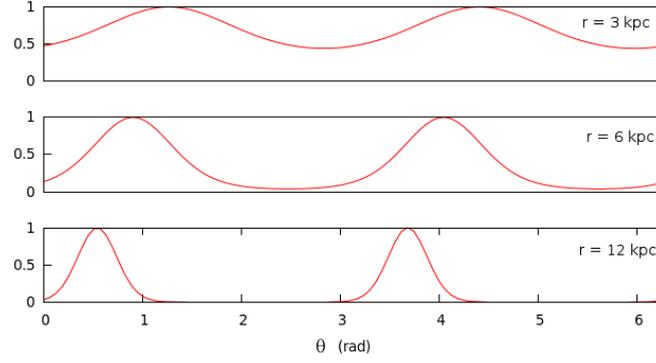


Figura 3.2: Perfil de densidade azimutal em diferentes raios com $m = 2$, $i = 14^\circ$, e $\sigma = 4.7$ kpc. Aqui, nós escolhemos $\Sigma_{s_0} = 1$, uma vez que estamos somente interessados em ver como o perfil de densidade varia com o ângulo.

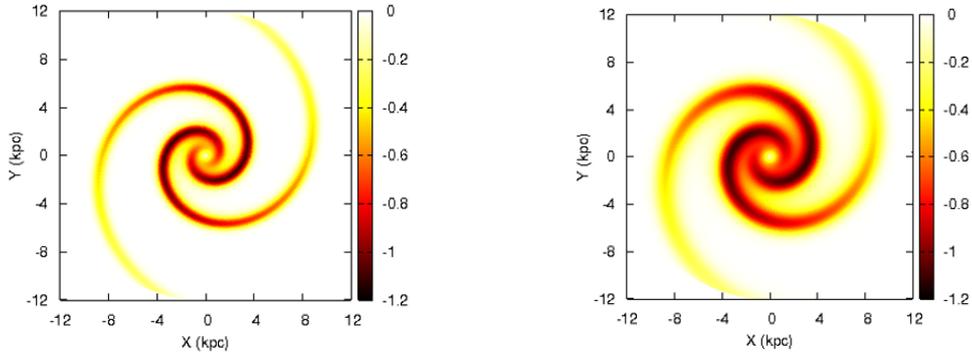


Figura 3.3: Mapa do potencial perturbador no plano da galáxia para $i = 14^\circ$. As cores representam os valores de $\Phi_1(R, \varphi)$ em unidades arbitrárias. A figura da esquerda representa o potencial com $\sigma = 2.5$ kpc, e a da direita, $\sigma = 4.7$ kpc, com $\sigma_\perp = 0.6$ kpc e $\sigma_\perp = 1.1$ kpc, respectivamente.

os braços espirais com o mesmo ângulo i , a largura deles na direção perpendicular σ_\perp , que daria a verdadeira largura dos braços é

$$\sigma_\perp = \sigma \sin(i). \quad (3.27)$$

Este parâmetro permite-nos reproduzir diferentes larguras de braços, como mostrado na Fig. 3.3. As forças radiais e tangências devidas a perturbação espiral podem ser encontradas resolvendo o gradiente do potencial, como segue abaixo:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial R}\hat{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi; \quad \vec{F}_R = \frac{\partial\Phi_1}{\partial R}; \quad \vec{F}_\varphi = \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}. \quad (3.28)$$

Na Fig. 3.4, mostramos a força na direção radial, dada na Eq. 3.28, produzida pelos braços espirais em função da distância galactocêntrica R . A linha em vermelho representa

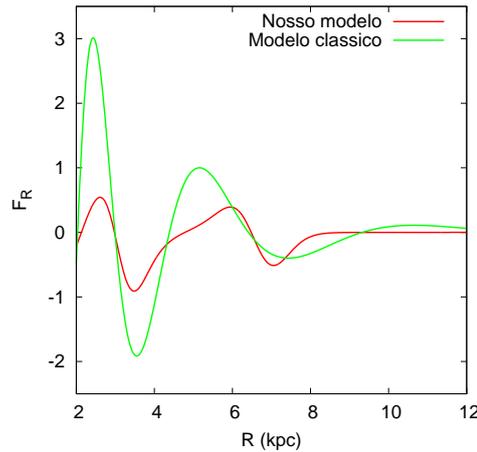


Figura 3.4: Força radial devida aos braços espirais na direção $\varphi = 0$. A linha em vermelho representa a força radial gerada pelo nosso potencial, enquanto a linha em verde está associada a força radial gerada pelo modelo clássico, descrito pela Eq. 3.2. Aqui, valores positivos de força significam que a estrela seria empurrada para fora e valores negativos ela seria puxada para dentro da galáxia. Neste gráfico, o número de braços é $m = 2$, o pitch angle $i = 14^\circ$, $\varepsilon_s = 0.4 \text{ kpc}^{-1}$ e para o nosso modelo $\sigma = 4.7 \text{ kpc}$.

o nosso modelo, enquanto a linha em verde representa a força gerada pelo modelo clássico obtida do potencial da Eq. 3.2. A força radial produzida pelo nosso modelo é muito similar à força produzida pelo modelo de Pichardo et al. (2003), com a vantagem de que em nosso modelo a aproximação é totalmente analítica, portanto mais simples. Por outro lado, o modelo de Pichardo et al. (2003) tem a vantagem de ser naturalmente tridimensional.

Em ambos os casos, a amplitude de perturbação foi fixada para ser igual a um, uma vez que só queremos ver como se dá a variação do perfil de força e não estamos interessados em valores absolutos. A primeira coisa que podemos notar na Fig. 3.4 é que, para o modelo clássico, a força radial tem valor maior para uma mesma amplitude de perturbação, principalmente nas regiões mais internas. Portanto, a amplitude de perturbação no caso clássico seria menor do que a do nosso modelo. Isto se deve ao fato de que um potencial senoidal varia entre valores positivos e negativos, portanto a força que é proporcional à variação do potencial é mais forte neste caso do que no caso onde o nível de base do potencial é igual a zero. Outra diferença entre os dois modelos ocorre por volta de 9 kpc, onde, no modelo clássico, a força se torna positiva enquanto no nosso modelo a força tende vagarosamente a zero, mas ainda se mantém negativa. Isto acontece porque uma estrela que se encontra nessa região sente o efeito do braço mais externo, como podemos ver na Fig. 3.3, olhando na direção do eixo x . Portanto, como esperado, uma estrela seria puxada para dentro e não empurrada para fora, como ocorre no modelo clássico devido a

uma densidade negativa.

3.3 Relação entre o contraste de densidade e a amplitude de perturbação

Nesta seção, iremos comparar a amplitude de perturbação ζ_0 com o contraste de densidade, utilizando parâmetros da nossa Galáxia. Isso nos dará uma ideia da força da perturbação mais adequada a ser utilizada. Seguindo [Antoja et al. \(2011\)](#), utilizamos como medida do contraste de densidade

$$A_2 \sim \frac{\Sigma_{s_0}}{\Sigma_d}, \quad (3.29)$$

onde Σ_d é a densidade superficial da parte axissimétrica do disco e Σ_{s_0} é o máximo de densidade dos braços espirais. Esta relação é válida sob a hipótese de uma razão massa-luminosidade (M/L) da ordem de 1, quando A_2 é medido nas bandas do infravermelho ([Kent, 1992](#)). [Antoja et al. \(2011\)](#) recolheram da literatura estimativas para o contraste de densidade, tanto Galáctico quanto extragaláctico, e encontram uma faixa de valores entre $0.13 \leq A_2 \leq 0.23$. Portanto, um valor médio estaria em torno de $A_2 = 0.18$.

Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Número de braços	m	2	-
Pitch angle	i	14°	-
Meia largura	σ	4.7	kpc
Fator de escala	ε_s^{-1}	2.5	kpc
Velocidade do padrão espiral	Ω_p	23	km s ⁻¹ kpc ⁻¹
Amplitude de perturbação	ζ_0	600	km ² s ⁻² kpc ⁻¹

Tabela 3.1 - Propriedades adotadas para os braços espirais

A densidade máxima dos braços espirais é dada pela Eq. 3.26. É importante frisar que nos referimos ao máximo em um certo raio, e não a um máximo sobre todo o disco. Para simplificar a análise, consideramos que a densidade superficial axissimétrica obedece a uma lei exponencial, dada pela Eq. 3.30. Discos galácticos frequentemente são representados por tais leis. Exemplos de tais ajustes podem ser encontrados na literatura ([Schombert & Bothun, 1987](#); [de Jong, 1996](#); [Graham, 2001](#); [Ganda et al., 2009](#)). Para muitas galáxias, entretanto, a lei exponencial não é uma boa aproximação. O perfil de brilho, em escala logarítmica, apresenta uma certa curvatura, ou seja, um desvio da lei exponencial em

vários kpc a partir do centro. [Kormendy \(1977\)](#) propôs uma lei exponencial modificada $\Sigma_d(R) = \Sigma_0 \exp[-R/\alpha - (\beta/R)^n]$ para descrever tais perfis. Essa expressão diminui a luminosidade para valores de raios iguais ou menores que $R = \beta$ e se comporta como uma exponencial pra raios maiores. Ela também evidencia que existe um buraco no disco para raios pequenos (ou ainda, ou disco e o bojo não convivem; onde o bojo começa a existir o disco desaparece). No entanto, a hipótese de distribuição de densidade puramente exponencial simplifica a análise para raios grandes e nos dá uma boa pista sobre o valor da amplitude de perturbação. Assim,

$$\Sigma_d(R) = \Sigma_0 e^{-\varepsilon_d R}. \quad (3.30)$$

O contraste de densidade pode ser obtido dividindo a Eq. 3.26 pela Eq. 3.30

$$\frac{\Sigma_{s_0}}{\Sigma_d} = \frac{\zeta_0 m}{2\pi G \sigma^2 |\tan i| \Sigma_0} R^2 e^{-(\varepsilon_s - \varepsilon_d)R}. \quad (3.31)$$

Se assumirmos que o fator de escala do disco e dos braços espirais são os mesmos ($\varepsilon_d = \varepsilon_s$, o que é uma hipótese razoável pois não queremos que a amplitude da espiral decaia muito rápido) e calcularmos o valor de Σ_0 usando valores de densidade da vizinhança solar, $\Sigma_d(R_0) = 49 M_\odot \text{ pc}^{-2}$ (ver [Binney & Tremaine, 2008](#), Tabela 1.1), para $R_0 = 7.5$ kpc e $\varepsilon_d^{-1} = 2.5$ kpc, encontramos que $\Sigma_0 = 984 M_\odot \text{ pc}^{-2}$. Então, usando os valores da Tabela 3.1 para o número de braços e o *pitch angle*, a Eq. 3.31 se reduz para

$$\frac{\Sigma_{s_0}}{\Sigma_d} = 3.10^{-4} \frac{\zeta_0 R^2}{\sigma^2}. \quad (3.32)$$

Podemos notar a partir desta equação que o contraste de densidade não depende somente da amplitude de perturbação ζ_0 , mas também de σ , que descreve a largura dos braços. No nosso modelo, podemos estabelecer σ como uma constante ou uma função que depende do raio.

Uma vez que, até agora, estamos usando parâmetros da estrutura espiral que são baseados no estudo de nossa Galáxia, devemos estimar o contraste de densidade para uma distância em torno de 5 kpc, a qual em nosso modelo se encontra a meio caminho entre a IRL e a corrotação, conforme será discutido posteriormente. Numericamente, temos $R \approx \sigma$, logo a Eq. 3.32 torna-se

$$\frac{\Sigma_{s_0}}{\Sigma_d} \approx 3.10^{-4} \zeta_0. \quad (3.33)$$

O gráfico do contraste de densidade, baseado nesta equação, é mostrado na Fig. 3.5. Comparando os valores de A_2 retirados da literatura (como discutido no começo desta seção) com o gráfico do contraste de densidade, encontramos uma faixa de valores para a amplitude de perturbação entre 400 a 800 $\text{km}^2 \text{s}^{-2} \text{kpc}^{-1}$, os quais são compatíveis com a faixa de valores $0.13 \leq A_2 \leq 0.23$. Usando um valor médio, $A_2 = 0.18$, temos que $\zeta_0 = 600 \text{ km}^2 \text{s}^{-2} \text{kpc}^{-1}$.

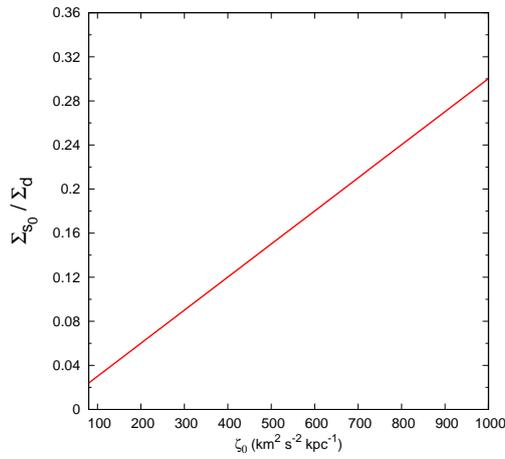


Figura 3.5: Contraste de densidade, Σ_{s_0}/Σ_d , em função da amplitude de perturbação para a Galáxia.

Esta é uma estimativa para $R \approx 5 \text{ kpc}$. No entanto, como podemos ver na Eq. 3.32, o contraste de densidade aumenta com o raio. Kendall et al. (2011) e Elmegreen et al. (2011) mostram várias galáxias em que o contraste de densidade cresce com o raio. Se adotarmos $\varepsilon_d = \varepsilon_s$, o contraste varia com o raio ao quadrado, o que parece ser um crescimento muito rápido se comparado com o contraste da maioria das galáxias observadas. Este problema pode ser atenuado de duas maneiras: 1) os fatores de escala da espiral e do disco podem ser ligeiramente diferentes ($\varepsilon_d < \varepsilon_s$), o que produzirá um decréscimo exponencial e 2) a largura dos braços pode aumentar com o raio, produzindo um contraste de densidade com um aumento moderado, o qual estaria mais próximo dos resultados de Kendall et al. (2011). Para uma dada galáxia, seria possível averiguar o perfil de densidade azimutal e sua variação com o raio, a fim de ajustar a largura dos braços com as observações. Um mérito do nosso modelo é que tal ajuste seria simples de ser feito.

Modelos e Metodologias Aplicadas

Neste capítulo iremos descrever os métodos e programas mais importantes utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

4.1 Esquema de integração

Conhecendo as duas componentes do potencial, $\Phi_0(R)$ e $\Phi_1(R, \varphi)$, onde a primeira se refere ao potencial axissimétrico, e a segunda, ao potencial perturbador (devido aos braços espirais, como descrito no Cap. 3), podemos derivar as equações de movimento governadas por elas. A Fig. 4.1 ilustra uma estrela em um referencial não inercial que gira junto com o padrão espiral.

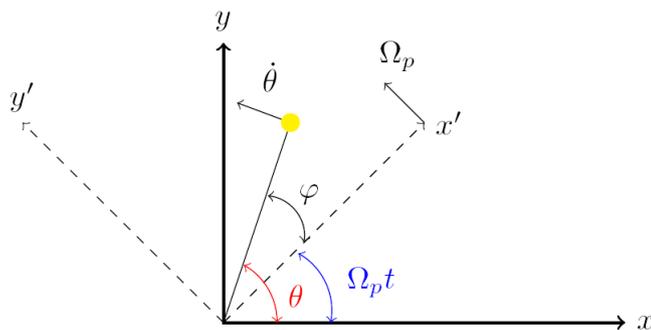


Figura 4.1: Esquema do plano Galáctico. O ponto amarelo representa uma estrela com velocidade angular $\dot{\theta}$ (medida em um referencial inercial). O referencial fixo no padrão espiral (linha tracejada) gira a uma velocidade angular Ω_p .

4.1.1 Dedução das equações de movimento

Pela Fig. 4.1, vemos que a posição da estrela é dada por:

$$\vec{R} = R e^{i\theta} \hat{R}, \quad (4.1)$$

onde \hat{R} é o vetor unitário na direção radial (positivo apontado para o anticentro galáctico). Sendo $\theta = \varphi + \Omega_p t$ temos:

$$\vec{R} = R e^{i(\varphi + \Omega_p t)} \hat{R}, \quad (4.2)$$

derivando a equação 4.2 com respeito ao tempo, encontramos que a velocidade da estrela é

$$\dot{\vec{R}} = \dot{R} \hat{R} + R(\dot{\varphi} + \Omega_p) \hat{\theta}, \quad (4.3)$$

com $\hat{\theta}$ sendo o vetor unitário na direção azimutal perpendicular a \hat{R} . Portanto, a energia cinética por unidade de massa é descrita como

$$T = \frac{1}{2} \left[\dot{R}^2 + R^2(\dot{\varphi} + \Omega_p)^2 \right]. \quad (4.4)$$

Usando a energia cinética obtida acima encontramos a Lagrangiana:

$$L = T - \Phi_{eff}(R, \varphi) = \frac{1}{2} \left[\dot{R}^2 + R^2(\dot{\varphi} + \Omega_p)^2 \right] - \Phi_{eff}, \quad (4.5)$$

sendo, $\Phi_{eff} = \Phi_0(R) + \Phi_1(R, \varphi)$. O Hamiltoniano é dado por:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L = p_R \dot{R} + p_\varphi \dot{\varphi} - L, \quad (4.6)$$

onde p_i e \dot{q}_i são os momentos e velocidades generalizadas. A partir das equações 4.5 e 4.6, obtemos a equação 4.7:

$$H = \frac{1}{2} \left[\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \right] - \frac{1}{2} R^2 \Omega_p^2 + \Phi_{eff}. \quad (4.7)$$

Definindo os momentos por unidade de massa:

$$p_R = \frac{\partial T}{\partial \dot{R}} = \dot{R}, \quad (4.8)$$

$$J_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = R^2(\dot{\varphi} + \Omega_p). \quad (4.9)$$

Podemos fazer a seguinte transformação canônica $H(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow H(q_i, p_i)$. Usando as equações 4.8 e 4.9 e substituindo em 4.7, obtemos a equação de Hamilton–Jacobi. Como já tínhamos descrito no Cap. 2 (Eqs. 2.2 e 2.3), só que de maneira mais formal:

$$H = \frac{1}{2} \left[p_R^2 + \frac{J_1^2}{R^2} \right] - \Omega_p J_1 + \Phi_0(R) + \Phi_1(R, \varphi); \quad (4.10)$$

p_R e J_1 são os momentos lineares e angulares por unidade de massa, respectivamente. Devemos chamar a atenção para J_1 , o qual é medido com respeito ao referencial inercial.

Willian Rowan Hamilton, em 1835, descreveu as equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.11)$$

As quantidades (q, p) são chamadas de variáveis canônicas. No nosso caso, $q_1 = R$, $q_2 = \varphi$, $p_1 = p_R$ e $p_2 = J_1$. Desta forma, segundo as Eqs. 4.10 e 4.11, as equações de movimento são dadas por;

$$\dot{R} = p_R, \quad (4.12)$$

$$\dot{p}_R = \frac{J_1^2}{R^3} - \frac{\partial \Phi_0(R)}{\partial R} - \frac{\partial \Phi_1(R, \varphi)}{\partial R}, \quad (4.13)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{J_1}{R^2} - \Omega_p, \quad (4.14)$$

$$\dot{J}_1 = -\frac{\partial \Phi_1(R, \varphi)}{\partial \varphi}. \quad (4.15)$$

Portanto, as equações acima definem a órbita de uma estrela no plano Galáctico em um referencial fixo no padrão espiral. A integração foi efetuada usando o algoritmo descrito em 4.1.3.

4.1.2 Potencial Galáctico

O primeiro passo na análise da estrutura espiral consiste na elaboração de um modelo de distribuição de massa para a galáxia, em outras palavras, temos que saber como o potencial galáctico se comporta. A principal informação da dinâmica de uma galáxia espiral é derivada de sua curva de rotação observada, ou seja, da distribuição de velocidade

rotacional em função do raio galactocêntrico. Na verdade, a curva de rotação nos fornece, de maneira direta, o gradiente do potencial

$$\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R} = \frac{V_{rot}^2(R)}{R}. \quad (4.16)$$

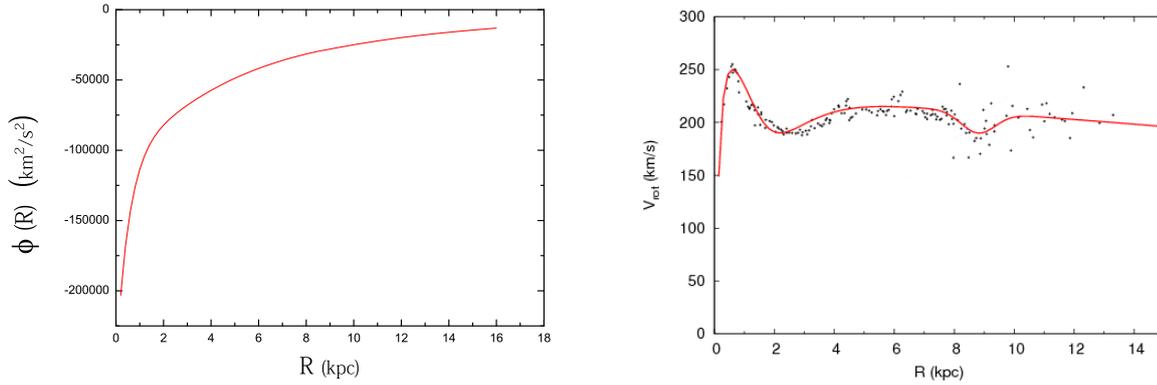


Figura 4.2: O gráfico à esquerda mostra o potencial axissimétrico obtido pela curva de rotação, à direita, que foi ajustada (linha em vermelho) aos dados do [Burton & Gordon \(1978\)](#), [Clemens \(1985\)](#) e [Fich et al. \(1989\)](#) (pontos em preto), exatamente como descrito na Sec. 2.4.3.

Portanto, uma vez que conhecemos a curva de rotação, podemos obter $\Phi(R)$ através da integração da Eq. 4.16. A curva de rotação adotada é a mesma que foi descrita no Cap. 2, pela Eq. 2.24 usando os parâmetros do Modelo 2. Para encontrar a constante de integração, consideramos que $\Phi(60) \rightarrow 0$. A Fig. 4.2 mostra $\Phi(R)$ e a curva de rotação adotada em função de R .

O potencial axissimétrico, o qual é função somente de R , pode ser deduzido para qualquer curva de rotação adotada. Desta forma, a Eq. 4.16 é geral e pode ser aplicada a qualquer modelo que descreva V_{rot} .

4.1.3 Integrador Simplético

Na maioria dos sistemas estelares, as órbitas não podem ser calculadas de forma analítica. Portanto, algoritmos eficientes para realizar as integrações numéricas estão entre as ferramentas mais importantes na dinâmica estelar. Aqui iremos descrever brevemente os algoritmos que utilizamos.

O integrador simplético, também conhecido como Rung-Kutta implícito (Si), tem a grande vantagem de conservar a energia do sistema de forma muito mais eficiente que o

Rung-Kutta explícito, ou simplesmente RK.

A equação geral para qualquer RK é dada pelas Eqs. 4.17 e 4.18

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{y}_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{F}(\mathbf{Y}_j, t_n + c_j h_{n+1}) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{F}(\mathbf{Y}_i, t_n + c_j h_{n+1}) \quad (4.18)$$

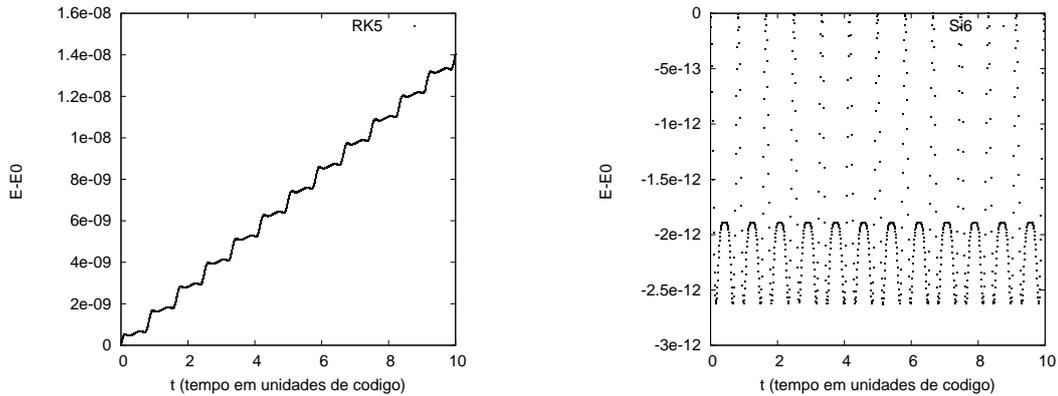


Figura 4.3: A figura da esquerda mostra o RK5 (Rung-Kutta de quinta ordem), e a figura da direita mostra Si6 (Simplético de sexta ordem). Podemos ver claramente que no Si6 a variação da energia é pelo menos 4 ordens de grandeza menor que em RK5. Um ponto importante a se ressaltar, é que a energia aumenta linearmente com o passo de integração para o método RK5, enquanto que, para o método Si6 a energia oscila entre um erro máximo e mínimo.

O termo \mathbf{y}_{n+1} é equivalente ao lado esquerdo das Eqs. 4.12 – 4.15, e \mathbf{F} corresponde ao lado direito. O passo de integração é h , executado n vezes.

Se $a_{ij} = 0$ para qualquer $i \leq j$, a Eq. 4.17 pode ser resolvida explicitamente, pois cada valor de \mathbf{Y}_i é calculado independente do valor anterior. Esse método é então chamado de explícito ou, simplesmente, Runge-Kutta.

Quando o método é implícito, a Eq. 4.17 provê um sistema acoplado de $s \times D$ equações algébricas, onde D é o número de equações e s é a ordem da matriz que contém os termos a_{ij} , ou seja, se $s = 3$ temos seis constantes a_{ij} e o método (Si) é dito ser de ordem seis (Si6). No caso do explícito, teríamos que ter $s = 6$ para um RK de ordem seis (RK6).

A razão pela qual o método (Si) não era utilizado amplamente deve-se ao custo computacional, por isso, ele era usado somente em certos problemas, onde se visava mais a estabilidade das propriedades do sistema do que o tempo de cálculo. Com a melhoria dos computadores, isso já não é mais um grande problema.

Na Fig. 4.3, podemos ver claramente a diferença entre os dois métodos. Para o método Si6 a variação da energia é pelo menos 4 ordens de grandeza menor que em RK5. Podemos notar também que a energia aumenta linearmente com o passo de integração para o método RK5, enquanto que, para o método Si6 a energia oscila entre um erro máximo e mínimo.

Para mais detalhes sobre o método de integração simplético ver [Sanz-Serna & Calvo \(1994\)](#), páginas 31 e 32. Para o caso de $s = 3$, os coeficientes a_{ij} e b_i são:

Tabela 4.1 - Coeficientes usados nas Eqs. 4.17 e 4.18, para $s = 3$.

$a_{11} = 5/36$	$a_{12} = 2/9 - \sqrt{15}/15$	$a_{13} = 5/36 - \sqrt{15}/30$
$a_{21} = 5/36 + \sqrt{15}/24$	$a_{22} = 2/9$	$a_{23} = 5/36 - \sqrt{15}/24$
$a_{31} = 5/36 + \sqrt{15}/30$	$a_{32} = 2/9 + \sqrt{15}/15$	$a_{33} = 5/36$
$b_1 = 5/3$	$b_2 = -4/3$	$b_3 = 5/3$

Desta forma, temos todos os ingredientes necessários para executar a integração das órbitas.

4.2 Busca por órbitas periódicas

Nesta seção iremos descrever como encontramos as órbitas periódicas. Mas, primeiro, vamos esclarecer o que denominamos por órbita periódica. Uma órbita pode ser fechada ou aberta. No caso de uma órbita aberta, a periodicidade não tem muito sentido, pois são órbitas que não se fecham como, por exemplo: uma órbita com uma trajetória hiperbólica, ou mesmo órbitas confinadas em toros, mas que nunca passam pelo mesmo ponto após n revoluções. Portanto, só há sentido em falar de periodicidade para os casos onde as órbitas se fecham. Uma certa órbita pode se fechar após $2\pi n$ revoluções ($n \geq 1, \in \mathbb{N}$), mas estamos particularmente interessados no caso em que $n = 1$, ou seja, na família de órbitas que se fecham após 2π revoluções. Essas órbitas são as responsáveis pelas ressonâncias de Lindblad que descrevemos na Sec. 1.4.

4.2.1 Descrição do algoritmo - Busca por órbitas periódicas

Na Fig. 4.4, ilustramos um fluxograma simplificado do programa escrito para encontrar as órbitas periódicas, onde nos baseamos nos mapas de Poincaré para esta tarefa, como

explicaremos melhor a seguir.

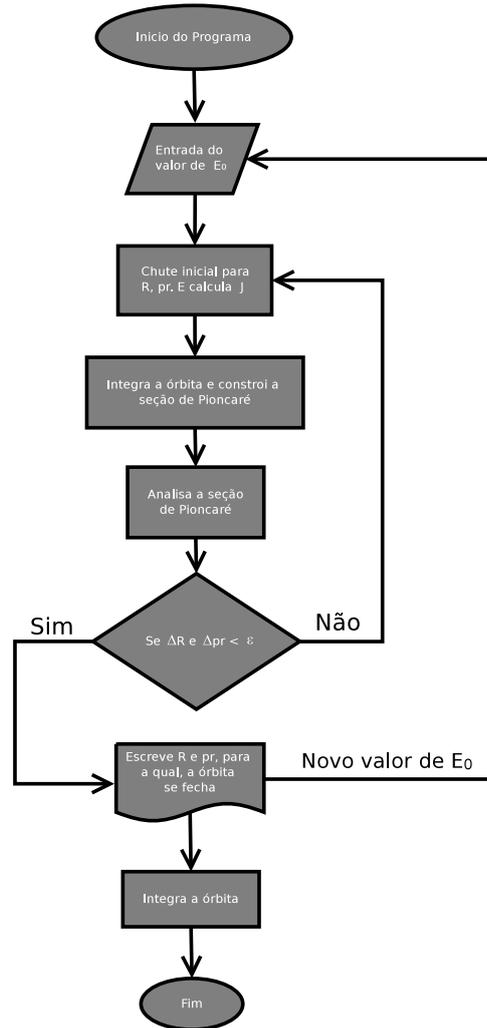


Figura 4.4: Diagrama que apresenta o fluxograma do programa escrito para encontrar as órbitas fechadas.

Seguindo o fluxograma, vamos começar pela escolha da energia inicial. A energia devida a uma órbita puramente circular pode ser obtida da Eq. 2.4, só que em um referencial não inercial teremos a energia dada por:

$$E_0(R_c) = \frac{J_0^2}{2R_c^2} - \Omega_p J_0 + \Phi_0(R_c). \quad (4.19)$$

O momento angular J_0 pode ser definido pela curva de rotação adotada da seguinte forma; $J_0 = R_c V_{rot}(R_c)$. Como o potencial axissimétrico é central, $\Phi = \Phi_0(R_c)$, o hamiltoniano independe da coordenada azimutal, e a expressão canônica referente a J_0 expressa a conservação do momento angular. Portanto, esta é simplesmente a condição para uma órbita

circular. Assim, podemos definir a energia de uma certa órbita somente em função da coordenada radial, onde iremos sempre denotar R_c como sendo o raio da órbita circular que corresponde a uma certa energia $E_0(R_c)$, a qual, por sua vez, obedece a Eq.4.19.

Vamos para segunda etapa do fluxograma. Como descrevemos anteriormente, para cada raio (R_c) temos um valor de E_0 . Então, voltamos a Eq. 4.10 e igualamos $H = E_0$. Portanto, temos que encontrar as condições iniciais $(R, \dot{R}, J_1, \varphi)$ que irão fechar a órbita para um certo valor de energia E_0 . A última variável pode ser fixa em $\varphi = 0$ (que é onde iremos definir a seção de Poincaré) e o momento angular J_1 pode ser encontrado resolvendo a Eq. 4.20, que foi deduzida igualando as Eqs. 4.10 e 4.19. Os valores de J_1 são as raízes dessa equação de segundo grau. Sempre escolhemos $J_1 > 0$ pois, para $J_1 < 0$, a órbita seria retrógrada. No caso das duas raízes serem positivas, adotamos o valor de J_1 mais próximo de J_0 . Desta forma, temos somente que lidar com o par de variáveis (R, \dot{R}) .

$$J_1 = \Omega_p R^2 \pm R \sqrt{R^2 \Omega_p^2 - \dot{R}^2 + 2 \left(\frac{J_0^2}{2R_c^2} - \Omega_p J_0 - \Delta\Phi_0(R_c - R) - \Phi_1(R, 0) \right)}. \quad (4.20)$$

O primeiro valor que escolhemos para R e \dot{R} é $R = R_c$ e $\dot{R} = 0$, que são as condições iniciais de uma órbita circular no caso não perturbado. Dado o primeiro palpite seguimos para terceira parte do fluxograma.

Nessa etapa do programa, integramos a órbita com as condições iniciais descritas acima, por um período de tempo suficientemente longo, para que a estrela cruze a seção de Poincaré (fixa em $\varphi = 0$) n vezes, com $n \geq 5$. Desta forma, pode-se definir um mapeamento tal que:

$$M^n : (R_0, \dot{R}_0) \rightarrow (R_n, \dot{R}_n) \quad (4.21)$$

leva um ponto do plano (R_0, \dot{R}_0) a um outro ponto no mesmo plano, o subíndice zero refere-se ao palpite inicial. Uma vez que construímos uma curva na seção, passamos para quarta e quinta parte do fluxograma onde analisamos a seção de Poincaré e definimos a condição de periodicidade.

O ponto fixo do mapeamento M^n para o qual $(R_0, \dot{R}_0) = (R_n, \dot{R}_n)$, após n cruzamentos com a superfície, definirá uma órbita periódica. Dada uma certa tolerância $\varepsilon = 10^{-5}$, consideramos que uma órbita é periódica se após n cruzamentos com a seção de Poincaré ela satisfaça as condições:

$$\left| \frac{R_n - R_0}{R_0} \right| < \varepsilon, \quad (4.22)$$

$$\left| \frac{\dot{R}_n - \dot{R}_0}{\dot{R}_0} \right| < \varepsilon. \quad (4.23)$$

onde (R_0, \dot{R}_0) indicam as coordenadas iniciais no esquema de integração e (R_n, \dot{R}_n) os valores dessas coordenadas após n cruzamentos com a seção de Poincaré. Na Fig. 4.5, mostramos um exemplo de uma seção de Poincaré típica. Cada curva é gerada para uma dada condição inicial de R_0 e \dot{R}_0 com uma certa energia fixa E_0 . À direita dessa figura, mostramos um zoom da região onde encontramos os valores de R e \dot{R} para o qual a órbita se fecha, satisfazendo as condições 4.22 e 4.23. Em outras palavras, a órbita periódica é definida como um ponto no espaço de fases (R, \dot{R}) .

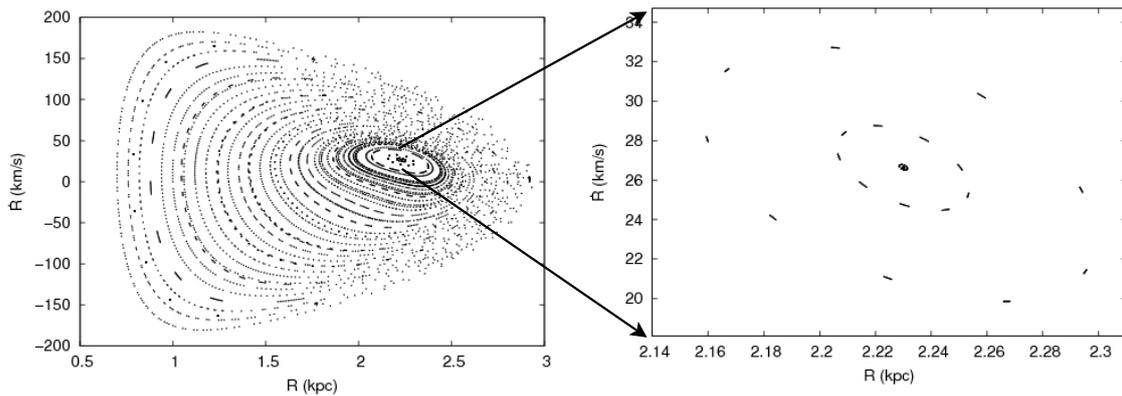


Figura 4.5: Seção de Poincaré no espaço de fase (R, \dot{R}) . Os parâmetros para perturbação são os mesmos da Tab. 3.1. A energia (E_0) equivale ao raio da órbita circular $R_c = 2.2$ kpc. A figura à direita mostra um zoom da região onde encontramos uma órbita periódica em $R \simeq 2.23$ kpc e $\dot{R} \simeq 26.65$ km/s.

A fim de poupar tempo computacional nós não varremos toda a seção de Poincaré, como no exemplo da Fig. 4.5 (à esquerda). Como já mencionamos acima, o primeiro palpite é a condição de órbita circular. Então o programa vai do passo um até o passo cinco, onde as condições de periodicidade são checadas; uma vez que não sejam satisfeitas, voltamos ao passo um. Os novos valores de R_0 e \dot{R}_0 são dados de duas maneiras diferentes, dependendo da seção de Poincaré, como iremos explicar:

1-) Escolhemos randomicamente um valor para R_0 e \dot{R}_0 . Então, o programa verifica se

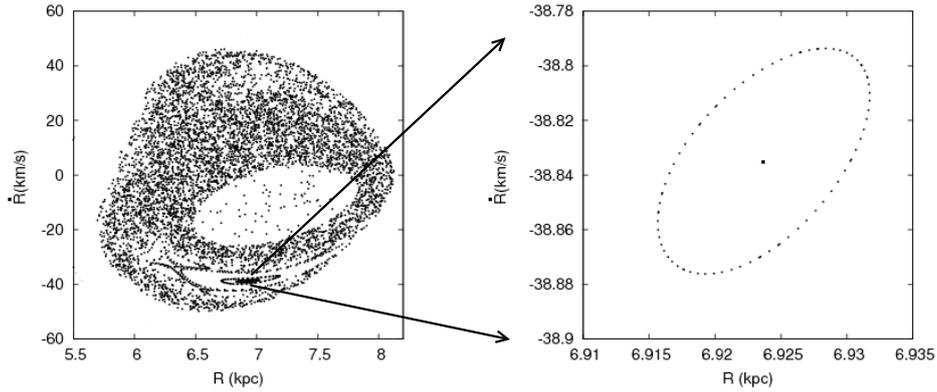


Figura 4.6: Seção de Poincaré no espaço de fase (R, \dot{R}) . Os parâmetros para perturbação são os mesmos da Tabela 3.1. A energia (E_0) equivale ao raio da órbita circular $R_c = 7.6$ kpc. A figura à direita mostra um zoom da região onde encontramos uma órbita periódica em $R \simeq 6.92$ kpc e $\dot{R} \simeq -38.83$ km/s.

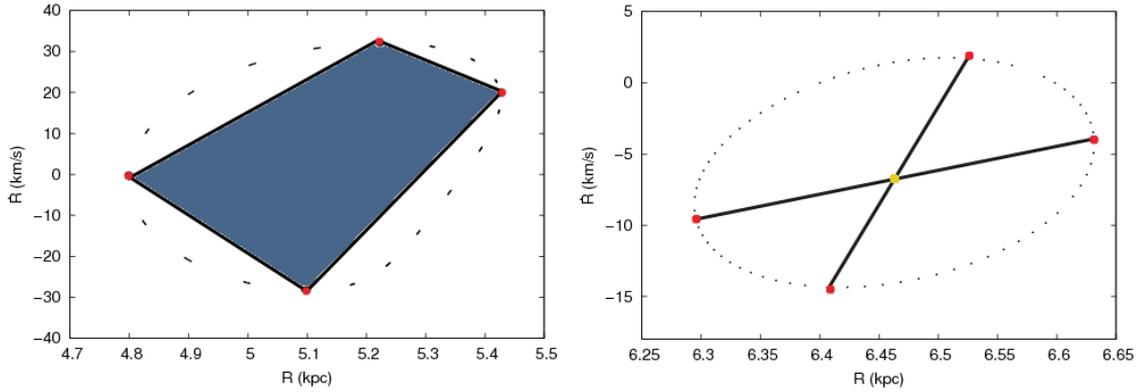


Figura 4.7: Nesta figura ilustramos os dois métodos da escolha de um novo valor para R e \dot{R} . Na figura à esquerda usamos um método randômico de escolha, onde o palpite tem que estar contido dentro da região em azul, delimitada pelo polígono. Na figura à direita, simplesmente escolhemos o valor central de R e \dot{R} , demarcado em amarelo. Os pontos em vermelho, nos dois casos, são os valores máximos e mínimos de R e \dot{R} da curva na seção de Poincaré.

esse palpite está contido dentro do polígono que é limitado pelos pontos R_{max} , R_{min} , \dot{R}_{max} e \dot{R}_{min} . Como ilustrado na Fig. 4.7 (à esquerda). Isso garante que os novos palpites não saiam muito da região permitida e acelera a convergência. A vantagem de escolhermos inicialmente valores randômicos, é que garantimos uma boa varredura na seção de Poincaré. Devemos chamar a atenção para o fato de que nem todos os mapas são regulares, como nos casos mostrados nas Figs. 4.5 e 4.7. Perto de ressonâncias, como a corrotação, os mapas apresentam movimentos semi-ergódicos, o que os tornam caóticos como ilustramos na Fig. 4.6. Dessa forma, palpites randômicos garantem uma boa cobertura dos mapas e facilitam

a procura de ilhas de estabilidade.

2-) Quando estamos próximos de convergir para um ponto no mapa, as curvas tornam-se mais regulares com formatos elípticos, como podemos perceber nas Figs. 4.5 e 4.7 (à direita). Para o nosso caso, isso ocorre quando $|\dot{R}_{max} - \dot{R}_{min}| \simeq 15$ km/s. Quando isso ocorre, deixamos de adotar valores randômicos e passamos a considerar que os próximos palpites serão os valores médios: $R_0 = (R_{max} + R_{min})/2$ e $\dot{R}_0 = (\dot{R}_{max} + \dot{R}_{min})/2$. Isso acelera a convergência.

Esse processo é repetido até as condições de convergências serem atendidas (Eqs. 4.22 e 4.23). Quando isso acontece guardamos os valores de R_0 e \dot{R}_0 , para os quais a órbita se fecha. Todo este processo é repetido para novos valores de $E_0(R_c)$, varrendo uma grande faixa de raio R_c . Dessa forma, encontramos um conjunto de órbitas periódicas para uma dada perturbação e potencial Galáctico. Todo o processo descrito acima é automático e não há necessidade de interação humana, salvo algumas exceções onde o mapa é muito caótico.

4.3 Densidade de resposta e a auto-consistência

O princípio fundamental para se construir um modelo dinâmico auto-consistente para uma galáxia está na igualdade da densidade de resposta, obtida através das órbitas perturbadas, com a densidade imposta obtida teoricamente por meio da equação de Poisson.

Para ilustrar o que queremos dizer, apresenta-se na Fig. 4.8 a deformação que um anel (entende-se por anel; a região entre duas órbitas consecutivas) sofre devido à perturbação espiral.

A densidade de resposta é calculada considerando a conservação do fluxo de massa entre o caso perturbado e não perturbado, como ilustramos na Fig. 4.8, e foi inicialmente descrito por Contopoulos (1979). A fim de calcular a densidade de resposta, consideramos um série de órbitas circulares espaçadas de 0.2 kpc. Podemos imaginar que cada órbita circular contenha um certo número pontos igualmente espaçados. A área S de um setor angular, a qual é delimitada por duas órbitas vizinhas e dois pontos adjacentes em cada uma dessas órbitas, é transformada em S' quando a perturbação é introduzida, exatamente como ilustramos na Fig. 4.8. A massa total contida no anel não perturbado é expressada

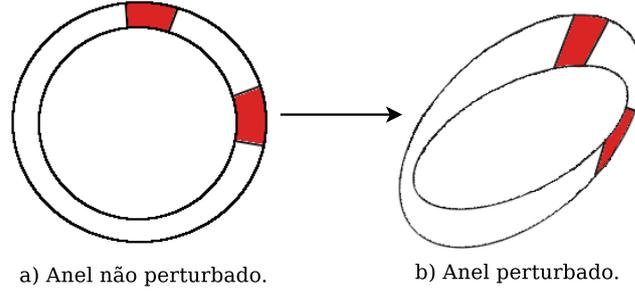


Figura 4.8: Esta figura ilustra a deformação de um anel circular, devido a uma perturbação espiral. A Fig. a) mostra as órbitas não perturbadas, a região em vermelho ilustra a quantidade de massa contida num setor. Na Fig. b) as órbitas estão deformadas devido à perturbação, mas as regiões em vermelho tem que conter a mesma quantidade de massa.

por:

$$M_c = \Sigma_c 2\pi R_c \Delta R_c. \quad (4.24)$$

O tempo gasto por uma estrela para percorrer de φ a $\varphi + \Delta\varphi$ é Δt , que é uma fração $\Delta t/T$ do período T . Assim, a massa contida no setor em vermelho do anel não perturbado é

$$M_c = \Sigma_c 2\pi R_c \Delta R_c \frac{\Delta t}{T}. \quad (4.25)$$

A mesma quantidade de massa tem que estar contida na região em vermelho do anel deformado

$$M_p = \Sigma_{resp} \Delta\varphi R \Delta R. \quad (4.26)$$

Igualando as Eqs. 4.25 e 4.26, tem-se:

$$\Sigma_{resp} = \frac{\Sigma_c 2\pi R_c \Delta R_c \Delta t}{TR \Delta R \Delta\varphi}, \quad (4.27)$$

onde Σ_c é a densidade, R_c é o raio, e ΔR_c é o espaçamento entre duas órbitas adjacentes, todos para o caso não perturbado. Os mesmos parâmetros no denominador referem-se ao caso perturbado.

Na prática, o que fizemos foi dividir os anéis em N setores. Desta forma, é possível encontrar a posição R em cada ângulo, definido por $i\Delta\varphi$ ($i = 1..N$). Portanto, também sabemos o tempo Δt gasto pela estrela para se deslocar entre dois setores adjacentes.

Uma forma mais simples e prática de analisar a densidade de resposta é encontrar a posição onde ela corresponde a um máximo; desta forma, a Eq. 4.27 se reduz a

$$\Sigma_{resp} \propto \frac{\Delta t}{R \Delta R \Delta \varphi}. \quad (4.28)$$

Como os valores de Σ_c , R_c , ΔR_c , e T não mudam para um dado anel, eles podem ser ignorados na Eq. 4.27. Assim, a posição onde a densidade atinge um máximo corresponde ao setor onde a Eq. 4.28 tem seu valor máximo. Esta informação, sobre a densidade de resposta, é mais útil do que a razão entre a densidade imposta e a resposta. Comparando a posição do máximo da densidade imposta e da resposta, podemos ver onde há desvios da espiral logarítmica, como já foi analisado por [Contopoulos & Grosbøl \(1986\)](#) e [Antoja et al. \(2011\)](#).

A densidade imposta $\Sigma_{imp} = \Sigma_s$, vinda do potencial perturbador (Eq. 3.5) é obtida a partir da resolução da equação de Poisson no plano da Galáxia. Entretanto, estamos interessados em comparar onde os máximos, tanto da densidade imposta quanto a de resposta, estão localizados; o que torna a tarefa muito mais simples.

Analisando a Eq. 3.25, que vem do potencial imposto pela Eq. 3.5, podemos notar que os máximos ocorrem quando

$$1 - \cos[m\varphi - f_m(R)] = 0; \quad (4.29)$$

sendo $f_m(R)$ dado pela Eq. 3.6. Desta forma, a condição acima é satisfeita quando

$$\varphi - \frac{1}{\tan(i)} \ln(R/R_i) = \frac{2n\pi}{m}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (4.30)$$

que nada mais é do que a equação da espiral logarítmica adotada. A fim de tornar a explicação mais clara, ignoramos o ângulo de fase γ que aparece na Eq. 3.6. Como temos uma simetria de dois braços, $m = 2$, o máximo se repete a cada π rotações angulares, como podemos perceber facilmente na equação acima. Desta forma, podemos integrar e encontrar as órbitas periódicas e comparar as posições onde as densidades, imposta e de resposta, atingem os máximos em cada anel perturbado. Se a posição da resposta é a mesma da imposta dizemos, então, que os braços podem se auto sustentar; caso contrário, isso não é possível. Os resultados para uma gama de parâmetros serão discutidos no Cap. 5.

4.4 Integração das partículas testes - Atualização do Potencial

Na Sec. 4.2, descrevemos como encontrar as órbitas periódicas. Nesta seção passamos a estudar um problema bastante distinto do anterior, deixando de nos preocupar com orbitas periódicas. Analisaremos o deslocamento de partículas testes e o efeito destes deslocamentos sobre o próprio potencial que controla os movimentos.

Muitos estudos, tanto analíticos quanto numéricos, foram realizados com vistas a analisar qual seria o efeito da ressonância de corrotação nas órbitas estelares, por exemplo, Barbanis (1970), Contopoulos (1973), Barbanis (1976), Mennessier & Martinet (1978), Mennessier & Martinet (1979), Palous (1980), Bertin & Haass (1982) e Lépine et al. (2003). Recentemente, alguns experimentos numéricos vêm estudando o efeito das ressonâncias no aquecimento e na migração radial das órbitas estelares, no disco de galáxias, como por exemplo, Hänninen & Flynn (2004), Minchev & Quillen (2006), Minchev et al. (2011) e Solway et al. (2012). No entanto, o nosso objetivo é analisar como estas partículas se comportam sob a influência do potencial espiral e como isto modifica a curva de rotação inicial, tanto na corrotação como em outras ressonâncias. As equações de movimento e o procedimento usado na integração das órbitas, no plano da Galáxia, são os mesmos que foram descritos na Sec. 4.1.

4.4.1 Curva de rotação plana - Modelo de Massa

Como queremos analisar o efeito da estrutura espiral na curva de rotação, não faremos uso da curva de rotação observada, como proposto anteriormente, pois essa já carrega informações sobre a perturbação. Portanto, geramos uma curva de rotação plana, baseando-se na distribuição de massa da Galáxia.

Componentes esferoidais:

As componentes esferoidais foram introduzidas para descrever o potencial na parte interna e externa da Galáxia, correspondendo ao bojo e halo respectivamente. Para o bojo, existem três perfis que representam bem a sua distribuição de luminosidade: perfil de de Vaucouleurs, perfil de Hubble e perfil de King.

Dentre os três perfis citados acima, o de Vaucouleurs é o que melhor representa o perfil de brilho dos bojões de galáxias ou galáxias elípticas, que podem ser vistas como

galáxias que possuem só a componente bojo. Sua lei de brilho é proporcional a $R^{1/4}$; se supuséssemos uma razão massa-luminosidade constante para as estrelas e uma distribuição esférica, obteríamos uma lei de densidade do tipo: $\rho(R) \propto e^{-b(R/R_e)^{1/4}}(R/R_e)^{-7/8}$, com b e R_e constantes (Young, 1976). No entanto, este perfil não é conveniente para uma análise teórica, visto a dificuldade em se obter o potencial analiticamente. No entanto, existe uma alternativa mais simples e que reproduz o perfil de de Vaucouleurs para uma boa faixa de raio. Esse perfil foi proposto por Hernquist (1990) e corresponde à seguinte lei de densidade:

$$\rho_b(R) = \frac{M_b a}{2\pi R(R+a)^3}, \quad (4.31)$$

onde M_b é a massa total do bojo e a é a escala de comprimento. Através da integração da equação de Poisson, o potencial pode ser obtido de $\rho(R)$:

$$\Phi_b(R) = -\frac{GM_b}{(R+a)}. \quad (4.32)$$

Pela Eq. 4.16, podemos integrar a equação acima e encontrar a velocidade de rotação devido a componente do bojo:

$$V_b(R) = \frac{\sqrt{GM_b R}}{(R+a)}. \quad (4.33)$$

Para o halo, adotamos um perfil semi-isotérmico (Eq. 4.34), que nos fornece uma forma simples de calcular a velocidade de rotação (Eq. 4.35):

$$\rho_h(R) = \rho_{hc} \left[1 + \left(\frac{R}{R_h} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4.34)$$

$$V_h(R) = V_\infty \left[1 - \frac{R_h}{R} \tan^{-1} \left(\frac{R}{R_h} \right) \right], \quad (4.35)$$

onde R_h é a escala de comprimento, e $V_\infty = \sqrt{4\pi G \rho_{hc} R_h^2}$ é a velocidade final no infinito. Esta componente só se torna importante nas partes mais externas da galáxia, ajudando a manter a curva plana para grandes distâncias do centro galáctico.

Disco infinitesimal:

O modelo referente à componente disco foi elaborado baseando-se em um disco fino infinitesimal, que é uma expressão alternativa para o potencial gravitacional $\Phi_0(R, z)$, proposto por [Toomre \(1963\)](#). A dedução da Eq. [4.36](#) pode ser vista no Apêndice [B](#).

$$V_d^2(R) = 2GM_d y^2 [I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)], \quad (4.36)$$

onde I_n e K_n são funções modificadas de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, $y = R/(2R_d)$, e M_d é a massa total do disco dada por

$$M_d = 2\pi\Sigma_0 R_d^2. \quad (4.37)$$

A expressão [4.36](#) é justamente a velocidade circular quadrática de uma distribuição de massa dada por um disco exponencial.

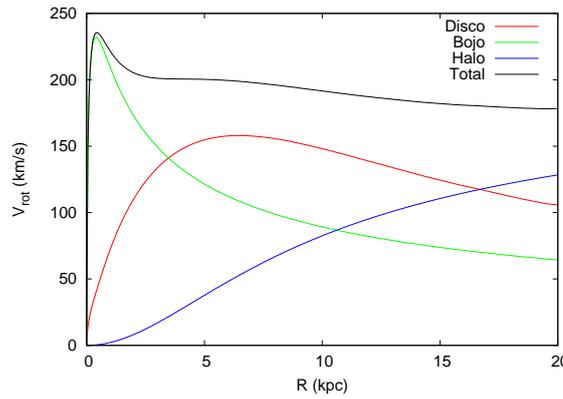


Figura 4.9: Curva de rotação gerada a partir do modelo de massa, para as três componentes; disco (vermelho), bojo (verde) e halo (azul). A curva de rotação total está representada em preto.

Na [Fig. 4.9](#), mostramos as velocidades de cada componente e a velocidade total devido à soma quadrática delas ([Eq. 4.38](#)).

$$V_{rot}^2 = V_d^2 + V_h^2 + V_b^2 \quad (4.38)$$

As constantes usadas em cada equação estão listadas na [Tab.4.2](#). O valor da massa do disco é baseado nos valores de Σ_0 e $R_d = \varepsilon_d^{-1}$ fornecidos no [Cap. 3](#), as constantes associadas às componentes esferoidais foram retiradas de [Sofue et al. \(2009\)](#). Como já mencionamos, estamos interessados em observar qual é a influência das ressonâncias sobre a curva de rotação, portanto os valores adotados na [Tab. 4.2](#) não reproduzem a Galáxia

Tabela 4.2 - Constantes do modelo de massa.

<i>Bojo</i>		<i>Disco</i>		<i>Halo</i>	
Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
M_b	$2 \cdot 10^{10} M_\odot$	M_d	$4 \cdot 10^{10} M_\odot$	V_∞	210 km s^{-1}
a	0.4 kpc	R_d	2.5 kpc	R_h	5.5 kpc

com exatidão, mas são somente uma referência para se gerar uma curva de rotação plana que obedeça a uma distribuição de densidade exponencial no disco.

4.4.2 Condições iniciais

A posição inicial das partículas teste, simuladas no disco da Galáxia, foram escolhidas de forma randômica e uniforme na direção azimutal e por uma lei de densidade exponencial na direção radial:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d}, \quad (4.39)$$

portanto a distribuição de partículas que obedece a essa lei de densidade é:

$$N = 2\pi\Sigma_0 \int_R^{R+\Delta R} e^{-R/R_d} R dR = N_* \left[-R_d e^{-R/R_d} (R_d + R) \right] \Big|_R^{R+\Delta R}, \quad (4.40)$$

onde N é o número de estrelas entre R e $R + \Delta R$, $R_d = 2.5 \text{ kpc}$ é a escala do disco (Freudenreich, 1998) e N_* é uma constante, que está relacionada ao número total de partículas N_t da seguinte forma:

$$N_* = \frac{N_t}{R_d^2}. \quad (4.41)$$

Assim, a posição radial inicial R_i para $N_t = 10^5$ partículas foi gerada de forma randômica em anéis espaçados por $\Delta R = 0.2 \text{ kpc}$, obedecendo à função de distribuição 4.40.

O momento angular inicial atribuído a cada partícula $J_0 = R_i V_c(R_i)$ obedece a curva de rotação que descrevemos em 4.4.1. A cada componente de velocidade, foi adicionada uma perturbação inicial. A componente radial de velocidade é simplesmente igual à própria perturbação de velocidade nessa direção, $\dot{R}_i = \sigma_U$. A dispersão de velocidade nessa direção foi gerada por uma função gaussiana com: $\sigma_{U_0} = 5 \text{ km s}^{-1}$. Estes valores são compatíveis com as amplitudes de perturbação de velocidades, causadas pelos braços espirais,

encontradas na literatura (por exemplo, [Burton, 1971](#); [Mishurov et al., 1997](#); [Bobylev & Bajkova, 2010](#)). Eles também são compatíveis com a dispersão de velocidades de estrelas jovens observadas pelo Hipparcos ([Aumer & Binney, 2009](#)). Portanto, nossa simulação leva em conta somente o disco fino (população mais fria). O disco espesso, que possui uma população mais quente, é pouco sensível ao potencial perturbador. Após inserir a perturbação na direção radial, a componente azimutal é calculada $v_\varphi = J_1/R_i$, com J_1 dado pela Eq. [4.20](#).

A integração foi então efetuada, de $t = 0$ a $t = 1$ Giga anos, e o potencial axissimétrico foi atualizado a cada 100 milhões de anos. A seguir, iremos descrever como fizemos a atualização do potencial. Os resultados são mostrados na Sec. [5.4](#)

4.4.3 Flutuação axissimétrica

Nessa seção, iremos deduzir como as flutuações de partículas, considerando uma simetria azimutal, altera a curva de rotação, portanto o potencial.

A Eq. [4.42](#) é a forma simplificada da equação de Boltzmann para um sistema não colisional em coordenadas cilíndricas (Eq. 4.12 de [Binney & Tremaine, 2008](#)), onde se toma que o potencial é axissimétrico e estacionário, ou seja, não depende do tempo e suas derivadas azimutais são nulas. Nesta equação $f = f(R, z, \mathbf{v})$ é a função de distribuição, $\Phi = \Phi(R, z)$ é o potencial axissimétrico e $J = Rv_\varphi$ é o momento angular por unidade de massa.

$$v_R \frac{\partial f}{\partial R} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{J^2}{R^3} \right) \frac{\partial f}{\partial v_R} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0; \quad (4.42)$$

multiplicando a equação acima por v_R temos:

$$v_R^2 \frac{\partial f}{\partial R} + v_R v_z \frac{\partial f}{\partial z} - v_R \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{J^2}{R^3} \right) \frac{\partial f}{\partial v_R} - v_R \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \quad (4.43)$$

Em um certo ponto $\mathbf{x} = (R, z)$, a probabilidade de encontrar uma estrela por unidade de volume independente do valor de sua velocidade é

$$\nu(R, z) = \int f(R, z, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}, \quad (4.44)$$

em coordenadas cilíndricas $d^3 \mathbf{v} = dv_R dv_\varphi dv_z$. Com as dispersões de velocidades dadas por

$$\overline{v_R^2} = \sigma_R^2 = \frac{1}{\nu} \int v_R^2 dv_R \int dv_z \int f dv_\varphi, \quad (4.45a)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_R^2, \quad (4.45b)$$

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{\nu} \int (v_\varphi - \bar{v}_\varphi)^2 dv_\varphi \int dv_R \int f dv_z. \quad (4.45c)$$

Integrando no espaço de velocidades a Eq. 4.43, usando as definições dadas por 4.44 e 4.45 e o teorema da divergência para eliminar as derivadas em velocidade, chegamos à seguinte equação:

$$\frac{\partial(\nu\sigma_R^2)}{\partial R} + \frac{\partial(\nu\overline{v_z v_R})}{\partial z} + \nu \left(\frac{\sigma_R^2 - \overline{v_\varphi^2}}{R} + \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) = 0. \quad (4.46)$$

Multiplicando a equação acima por R e dividindo por ν , podemos reescrevê-la como

$$\frac{R}{\nu} \frac{\partial(\nu\sigma_R^2)}{\partial R} + \frac{R}{\nu} \frac{\partial(\nu\overline{v_z v_R})}{\partial z} + \sigma_R^2 - \overline{v_\varphi^2} + R \frac{\partial\Phi}{\partial R} = 0. \quad (4.47)$$

Para $z = 0$, a densidade $\nu(R, 0) = \Sigma(R)$ e os termos dependentes de z desaparecem. Utilizando também a definição dada em 4.16, a expressão acima pode ser reduzida a:

$$\frac{R}{\Sigma} \frac{\partial(\Sigma\sigma_R^2)}{\partial R} + \sigma_R^2 - \overline{v_\varphi^2} + v_{rot}^2 = 0, \quad (4.48)$$

usando a definição de variância $\sigma_\varphi^2 = \overline{v_\varphi^2} - \bar{v}_\varphi^2$ e depois de fazer algumas manipulações algébricas, finalmente chegamos à expressão final:

$$v_{rot}^2(R) = \bar{v}_\varphi^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_R^2 \left(1 + \frac{\partial \ln(\Sigma)}{\partial \ln(R)} \right) - R \frac{\partial \sigma_R^2}{\partial R}. \quad (4.49)$$

Essa equação nos fornece o desvio que a velocidade de rotação sofre devido às dispersões de velocidades em ambas as componentes e ao gradiente de densidade superficial. O fato dessa equação depender do logaritmo da derivada facilita muito o cálculo, pois não precisamos nos preocupar com o valor da densidade, mas somente com o seu perfil radial.

Portanto, o potencial axissimétrico pode ser atualizado, fazendo uso da Eq. 4.49, uma vez que a sua derivada está relacionada com a velocidade circular quadrática. Entretanto, as equações de movimento usam exatamente a derivada do potencial e não o próprio. Desta forma, a Eq. 4.49 já nos fornece uma atualização direta que será usada nas equações de movimento.

Os resultados obtidos a partir do uso da Eq. 4.49 estão discutidos na Sec. 5.4.

Resultados e discussão

Neste trabalho, os parâmetros adotados foram, em sua maioria, baseados em nossa Galáxia. Entretanto, nas próximas seções iremos apresentar alguns resultados que não são inteiramente baseados nos parâmetros da Galáxia, os quais são válidos a princípio para outras galáxias. De maneira geral, iremos primeiramente apresentar os resultados obtidos para as órbitas periódicas e depois para as não-periódicas. Discutiremos o comportamento das órbitas perto da corrotação e apresentaremos uma relação entre o bojo e a formação de uma barra através da perturbação espiral. Os programas e métodos utilizados para obtenção dos resultados, aqui apresentados, estão discutidos no Cap. 4.

5.1 Resultados - órbitas periódicas

Nessa seção iremos mostrar alguns resultados que foram obtidos com a variação dos parâmetros σ , i e ζ_0 . As órbitas periódicas foram encontradas pelo método descrito em 4.2 e as posições, onde a densidade de resposta e imposta atingem um máximo, foram calculadas como descrito em 4.3.

Como discutimos no Cap. 3, o contraste de densidade tem um valor aproximado de 0.2. A Eq. 3.31 fornece a relação entre o contraste de densidade e os parâmetros σ , i e ζ_0 , que foram variados visando manter o contraste de densidade constante. Os outros dois parâmetros que aparecem nessa equação, m e ε_s não foram variados bem como Ω_p ; no entanto iremos descrever, brevemente, suas influências sobre as estruturas espirais.

5.1.1 Parâmetros fixos

O número de braços, m , está relacionado com o valor do *pitch angle*. Assim, pelas razões dadas na Sec. 2.2 mantivemos m fixo e variamos somente i .

Um aumento no valor de ε_s significa que a amplitude da espiral decresce mais rapidamente para regiões externas, indicando que os efeitos nas órbitas serão maiores na parte interna da Galáxia e menos pronunciados na parte externa. Dessa forma, consideramos que $\varepsilon_s = \varepsilon_d$, o que nos parece mais razoável ou, pelo menos, ε_s teria que assumir valores maiores que ε_d , ou seja, a escala de comprimento da espiral teria que ser menor que a do disco, o que é um argumento razoável pois não podemos ter braços sem disco.

Aumentando o valor da velocidade de rotação do padrão espiral, Ω_p , as distâncias galactocêntricas referentes às ressonâncias iriam diminuir, fazendo com que o padrão espiral global se torne menor, ao passo que se diminuirmos o valor de Ω_p todas as ressonâncias iriam para raios galactocêntricos maiores. Portanto, as posições das ressonâncias estão associadas diretamente com o valor de Ω_p , como discutido por [Lépine et al. \(2011a\)](#). O valor que encontramos no Cap. 2, para a velocidade do padrão espiral, é compatível com a posição encontrada por [Lépine et al. \(2011a\)](#) para ressonância 4:1.

5.1.2 Variação dos parâmetros

As figuras a seguir mostram os resultados da auto-consistência obtidos para uma gama de parâmetros. Em todos os casos, a curva de rotação adotada corresponde à Eq. 2.24 com as constantes dadas pelo Modelo 2 da Tabela 2.3. Como explicado no início dessa seção, os parâmetros, i , σ e ζ_0 , foram variados de forma a que o contraste de densidade, obtido no Cap. 3, permaneça fixo. As outras constantes do modelo foram fixadas com os valores fornecidos na Tabela 3.1. Nessas figuras, mostramos as órbitas periódicas (à esquerda) juntamente com as posições onde a resposta de densidade e a imposta são máximas (ver Cap. 4). À direita de cada gráfico, temos o desvio relativo entre a densidade de resposta e a densidade imposta em função do raio galactocêntrico.

Em uma primeira análise, podemos perceber que em todos os casos a resposta de densidade começa a ficar fora de fase com a imposta próximo ao raio da ressonância 4:1 ($R_{4:1} \approx 6$), atingindo um máximo de desvio exatamente nessa. Outro ponto interessante ao qual podemos chamar atenção é que mesmo para os parâmetros que mantêm o mesmo

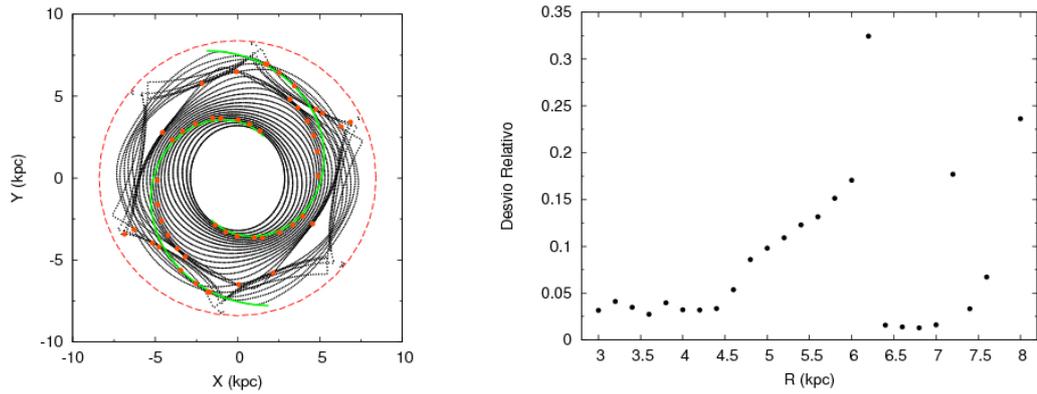


Figura 5.1: À esquerda, temos uma série de órbitas periódicas no plano da Galáxia (representadas pelas linhas em preto). As espirais, indicadas em verde, representam a perturbação imposta e os pontos vermelhos são as posições dos máximos da densidade de resposta. O círculo vermelho é o raio de corotação ($R_{cor} = 8.4$ kpc). À direita, temos o desvio relativo entre a densidade de resposta e a densidade imposta em função do raio galactocêntrico. Os parâmetros usados são; $i = 14^\circ$, $\sigma = 4.7$ kpc, $\zeta_0 = 600$ km² s⁻² kpc⁻¹.

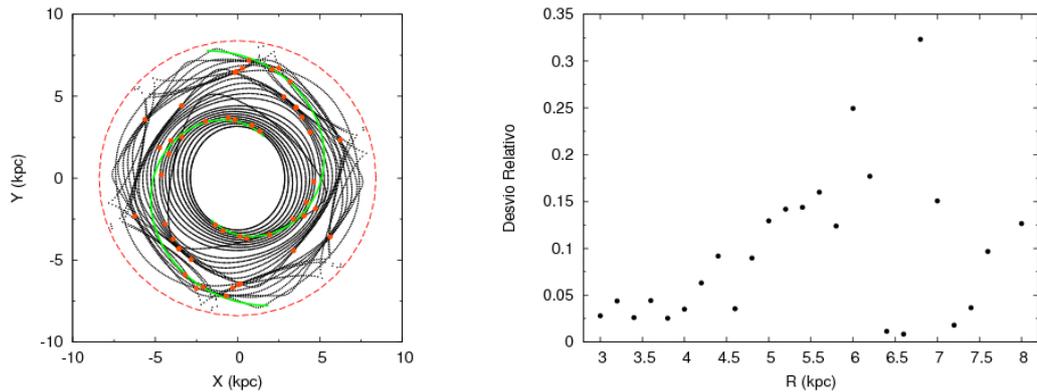


Figura 5.2: O mesmo que na Fig. 5.1. Os parâmetros usados aqui são; $i = 14^\circ$, $\sigma = 3.8$ kpc, $\zeta_0 = 400$ km² s⁻² kpc⁻¹.

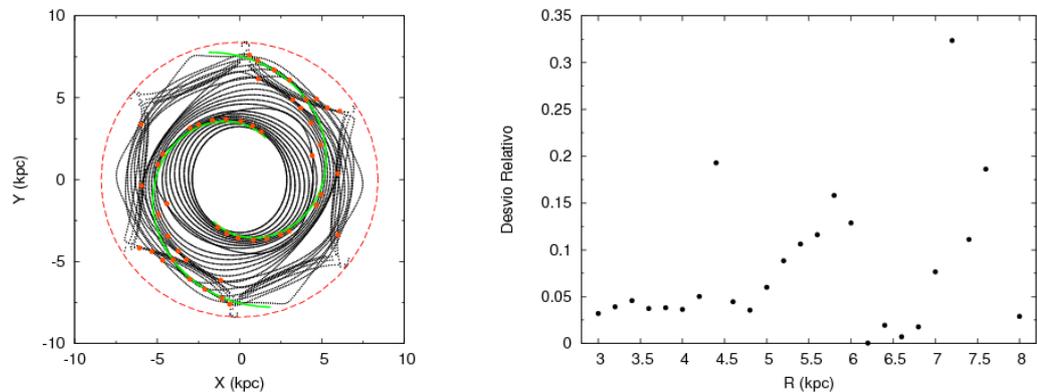


Figura 5.3: O mesmo que na Fig. 5.1. Os parâmetros usados aqui são; $i = 14^\circ$, $\sigma = 5.4$ kpc, $\zeta_0 = 800$ km² s⁻² kpc⁻¹.

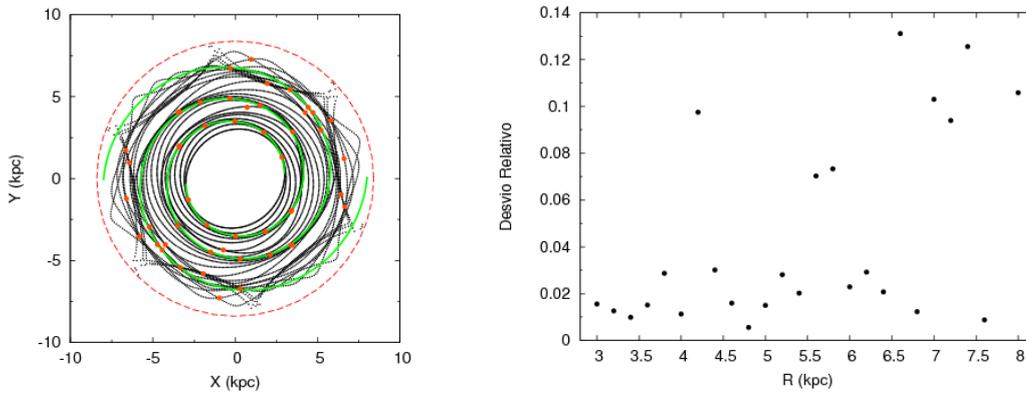


Figura 5.4: O mesmo que na Fig. 5.1. Os parâmetros usados aqui são; $i = 6^\circ$, $\sigma = 4.7$ kpc, $\zeta_0 = 252.93$ $\text{km}^2 \text{s}^{-2} \text{kpc}^{-1}$.

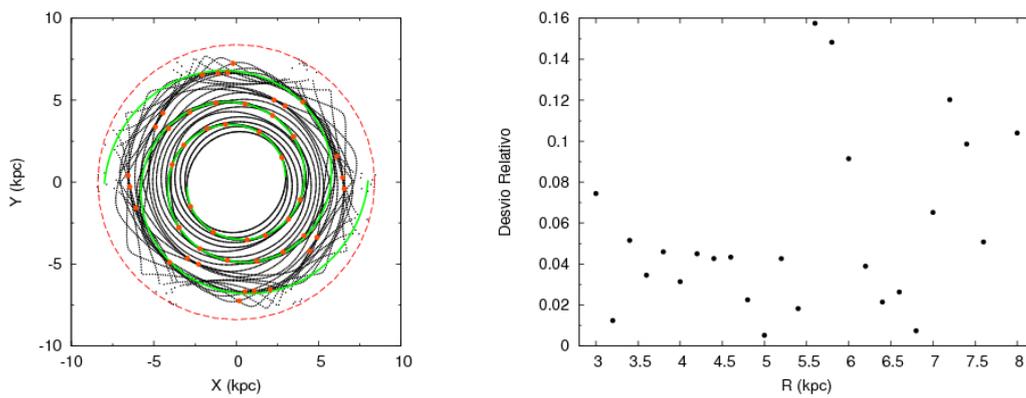


Figura 5.5: O mesmo que na Fig. 5.1. Os parâmetros usados aqui são; $i = 6^\circ$, $\sigma = 7.2$ kpc, $\zeta_0 = 600$ $\text{km}^2 \text{s}^{-2} \text{kpc}^{-1}$.

contraste de densidade as estruturas que aparecem não são iguais. Isso mostra que não há uma degenerescência na combinação dessas constantes. Isso ocorre porque as forças radiais e tangenciais devido à perturbação não têm a mesma dependência com σ , i e ζ_0 que o contraste de densidade.

Analisando os resultados das Figs. 5.1, 5.2 e 5.3, onde todas essas possuem um mesmo valor de *pitch angle*, podemos perceber que, em dois casos, a ressonância 3:1 (Figs. 5.2 e 5.3) aparece, fazendo com que a resposta fique fora de fase nesse raio. Já nas Figs. 5.4 e 5.5, onde adotamos um *pitch angle* menor, a auto-consistência é globalmente melhor, porém há uma considerável perda de “força” da ressonância 4:1, o que vai contra as evidências observacionais encontradas por Lépine et al. (2011a). Outro ponto a destacar é que, apesar de globalmente a auto-consistência para um *pitch angle* menor ser melhor, o resultado na Fig. 5.1 produz uma melhor auto-consistência nas partes internas à ressonância 4:1. A razão da auto-consistência ser globalmente melhor, para valores menores de i , pode vir do fato de a aproximação *tightly wound spiral* adotar $|\tan i| \ll 1$ (ver Cap. 3 para maiores detalhes). Pérez-Villegas et al. (2013) discutem a influência do *pitch angle* na auto-consistência das estruturas espirais. Eles encontraram um limite de $i = 20^\circ$, para o qual a estrutura espiral de galáxias do tipo Sc pode ser mantida por órbitas periódicas. Além desse valor, a densidade de resposta não coincide com o potencial imposto; isso, segundo os autores, poderia dar origem a estruturas espirais transientes.

Outro resultado global que podemos destacar é o surgimento de várias órbitas periódicas entre a ressonância 4:1 e a corrotação, sobrepostas umas às outras. Elas aparecem em todos os casos e gostaríamos de chamar a atenção para uma em especial que aparece frequentemente: a ressonância 6:1. Na próxima seção, iremos discutir melhor essa região.

Como já argumentamos no Cap. 2, acreditamos que $m = 2$ com $i = 14^\circ$ seja a melhor configuração para representar a Galáxia, pois próximo à ressonância 4:1 segmentos menores de braços começam a surgir, o que é esperado como um fenômeno natural dessa ressonância, justificando assim algumas estruturas observadas na Galáxia. Portanto, o modelo que encontramos que melhor representa a Galáxia é mostrado na Fig. 5.6. A posição do Sol na Galáxia está representada pelo ponto amarelo e para melhor visualização retiramos algumas órbitas periódicas da vizinhança solar.

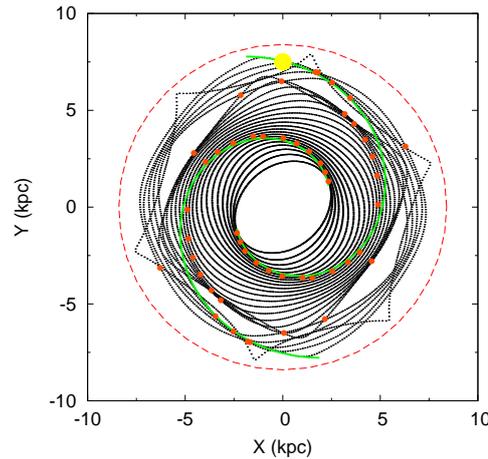


Figura 5.6: Melhor modelo para Galáxia. As espirais, indicadas em verde, representam a perturbação imposta; elas coincidem com a densidade de resposta (pontos vermelhos) até a ressonância 4:1. O círculo vermelho é o raio de corrotação ($R_{cor} = 8.4$ kpc). A posição do Sol está marcada pelo ponto amarelo. Os parâmetros usados para perturbação nesse modelo são os mesmos listados na Tabela 3.1.

5.2 A estrutura espiral entre as ressonâncias 4:1 e corrotação

Muitos estudos sobre a auto-consistência têm sido realizados nas últimas décadas (Contopoulos & Grosbøl, 1988; Patsis et al., 1991; Amaral & Lepine, 1997; Pichardo et al., 2003; Martos et al., 2004; Antoja et al., 2011). Contopoulos & Grosbøl (1986) já tinham estudado a densidade de resposta e concluído que estruturas espirais bem definidas não existem além da ressonância interna 4:1. Este resultado foi posteriormente confirmado por outros trabalhos e também por nós, como iremos mostrar.

Nas Figs. 5.1 – 5.5, mostramos o local onde a densidade de resposta é máxima, como descrito no Cap. 4, Sec. 4.3, para o nosso modelo. Podemos ver que para todos os casos existe uma boa auto-consistência, na forma de espiral, na região interna a ressonância 4:1, a qual é delimitada pelas órbitas com um formato quadrado. Esta auto-consistência é particularmente satisfatória para o nosso modelo, uma vez que o potencial perturbador com perfil gaussiano gera uma densidade de resposta e um potencial de resposta muito similar ao imposto. O fato de dois braços espirais logarítmicos, bem definidos, estenderem-se até a ressonância 4:1 é um resultado robusto, que foi encontrado pelos diversos trabalhos mencionados acima, apesar de usarem outros potenciais axissimétricos e perturbações, mostrando que a ressonância 4:1 desempenha um papel fundamental na estrutura das galáxias. Isto está de acordo com as características observadas de braços espirais, uma vez que Elme-

green & Elmegreen (1995) observaram que a maioria das galáxias espirais possuem dois braços proeminentes e simétricos nas regiões mais internas, dentro de aproximadamente $0.5 R_{25}$, onde R_{25} é definido como sendo o raio para o qual o brilho superficial é de 25 mag arcsec⁻². Estes autores sugerem que o término dos braços poderia coincidir com a corrotação. Esta estrutura robusta, com um aspecto semelhante em muitas galáxias espirais, é possivelmente a única capaz de determinar a velocidade do padrão espiral. Scarano & Lépine (2013) mostraram que as velocidades do padrão espiral têm uma distribuição concentrada em torno de $24 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, em outras palavras, elas não seriam arbitrárias.

Gostaríamos de chamar a atenção para um efeito interessante. Podemos perceber que a densidade máxima de resposta começa a ficar fora de fase em relação à perturbação espiral logarítmica perto da ressonância 4:1, como já mencionamos acima. Isso sugere que o desvio de uma espiral logarítmica perfeita, em galáxias, pode ser entendido naturalmente como um efeito da ressonância 4:1. A consequência disto é o aparecimento de bifurcações. Quando a densidade de resposta começa a ficar fora de fase com a densidade imposta, parte da matéria permanece seguindo o potencial imposto (como mostraremos na Sec. 5.4), resultando em um segmento de braço. Em galáxias com uma estrutura semelhante ao da Via Láctea, o aparecimento de bifurcações é possivelmente associado à ressonância 4:1, em vez de à corrotação. Este não é um resultado novo, do ponto de vista teórico, uma vez que Patsis et al. (1994) e Patsis et al. (1997) já tinham discutido tal fenômeno. O trabalho observacional de Elmegreen & Elmegreen (1995), também indica que bifurcações têm início no final dos braços simétricos proeminentes e o fato de não dependerem dos detalhes de uma determinada curva de rotação sugere que este é um resultado robusto.

5.2.1 Além da ressonância 4:1

Em nosso modelo, existe uma clara mudança na natureza dos braços além da ressonância 4:1. Não há mais braços produzidos pela concentração de órbitas estelares, mas apenas órbitas ressonantes sobrepostas. Como poderia uma órbita ressonante comportar-se como um braço espiral? Isso pode acontecer se as estrelas forem capturadas pelas ressonâncias, semelhante a asteroides do sistema solar, para o qual o mecanismo de aprisionamento foi descrito por Goldreich (1965). Por exemplo, no cinturão de asteroides, as ressonâncias 3:2, 4:3 e 1:1 com Júpiter são povoadas por grupos de asteroides. Da mesma forma, as estrelas capturadas pelas ressonâncias poderiam produzir um aumento local da densidade

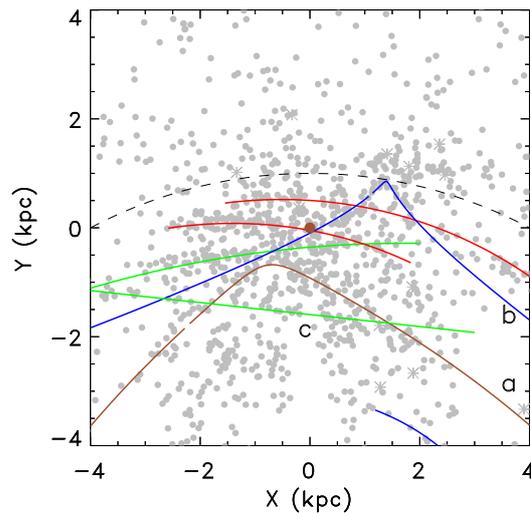


Figura 5.7: Estrutura dos braços observados na vizinhança solar. O Sol está no centro da figura, e as distâncias nos dois eixos são em relação ao Sol. O centro galáctico estaria baixo e fora da figura. Diferentes tipos de objetos foram adicionados para melhor localizar as estruturas, todos os quais estão identificados com o mesmo símbolo (pontos cinzentos): cefeidas, aglomerados abertos, fontes de CS (ver texto para detalhes). A curva *a*, em marrom, representa uma órbita estelar na ressonância 4:1, a curva *b* uma órbita na ressonância 6:1 e a curva *c* não é identificada em termos de ressonância, uma vez que representa um ajuste linear aos pontos observados. As outras duas linhas (em vermelho, uma em verde) são espirais logarítmicas ajustadas aos dados. Este esquema trata-se de uma sugestão ou exemplo de identificação de estruturas, não um resultado final. Um estudo sistemático das perturbações de velocidade permitiria avançar na identificação correta.

e transformá-las em uma espécie de braço. Se este modelo estiver correto, quando aplicado à nossa Galaxia, esperaríamos que alguns dos braços vistos na vizinhança solar tivessem a forma das órbitas ressonantes.

Evidência direta de um braço com a forma de uma órbita estelar na ressonância 4:1 foi encontrada por [Lépine et al. \(2011a\)](#) usando como fontes: traçadores moleculares CS, cefeidas com períodos maiores do que seis dias e aglomerados abertos com idades inferiores a 30 milhões de anos. O mapa obtido neste artigo está reproduzido na Fig. 5.7. Aqui, o mesmo símbolo foi usado para todos os tipos de traçadores, uma vez que estamos interessados somente na estrutura de forma geral. Deve ser lembrado que, atualmente, apenas na vizinhança solar é que podemos ter uma descrição detalhada da estrutura espiral, uma vez que a extinção interestelar não permite que aglomerados abertos e cefeidas sejam observados além de alguns kpc.

A Fig. 5.7 pode ser vista como um zoom da parte superior das Figs. 5.6 ou 5.1, na região em torno do Sol. Podemos observar a presença de uma estrutura com um ângulo de cerca de 90° (rotulado por “a” em marrom na figura), o qual foi identificado por [Lépine et](#)

al. (2011a) com sendo a ressonância 4:1. O argumento usado para identificar essa estrutura não foi apenas o ajuste apresentado na Fig. 5.7, mas também outros pontos observados ao longo de uma linha reta com cerca de 7 kpc de comprimento, além do fato desses pontos encontrarem-se exatamente no lugar previsto, com base nos valores conhecidos da curva de rotação e de Ω_p , que foi calculado no Cap. 2. Apresentamos também um ajuste, de uma órbita na ressonância 6:1, aos pontos observados (curva com etiqueta “b”, em azul). Esta se assemelha muito a estrutura prevista na Fig. 5.6, que cruza o canto da órbita na ressonância 4:1 e passa próxima ao Sol, além de apresentar um canto agudo no segundo quadrante da Galáxia.

Finalmente, pode-se observar na Fig. 5.6, logo abaixo do canto superior da órbita na ressonância 4:1, uma órbita que cruza dois pontos. Isto se assemelha a estrutura tipo braço na Fig. 5.7 com etiqueta “c”. Consideramos que esta estrutura observada é provavelmente real, devido ao grande número de traçadores que caem sobre ela. Isto sugere um conceito interessante. Uma vez que órbitas ressonantes podem cruzar-se entre si, seria possível também ter uma estrutura tipo braço que correspondesse a essas órbitas, atravessando uma a outra. Isto contrasta com a visão clássica de braços espirais, em que nenhum desses cruzamentos pode existir.

Obviamente, a interpretação que demos para algumas estruturas locais pode não parecer convincente. Um possível argumento contra é que as órbitas ressonantes não parecem ser uniformemente povoadas pelas estrelas e também devido à quantidade de ressonâncias que podem povoar essa região, como podemos ver em todas as figuras mostradas em 5.1.2. No entanto, o mecanismo de captura de estrelas pelas ressonâncias merece um estudo mais aprofundado para determinar se algumas regiões deveriam apresentar uma população maior. A vizinhança solar é rica em estruturas e não foram explicadas por nenhum outro modelo. Alguém poderia argumentar que elas não podem ser explicadas, porque surgiriam devido a eventos estocásticos. A ideia que propomos aqui é que algumas destas estruturas correspondem às órbitas ressonantes, e ela pode ser verificada, uma vez que cada ponto em uma dessas órbitas tem uma velocidade associada. No entanto, isso ficará para um trabalho futuro e não foi explorado aqui. A comparação com os dados observados é difícil, em parte devido a sua qualidade. Além disso, alguns ajustes podem parecer melhor em uma certa região do plano galáctico, mas pior em outras.

5.2.2 Além da corrotação

Até agora não foi abordada a questão das órbitas periódicas além da corrotação. O motivo disso é que além da corrotação não encontramos nenhuma evidencia de auto-consistência ou alguma estrutura que se pareça com uma estrutura espiral. A Fig. 5.8 mostra um resultado obtido para raios além da corrotação.

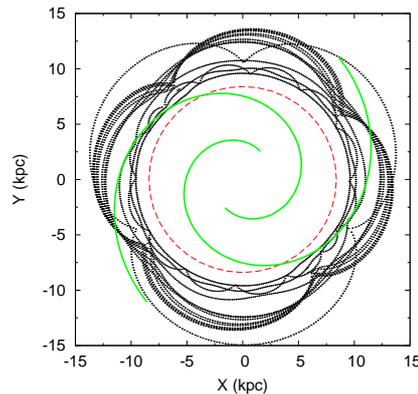


Figura 5.8: Órbitas periódicas calculadas além da corrotação. A perturbação imposta está representada pelas linhas verdes e o raio de corrotação é indicado pelo círculo em vermelho. Os parâmetros, para perturbação, usados nesse modelo são os mesmos listados na Tabela 3.1.

Também fizemos testes para contrastes de densidades maiores do que o adotado em todo o trabalho, mas não obtivemos sucesso em encontrar nenhuma estrutura além da corrotação. As órbitas associadas a esta região são todas retrógradas, ou seja, giram no sentido oposto definido pela curva de rotação com relação ao referencial fixo no padrão espiral.

Uma possível explicação para que as estruturas espirais sobrevivam além da corrotação é dada por [Kaufmann & Contopoulos \(1996\)](#). Eles fizeram um estudo de auto-consistência da barra e também concluíram que além da corrotação não há órbitas periódicas que suportariam a existência dessa estrutura. No entanto, os autores encontraram evidências de que nessa região a estrutura pode ser mantida por órbitas caóticas. Apesar do estudo ter sido feito para corrotação da barra, ele pode ser estendido à corrotação das estruturas espirais. Nesse trabalho, não fizemos nenhum estudo aprofundado sobre as órbitas caóticas, mas elas podem estar presentes na simulação que mostraremos na Sec. 5.4. Pois, nas regiões próximas à corrotação, várias condições iniciais dão origem a possíveis órbitas caóticas, como podemos ver pela Seção de Poincaré na Fig. 4.6.

5.3 Órbitas na corrotação

Nesta seção, iremos analisar as órbitas na corrotação. Para fazer esta análise, utilizamos os mesmos parâmetros da espiral e a mesma curva de rotação que usamos para a obtenção da Fig. 5.6, a qual acreditamos ser a que melhor representa a Galáxia. A diferença aqui é que as órbitas analisadas não são periódicas, pois exatamente na corrotação é impossível, com o método descrito em 4.2 encontrar, tais órbitas. Portanto, verificamos como uma órbita com energia $E_0(R_{cor})$ em $R_{cor} = 8.4$ kpc evolui se adotarmos diferentes valores de velocidade radial V_R e diferentes posições angulares com relação a perturbação espiral φ . Portanto, dada as condições iniciais, R_{cor} , V_R e φ , calculamos o momento angular inicial J_1 através da Eq. 4.20, só que agora para diferentes posições angulares. Desta forma, aprisionamos as órbitas perturbadas às órbitas com energia puramente circular $E_0(R_{cor})$.

Feito isso, variamos V_R entre -20 e 20 km s⁻¹ e para φ adotamos os valores de 0, 30, 45, 90 e 135°. Seria redundante adotar valores angulares além de 180°, pois os braços possuem simetria de 180°.

Existe uma razão especial para verificarmos a posição $\varphi = 30^\circ$, pois é exatamente onde um mínimo no potencial dos braços ocorre. Como os braços espirais provocam um adensamento das nuvens moleculares gigantes (Foyle et al., 2010), onde provavelmente se converterão em estrelas (Elmegreen, 2011) e segundo Moore et al. (2012), entre 60 – 80% dos aumentos observados na taxa de formação estelar estão associados às características do braço espiral, como o adensamento das órbitas dentro dos braços, essa região seria uma forte candidata a local de formação estelar. Entretanto, elas podem nascer em diversos locais da galáxia devido a um surto de formação estelar. Isso pode ocorrer pela injeção de turbulência no meio interestelar por supernovas (Dib et al., 2009). Justificamos, assim, a escolha de diversos valores angulares relativo à perturbação espiral. Os resultados são mostrados nas figuras que seguem.

Podemos observar que alguns valores de φ e V_R foram omitidos dos gráficos abaixo. Isso ocorre porque os valores de V_R iguais à ± 10 e ± 20 km s⁻¹ não permitem qualquer valor de φ . Para valores de $V_R = \pm 20$ km s⁻¹, só a posição $\varphi = 30^\circ$ é possível, ou seja, na mesma posição dos braços. Isso acontece porque as órbitas foram presas à energia

$E_0(R_{cor})$, desta forma valores arbitrários violam essa energia fazendo com que a Eq. 4.20 não tenha raízes reais. Para valores de V_R acima de 25 km s^{-1} , nenhuma posição azimutal é permitida. Entretanto, baixos valores para V_R no raio de corotação estão de acordo com as previsões teóricas (Sellwood & Binney, 2002), as quais postulam uma baixa dispersão radial de velocidades nesse raio.

Uma outra característica interessante, em quase todos os casos, é que a variação radial que as órbitas sofrem está entre $2 - 3 \text{ kpc}$, o que corrobora com os resultados obtidos por Lépine et al. (2003). Apenas para o caso onde $\varphi = 135^\circ$ e $V_R = 0 \text{ km s}^{-1}$ (Fig. 5.13), é que a variação radial é baixa: $\Delta R \sim 0.35 \text{ kpc}$. Isso ocorre porque nessa região encontra-se um dos pontos estáveis de Lagrange, fazendo com que a órbita fique confinada nesse local.

Em todos os casos onde $\varphi \neq 30^\circ$, as estrelas flutuam entre raios acima e abaixo do raio de corotação, passando mais tempo em raios externos do que internos a ele. Isso ocorre porque quando a estrela vai para raios mais internos sua velocidade angular aumenta, fazendo com que ela atinja o ponto de retorno (ponto no qual a órbita passa pela corotação) mais rapidamente do que quando ela está em raios mais externos. Nos casos onde as estrelas nasceriam nos braços, em $\varphi = 30^\circ$, as órbitas migram para raios externos ou internos a corotação. Somente no caso onde $V_R = -20 \text{ km s}^{-1}$ (Fig. 5.21), a estrela migra para um raio interno à corotação, nos demais a migração ocorre para raios externos.

Os resultados obtidos nessa seção mostram uma variedade de órbitas na corotação, que dependem da posição relativa aos braços em que as estrelas nascem e de suas velocidades radiais. Há uma clara diferença entre as órbitas das estrelas que nascem próximas ao

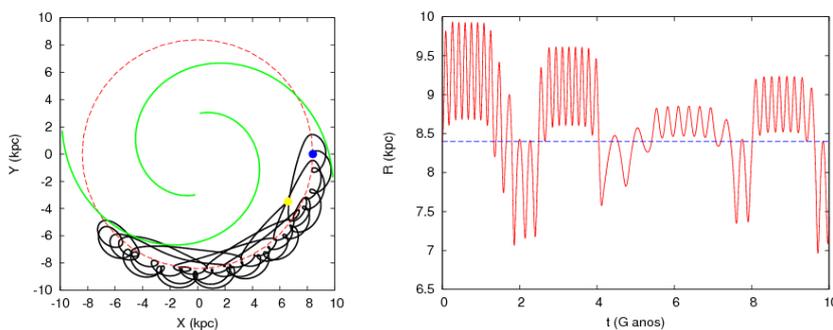


Figura 5.9: O gráfico a esquerda mostra a trajetória da órbita integrada. No gráfico da direita exibimos a variação radial que a estrela sofreu durante o tempo de integração. O ponto azul marca a posição inicial e o ponto amarelo a posição final, após 10 G anos de integração. As espirais, indicadas em verde, representam a posição onde a perturbação é máxima. O círculo vermelho é o raio de corotação ($R_{cor} = 8.4 \text{ kpc}$), que também está marcado pela linha pontilhada azul, no gráfico da direita. Os parâmetros usados são os mesmos listados na Tabela 3.1. As condições iniciais são: $\varphi = 0^\circ$ e $V_R = 0 \text{ km s}^{-1}$.

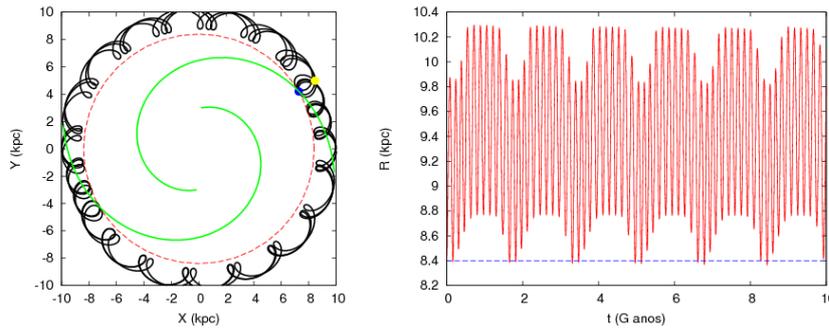


Figura 5.10: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 30^\circ$ e $V_R = 0 \text{ km s}^{-1}$.

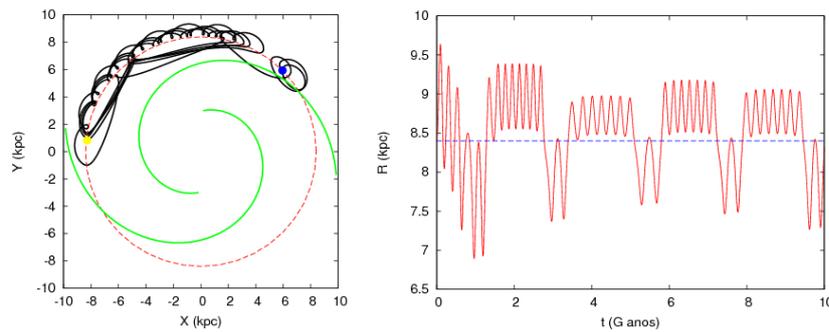


Figura 5.11: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 45^\circ$ e $V_R = 0 \text{ km s}^{-1}$.

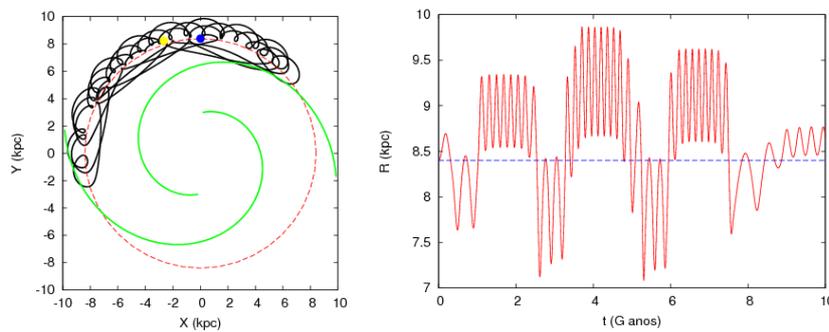


Figura 5.12: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 90^\circ$ e $V_R = 0 \text{ km s}^{-1}$.

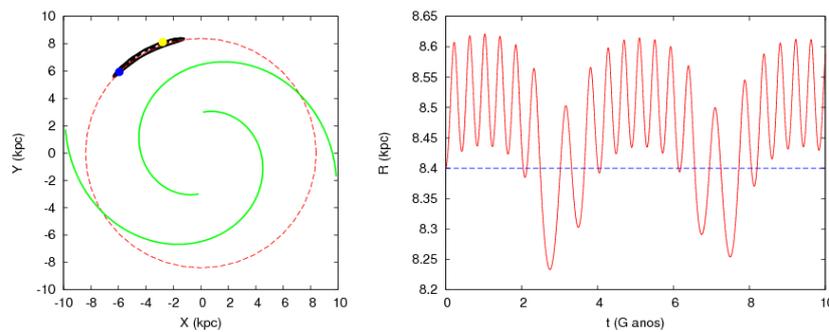


Figura 5.13: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 135^\circ$ e $V_R = 0 \text{ km s}^{-1}$.

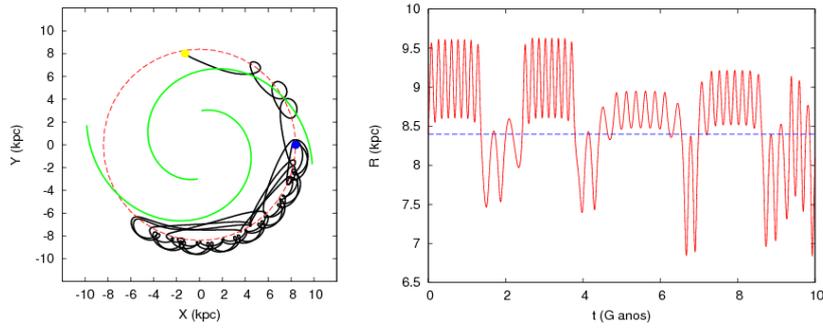


Figura 5.14: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 0^\circ$ e $V_R = 10 \text{ km s}^{-1}$.

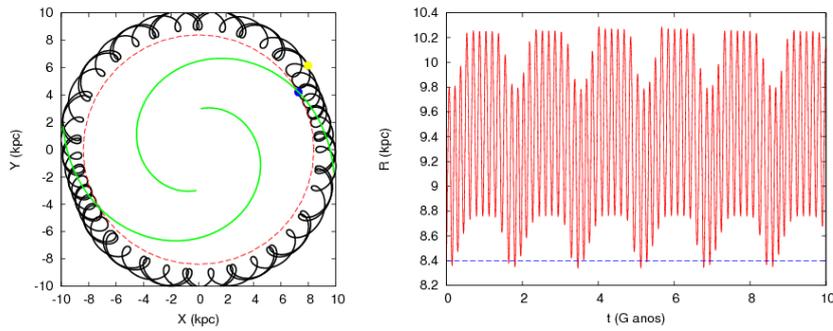


Figura 5.15: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 30^\circ$ e $V_R = 10 \text{ km s}^{-1}$.

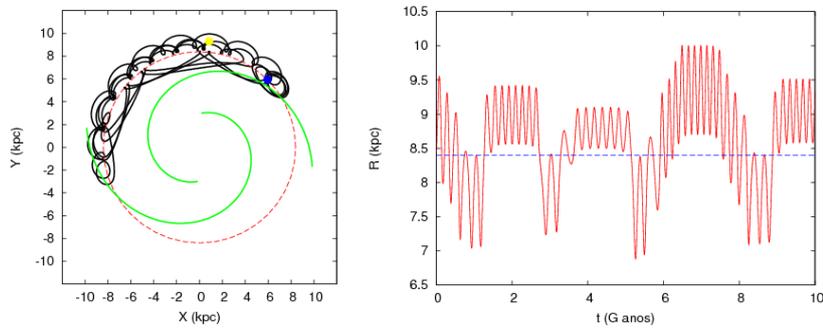


Figura 5.16: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 45^\circ$ e $V_R = 10 \text{ km s}^{-1}$.

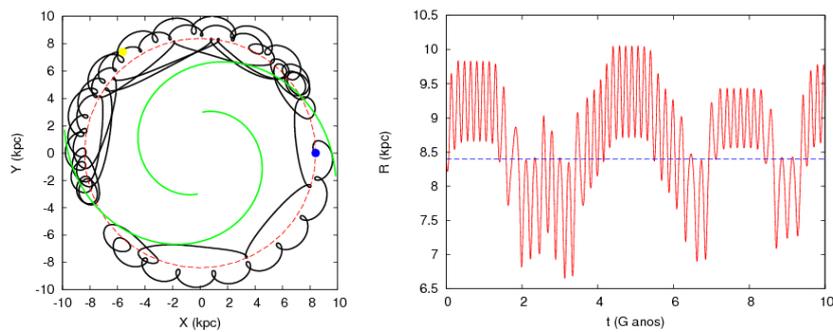


Figura 5.17: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 0^\circ$ e $V_R = -10 \text{ km s}^{-1}$.

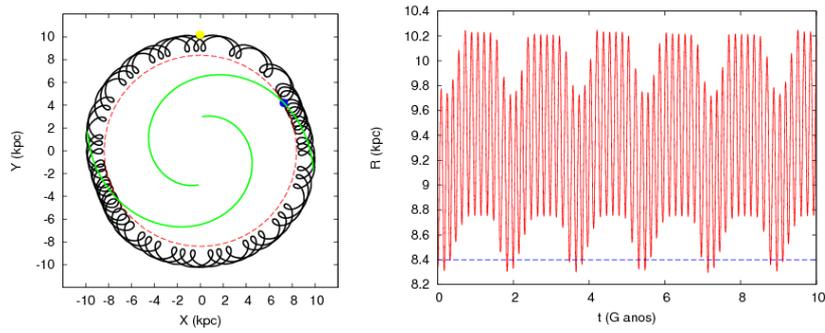


Figura 5.18: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 30^\circ$ e $V_R = -10 \text{ km s}^{-1}$.

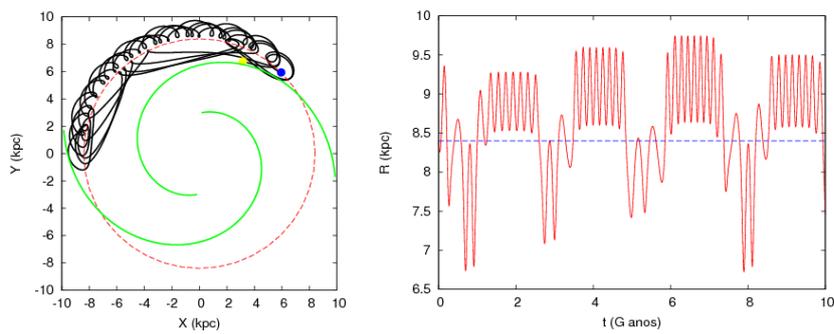


Figura 5.19: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 45^\circ$ e $V_R = -10 \text{ km s}^{-1}$.

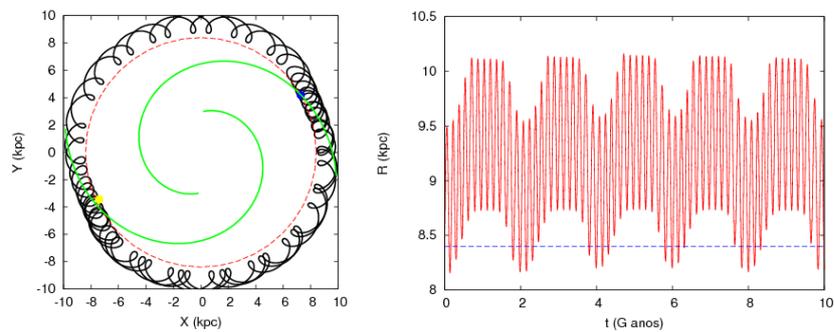


Figura 5.20: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 30^\circ$ e $V_R = 20 \text{ km s}^{-1}$.

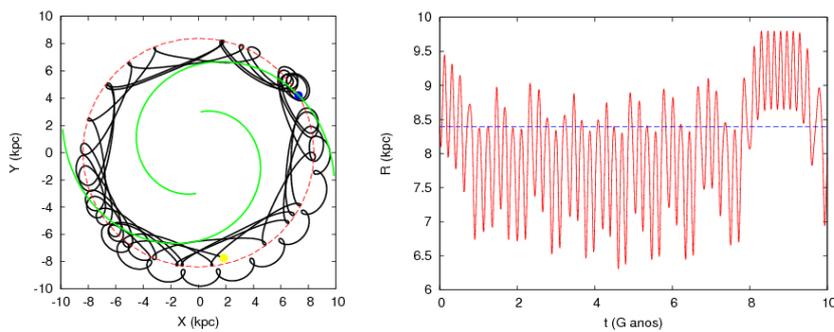


Figura 5.21: O mesmo que na Fig. 5.9. As condições iniciais são: $\varphi = 30^\circ$ e $V_R = -20 \text{ km s}^{-1}$.

braço e das que nascem afastadas dele. Nesse último caso, a maioria das órbitas ficam confinadas em uma região angular, oscilando o raio da órbita entre as regiões internas e externas a corrotação. Já no outro caso, as estrelas viajam todo o disco galáctico e migram suas órbitas para raios externos ou internos a corrotação. Praticamente em nenhum caso a estrela permanece confinada próxima ao raio de corrotação, somente no da Fig. 5.13; nos demais elas apenas atravessam esse raio. Observacionalmente, se soubermos a posição, idade e velocidade de uma estrela ou aglomerado, poderíamos integrar sua órbita e verificar se este objeto nasceu próximo ou não dos braços espirais, supondo que o nosso conhecimento sobre a estrutura espiral seja suficiente, como os valores de Ω_p , i e a posição exata dos braços na Galáxia.

5.4 Efeito das ressonâncias - órbitas não periódicas

Os resultados apresentados nesta seção correspondem às condições iniciais e ao método descrito na Sec. 4.4, para o potencial axissimétrico. Para o potencial perturbador, Eq. 3.5 em $z = 0$, os parâmetros adotados são os mesmos da Tabela 3.1.

5.4.1 Deformações na curva de rotação

A curva de rotação de nossa Galáxia mostra variações irregulares com estruturas de onda se a velocidade de rotação, $V_{rot}(R)$, é determinada a partir de observações de 21 cm aplicando o método de ponto tangencial (Clemens, 1985). Essa característica na curva de rotação provavelmente deve existir em outras galáxias, mas a resolução atual não é boa o bastante para detectar tais flutuações. Essas deformações também aparecem no disco de estrelas, como por exemplo na curva de rotação obtida por Maciel & Lago (2005) usando nebulosas planetárias.

Na Fig. 5.22, mostramos a evolução que a curva de rotação sofreu num período de integração de 0 a 1 Giga ano. As flutuações que observamos provavelmente são criadas pelas ressonâncias. Elas aparecem principalmente entre a ressonância interna 2:1 e a corrotação, com amplitudes da ordem de 10 km s^{-1} podendo aumentar esse valor com um tempo maior de integração. Na Fig. 5.23, ampliamos o gráfico da Fig. 5.22 que corresponde a $t = 1000$ milhões de anos. Nele, podemos notar a presença de dois picos próximos às ressonâncias internas 2:1 e 4:1. Na verdade, a ressonância interna 2:1 está mais próxima

do vale do que do pico. Próximo à corrotação, esperávamos a criação de um mínimo, como observado em nossa Galáxia e segundo evidências que encontramos (trabalhos em andamento). Entretanto ele não é muito evidente nos gráficos que mostramos, mas basta prestar atenção com cuidado na Fig. 5.23, que podemos perceber uma queda logo após a ressonância 4:1 interna, que poderia estar associada à formação desse mínimo se após a corrotação a curva tornar a subir. O fato disso não acontecer pode estar ligado ao potencial axissimétrico que adotamos. Ele apresenta um leve declínio, devido ao disco ser puramente exponencial, fazendo com que a ressonância 4:1 interna fique mais próxima da corrotação, apagando o mínimo. As ressonâncias externas também apresentam flutuações mas com uma amplitude muito menor, pois nessa região a perturbação já está bem fraca com relação ao potencial total, devido ao seu decaimento exponencial.

As oscilações que aparecem na curva de rotação estão ligadas também às oscilações na densidade, pois as duas grandezas estão correlacionadas pela equação de Poisson. Algumas dessas ressonâncias são responsáveis pela captura de estrelas e outras por expulsá-las, como iremos mostrar nos mapas de densidade mais adiante. Outra coisa interessante que podemos notar na Fig. 5.23 é que quando a ressonância interna está mais próxima de um vale a equivalente externa está mais próxima do pico. Em termos de densidade podemos dizer que se a interna expulsa estrelas, a externa irá capturá-las. A fim de confirmar nossa hipótese, seria necessário um estudo mais aprofundado na teoria de captura de objetos por ressonâncias.

A nossa intenção é reproduzir as características de oscilação presentes na curva de rotação, como é observada, e não ajustar a curva de nossa Galáxia apesar dos parâmetros adotados serem semelhantes. Isso pode gerar a seguinte pergunta, então porque não usar a curva observada da Galáxia? A resposta é simples. Necessitamos de um modelo em que fique claro a contribuição das componentes esféricas e a do disco. As variações de potencial devidas à migração de estrelas só podem afetar a componente do disco, pois a dinâmica estelar das componentes esféricas é completamente diferente. No final, temos que somar a componente que foi afetada (disco) com a componente que não foi afetada (componentes esféricas) para ver o efeito na distribuição de potencial total.

Este ainda é um resultado preliminar que merece um estudo mais aprofundado, como a variação dos potenciais axissimétricos adotados (em andamento). Talvez um modelo de disco puramente exponencial não seja adequado ou a influência do halo seja maior nas

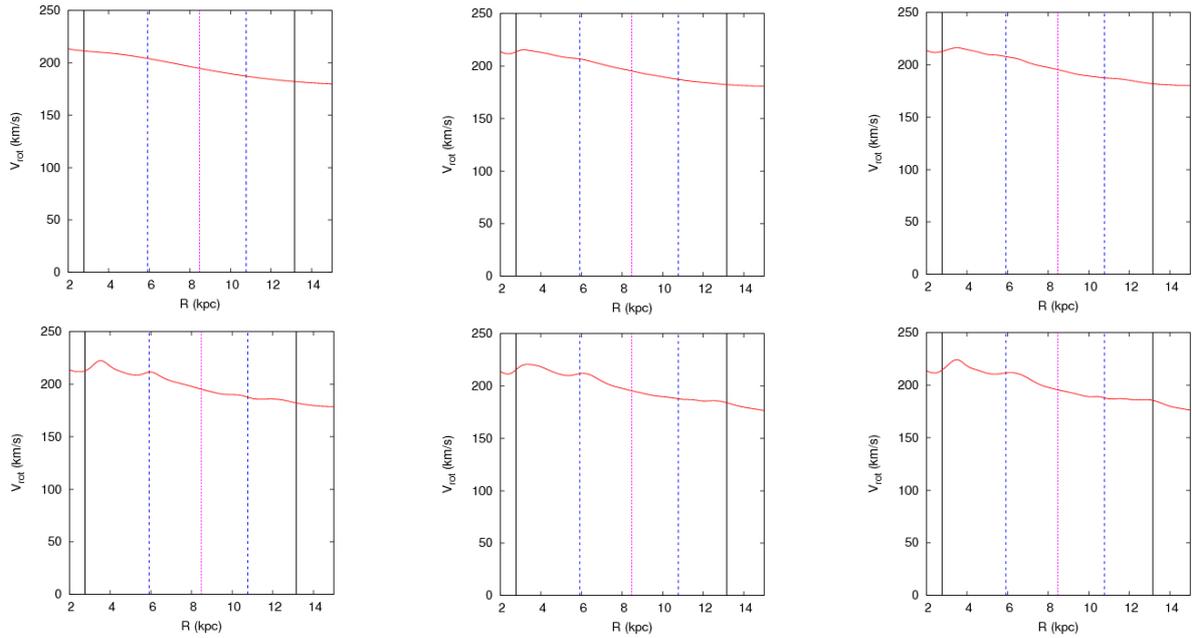


Figura 5.22: Curvas de rotação obtidas da simulação descrita na Sec. 4.4. As linhas verticais indicam algumas das principais ressonâncias. As ressonâncias 2 : 1 interna e externa de Lindblad estão indicadas pelas linhas em preto, as ressonâncias 4 : 1 interna e externa de Lindblad estão indicadas pela linha pontilhada em azul e a corrotação é indicada pela linha pontilhada em rosa. De cima para baixo e da esquerda para direita mostramos a evolução temporal para $t = 0, 200, 400, 600, 800$ e 1000 milhões de anos.

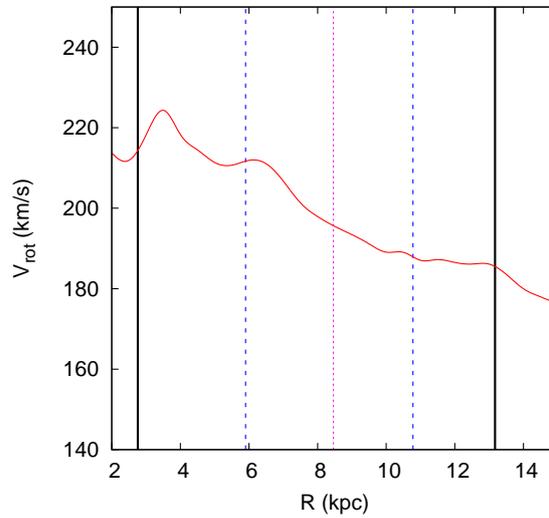


Figura 5.23: Ampliação do gráfico da Fig. 5.22 para $t = 1000$ milhões de anos.

partes mais internas, deixando a curva mais plana. A perturbação também não foi capaz de reproduzir um aumento na curva nas regiões mais externas como parece acontecer em algumas galáxias, o que pode indicar que isso seja uma característica da distribuição inicial de matéria na formação do disco.

5.4.2 Evolução da densidade superficial do disco

Nesta seção apresentamos os mapas de densidade obtidos com a função *Kernel Density Estimator* (KDE), a mesma usada para obter os resultados do Cap. 2. Agora, usamos uma versão bidimensional desta. Na Fig. 5.24, mostramos os mapas de densidade normalizados. Em $t = 0$, o disco é puramente exponencial, como explicado em 4.4.2, e o último mapa mostra a evolução em $t = 1$ bilhão de ano.

A Fig. 5.24 mostra a evolução temporal da densidade. Nos primeiros 400 milhões de anos, os braços persistem até a ressonância 2:1 externa de Lindblad. A partir daí os braços perdem a forma espiral, gerando um anel próximo a essa ressonância. Por volta de 800 milhões de anos, ramificações começam a surgir (na Fig. 5.25 ampliamos essa região em $t = 1000$ milhões de anos para melhor visualização) nos braços entre a ressonância 4:1 e a corrotação, perdendo também as características de uma espiral logarítmica. Somente até a ressonância 4:1 é que os braços persistem, como já tínhamos previsto pela análise feita com a resposta das órbitas periódicas. Na região bem central as órbitas tomam um formato elíptico sugerindo a formação de uma barra complementando os resultados da seção 5.5.

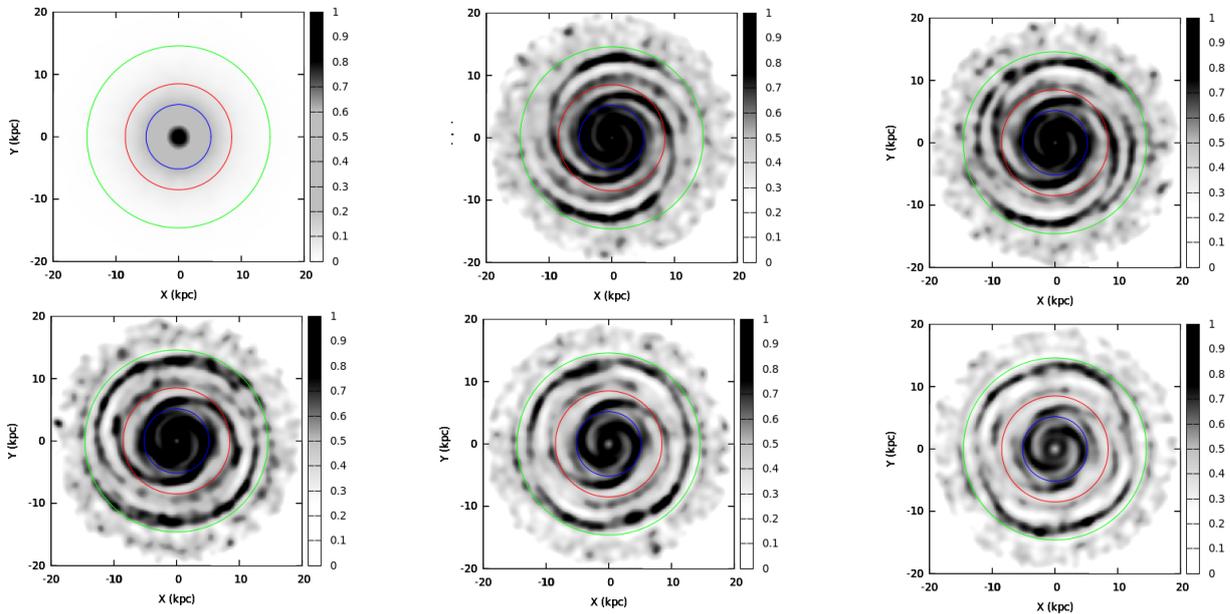


Figura 5.24: Mapas normalizados de densidade obtidos da simulação descrita na Sec. 4.4. Os círculos indicam algumas das principais ressonâncias. O primeiro círculo em azul é a posição da ressonância interna 4:1, em vermelho a corrotação e por último em verde é a posição da ressonância externa 2:1. De cima para baixo e da esquerda para direita mostramos a evolução temporal para $t = 0, 200, 400, 600, 800$ e 1000 milhões de anos.

Até os 400 milhões de anos, os braços espirais conseguiram sobreviver além da corrota-

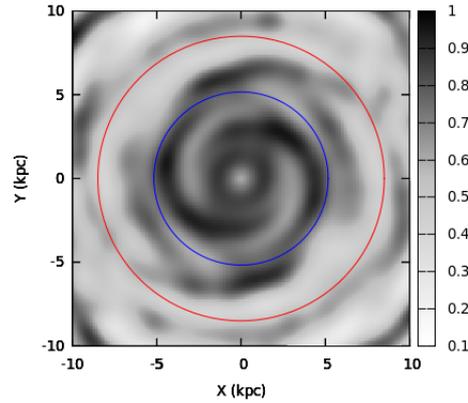


Figura 5.25: Ampliação do gráfico em $t = 1000$ milhões de anos, da Fig. 5.24. O primeiro círculo em azul é a posição da ressonância interna 4:1, e o vermelho, a corrotação.

ção, provavelmente devido ao mecanismo proposto por [Kaufmann & Contopoulos \(1996\)](#), como já mencionamos anteriormente, pois nessa região a maior parte das condições iniciais geram órbitas caóticas. Entretanto, após esse período de tempo, as órbitas foram capturadas pela ressonância 2:1 externa.

Nosso modelo consegue reproduzir muitas das características globais que observamos em diversas galáxias como, por exemplo, o surgimento das bifurcações em formato de “y” que pode ser visto claramente na Fig. 2.1. Esses resultados indicam que talvez estejamos no caminho certo para uma melhor compreensão das estruturas observadas. Um resultado recorrente que obtivemos nas simulações é de que, na região interna, a estrutura com 2 braços sempre se preserva, o que reforça os resultados obtidos com as órbitas periódicas, que mostram uma boa auto-consistência nessa região.

5.5 Relação entre a barra e o bojo

Cerca de 50% das galáxias espirais possuem barra, seja uma barra forte ou fraca, e há evidências tanto cinemáticas quanto fotométricas de que a Via Láctea possui uma barra ([Binney & Tremaine, 2008](#), Sec. 6.5). [Shen et al. \(2010\)](#) argumentaram que o bojo da Galáxia é parte do disco e sugeriram que ele (na verdade, um pseudobojo em formato de caixa) é uma barra que evoluiu de um disco frio e massivo. Nesta seção, iremos analisar a conexão entre um bojo esférico central com as órbitas estelares nessa região.

5.5.1 Curva de rotação plana com um bojo: modelo simples

Muitas galáxias têm uma curva de rotação plana, mas algumas delas apresentam um pico na parte interna. Um exemplo é a curva de rotação de nossa Galáxia, como pode ser visto na Fig. 4.2, que apresenta um pico na região interna em um raio menor do que 2 kpc, com um máximo em torno de 300 pc. A natureza desse pico é um assunto em debate. Alguns autores consideram que ele aparece devido a movimentos não circulares, como [Burton & Liszt \(1993\)](#), que acreditam que há uma forte componente de velocidade de gás fluindo das regiões centrais da Galáxia. Outros consideram que é devido a um importante desvio da simetria axial, como um bojo triaxial, que segundo [Gerhard & Vietri \(1986\)](#) é necessário para explicar o pico.

Para executar uma primeira análise sobre os efeitos da presença do bojo sobre as órbitas estelares nas regiões internas da Galáxia, adotaremos a hipótese de que o bojo tem uma simetria axial, ou seja, um bojo esférico como parece ser, na maioria das galáxias espirais ([Méndez-Abreu et al., 2010](#)). Entretanto, em bojos axissimétricos, também é possível encontrar órbitas elípticas em suas regiões centrais. Portanto, qualquer perturbação pequena pode dar origem a uma estrutura oval. Uma vez que não estamos interessados em resolver o caso específico da nossa Galáxia, mas sim, ter uma idéia geral do efeito do bojo nas órbitas internas, nós não usamos a curva de rotação observada. Em vez disso, usamos uma curva mais simples a partir da qual podemos obter o potencial analiticamente, evitando assim, dados numéricos. Para realizar este estudo adotamos um modelo para a curva de rotação dada por [Contopoulos & Grosbøl \(1986\)](#), onde a presença do pico é facilmente modelada por duas componentes axissimétricas (bojo + disco):

$$V_{rot}(R) = V_{max} \sqrt{f_b \epsilon_b R \exp(-\epsilon_b R) + [1 - \exp(-\epsilon_d R)]}. \quad (5.1)$$

Aqui, ϵ_b^{-1} e ϵ_d^{-1} são as escalas de comprimento do bojo e disco, respectivamente. A importância do bojo relativa ao disco é dada pela fração de bojo f_b .

5.5.2 Análise das órbitas internas

Analizamos as órbitas periódicas estelares na região mais interna, como o método descrito em 4.2, para distintos valores de f_b , ou seja, para diferentes importâncias do bojo. Os resultados são discutidos a seguir.

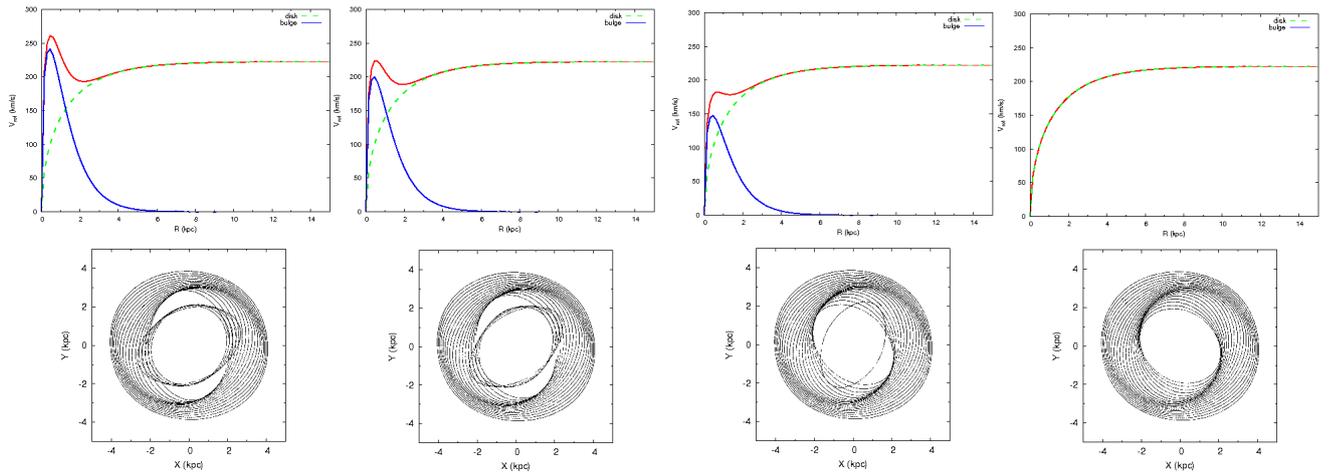


Figura 5.26: Curvas de rotação (em cima) e as respectivas órbitas internas (parte de baixo) para diferentes valores de força do bojo, f_b . Da esquerda para direita, o parâmetro f_b é 3.2, 2.2, 1.2, e 0, respectivamente. A linha em azul representa a contribuição do bojo, a linha verde é a contribuição do disco, e a vermelha representa a soma bojo + disco.

A Fig. 5.26 (parte superior) mostra várias curvas de rotação, obtidas pela Eq. 5.1. O fator de escala para o disco e o bojo são fixados em $\epsilon_d^{-1} = 2$ kpc and $\epsilon_b^{-1} = 0.4$ kpc, $V_{max} = 220$ km s $^{-1}$. O parâmetro f_b , definido na Eq. 5.1 como “a fração de bojo”, é equivalente a uma medida da “força do bojo”, uma vez que a componente relativa ao disco é mantida constante (e somente o bojo varia), ou mesmo equivalente a uma medida da densidade do bojo, pois seu tamanho, determinado por ϵ_b , é mantido constante. Portanto, iremos nos referir a este fator como a força do bojo. Desta forma, variamos f_b de 3.2 até 0. Abaixo de cada curva de rotação, na Fig. 5.26, temos as famílias das órbitas periódicas perturbadas presas em torno das órbitas periódicas circulares com, $R_c = 2$ até 4 kpc; veja Sec. 4.2 para maiores detalhes. Para uma dada energia $E_0(R_c)$, a qual corresponde a um certo raio R_c , podemos ter mais de uma órbita periódica. A família de órbitas periódicas é encontrada no centro da ilha na seção de Poincaré, como já explicamos no Cap. 4. Entretanto, iremos seguir a definição de Contopoulos (1975) e nomear de família x_1 se o centro da ilha estiver em $R \leq R_c$ e família x_2 se $R \geq R_c$.

Os parâmetros para perturbação espiral são os mesmos dados na Tab. 3.1. As órbitas nas regiões mais internas, quase perpendiculares às órbitas mais externas, pertencem (Fig. 5.26) à família x_2 . Elas são mais proeminentes quando temos um bojo central forte ($f_b = 3.2$), conforme o bojo fica mais fraco a família de órbitas x_2 desaparece, como podemos ver na Fig. 5.27. No caso onde $f_b \neq 0$, temos duas famílias de órbitas periódicas (x_1, x_2).

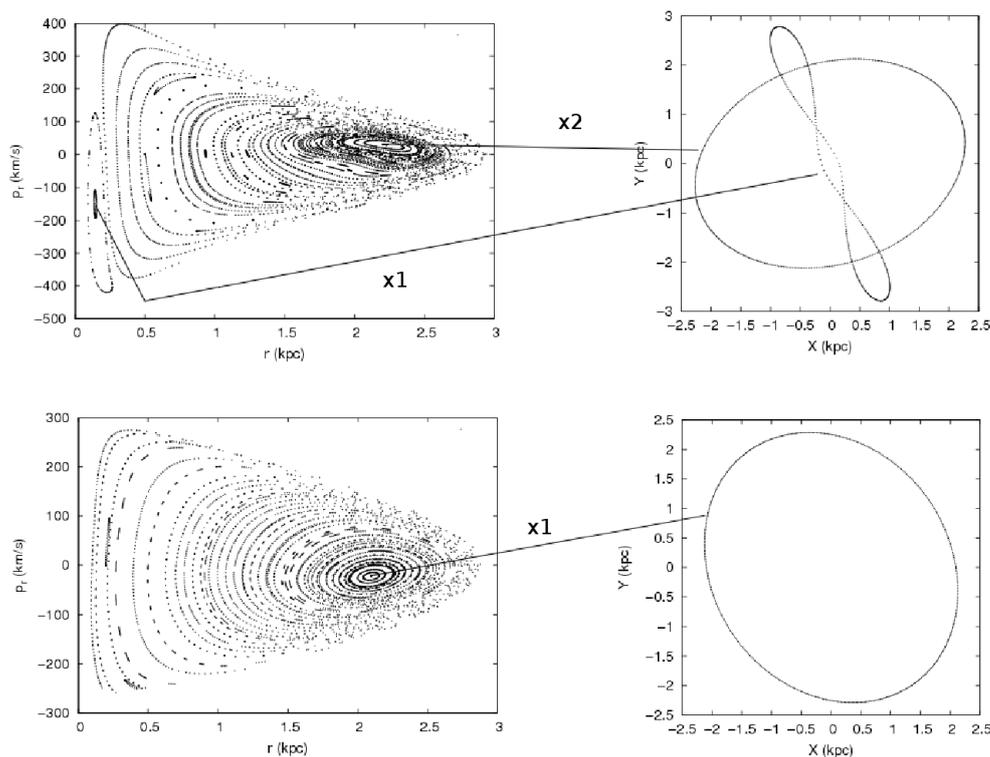


Figura 5.27: Seção de Poincaré e suas respectivas famílias (x_1, x_2) de órbitas periódicas (ver [Contopoulos, 1975](#), para mais detalhes). Em ambos os casos, fixamos a energia em $R_c = 2.2$ kpc, e os parâmetros para perturbação são os mesmo da Tab. 3.1. A única diferença entre os dois gráficos é a força do bojo f_b ; no gráfico de cima nós temos $f_b = 3.2$ e no de baixo temos $f_b = 0$.

Na Fig. 5.26, mostramos as órbitas que correspondem às famílias que possuem o menor desvio com relação à R_c , as quais apresentam uma distribuição de velocidades mais realista. Como podemos ver na parte superior da Fig. 5.27, a família x_1 possui um desvio maior de R_c com uma velocidade radial na ordem de $V_R \approx -150 \text{ km s}^{-1}$ o que gera uma órbita com alta excentricidade, enquanto que a família x_2 encontra-se mais próximo a R_c com $V_R \approx 20 \text{ km s}^{-1}$. Portanto, esperamos que essa seja a família mais propensa a povoar essa região. Está claro que bojos fortes favorecem a família x_2 nas regiões mais internas da galáxia, enquanto que sem um bojo temos somente a família x_1 povoando esta região.

Uma inspeção visual das órbitas associadas às curvas de rotação mostra que elas são alongadas no interior do disco para as curvas com a presença de um pico, perto do centro. No caso onde $f_b = 3.2$, elas sugerem a formação de uma barra com um raio de ~ 3 kpc. Este modelo demonstra a existência de uma correlação entre a formação de uma barra e a magnitude do bojo central. O pico na curva de rotação torna-se visível quando f_b

é relativamente grande (3.2 ou 2.2). Desta forma, a presença de um bojo forte gera um pico de velocidade mais proeminente e modifica as órbitas estelares internas. Em outras palavras, a existência de um bojo influencia a existência de uma barra.

Algo interessante de se notar é que a barra aparece como uma consequência do mesmo potencial perturbador que foi introduzido para os braços espirais, de modo que a barra e os braços espirais deveriam ter a mesma velocidade de rotação. O tipo de barra que estamos discutindo aqui corresponde ao que é entendido como barra fraca. A princípio, isso seria mais compatível com o modelo de braços espirais apresentado nesta tese, onde o efeito de uma barra não é levado em conta na região que descrevemos. Podemos dizer que uma barra é fraca se ela gera apenas uma pequena fração do campo gravitacional total em torno dela. Na nossa Galáxia, a massa associada ao bojo esférico é muito maior do que a associada à barra, conforme foi deduzido a partir da luminosidade no infravermelho, por [Lépine & Leroy \(2000\)](#). Pode-se até esperar que fora do bojo esférico, a uma distância por volta de 1.5 kpc do centro (valor onde se encontra a interface bojo-disco da Galáxia, conforme [Cavichia et al., 2011](#)), mas ainda sobre sua forte influência, o potencial é kepleriano com uma massa dominante no centro. Em tal potencial, as órbitas são elípticas, como as órbitas de cometas no sistema solar. Duas famílias de tais órbitas alinhadas ao longo de uma linha reta, seria em parte responsável pela formação de uma barra. O alinhamento de tais órbitas alongadas com a extremidade interna dos braços espirais ocorreria naturalmente, já que as estrelas viajam lentamente quando estão no apogaláctico (parte mais distante da órbita) de suas órbitas, facilitando a sincronização. Claro, não estamos apresentando aqui um modelo completo de uma barra fraca, mas apenas argumentando que a sua existência em nossa Galáxia não deve ser rejeitada. Se considerarmos que a origem da estrutura espiral está relacionada com a interação com uma galáxia externa, é mais lógico pensar que a barra é induzida pela estrutura espiral, e não o inverso.

Outro ponto interessante é que como a única perturbação aplicada aqui é devida aos braços espirais, nosso resultado apoiaria a ideia de que um pseudobojo poderia ter evoluído a partir de um disco perturbado, como foi proposto por [Shen et al. \(2010\)](#).

Conclusões e perspectivas

6.1 Conclusões

Nós apresentamos uma nova descrição para a estrutura espiral das galáxias, baseada na interpretação de que os braços se formam nas regiões onde as órbitas estelares estão mais densas e como consequência produz também um grande adensamento de estrelas. Em outras palavras, os braços são vistos como um poço de potencial. Tal abordagem não é nova (por exemplo, veja [Contopoulos & Grosbøl, 1986](#); [Amaral & Lepine, 1997](#)). A inovação é que a perturbação que adotamos é, em si, um poço de potencial que segue uma espiral logarítmica, com um perfil gaussiano na direção perpendicular aos braços. Isso representa um passo importante na direção da auto-consistência, uma vez que essa perturbação gera, por meio das órbitas estelares, braços espirais com um perfil semelhante. Em modelos clássicos anteriores, a perturbação é representada por uma função seno (ou a soma de duas funções seno, onde quatro braços são apresentados) na direção azimutal, mas o potencial de resposta assemelhava-se mais ao potencial descrito nesse trabalho, de modo que a auto-consistência era mais pobre. Existe um outro modelo de [Pichardo et al. \(2003\)](#), que não utiliza uma função senoidal para o potencial imposto, tendo também uma abordagem mais realista dos braços. O campo de força gerado pelo modelo deles é bem semelhante ao do nosso, no entanto, a complexidade matemática do potencial não permite uma verificação fácil da auto-consistência.

Um novo parâmetro (σ) aparece em nossa descrição, que nos permite controlar a largura dos braços. No Cap. 3, encontramos uma relação entre o contraste de densidade, obtido entre a região do braço e interbraço, e a amplitude de perturbação. Adotando a hipótese de um disco exponencial, o intervalo de valores para a amplitude de perturbação

compatíveis com as evidências observacionais do contraste de densidade, para a Galáxia, que encontramos são de $400 - 800 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$. Para um contraste de densidade de aproximadamente 20%, encontramos um valor médio para amplitude de perturbação ζ_0 , de $600 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$.

Outro resultado importante que obtivemos foi a determinação do valor de Ω_p . No Cap. 2, desenvolvemos um novo método, baseado na cinemática dos aglomerados abertos, para determinar seu valor. Com base na curva de rotação observada para diferentes valores de R_0 e V_0 , quatro modelos foram construídos. A variação no resultado de Ω_p para os diversos modelos foi de apenas $2.3 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Uma diferença maior foi encontrada quando separamos os aglomerados por idade, com um máximo de diferença de 4.4 km s^{-1} . O valor médio encontrado e que adotamos foi de $\Omega_p = 23 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

Nós confirmamos os resultados de trabalhos anteriores, onde se conclui que a ressonância 4:1 interna é uma estrutura fundamental do disco, e que braços espirais bem definidos e simétricos não aparecem além desta ressonância. Este resultado é sustentado também por observações, uma vez que encontram-se, na maioria das galáxias espirais, dois braços simétricos e proeminentes somente em suas regiões internas (Elmegreen & Elmegreen, 1995). Em galáxias externas é difícil dizer, observacionalmente, onde está o raio da ressonância 4:1, mas segundo resultados de trabalhos anteriores e os que mostramos aqui, temos fortes evidências para acreditar na hipótese de que os braços espirais bem definidos não se estendam muito além dessa ressonância. Também verificou-se que as órbitas na região entre a ressonância 4:1 e a corrotação não reforçam os braços espirais (auto-consistência fraca) como nas regiões mais internas, existindo somente estruturas semelhantes às órbitas periódicas dessa região. Se o nosso modelo pode de fato explicar os braços espirais na vizinhança solar, então, a dinâmica nessa região será determinada pelo movimento das estrelas em órbitas quase periódicas. As simulações que realizamos confirmam todas essas hipóteses e, ainda, mostram que algumas ressonâncias capturam ou expulsam as estrelas, tendo um papel fundamental na manutenção dos braços e da sua forma.

Curiosamente, várias estruturas observadas são muito semelhantes às órbitas ressonantes previstas. As semelhanças do modelo com a Galáxia incluem o tamanho e orientação das órbitas na ressonância 4:1, como reveladas por Lépine et al. (2011a), e, possivelmente, órbitas ressonantes com picos ou “cantos” apresentando curvatura negativa entre eles, situadas perto do Sol.

A ideia de que a estrutura espiral possa ser auto-consistente (um certo potencial perturbador dá origem a órbitas estelares que reproduzem esta perturbação), pelo menos nas regiões internas das galáxias, aponta para uma estrutura de longa duração. Este ponto de vista está em conflito com uma interpretação recente que acredita que os braços espirais possuem características transientes (por exemplo [Sellwood, 2011](#)), mas é consistente com o argumento de que a estrutura espiral tem longa duração, baseada na observação do gradiente de metalicidade na corrotação, ([Lépine et al., 2011b](#)), ou baseado no gradiente azimutal idade/cor ([Martínez-García & González-Lópezlira, 2013](#)).

Outro resultado interessante é que uma barra aparece naturalmente, sem impor qualquer condição especial, exceto que o potencial perturbador em espiral se prolonga até o centro da galáxia. Podemos perceber o surgimento de órbitas alongadas nas regiões centrais da galáxia, que identificamos como sendo uma possível barra fraca. Encontramos uma correlação entre a presença das órbitas alongadas na parte central e a massa do bojo. Em nossa Galáxia, o bojo é relativamente maciço, como revelado pelo pico na curva de rotação perto do centro e, conseqüentemente, pode gerar uma barra fraca a partir de um disco perturbado. Isso estaria de acordo com o resultado sugerido por [Shen et al. \(2010\)](#).

Estamos conscientes de que há muitos trabalhos na literatura que estão em conflito com os nossos resultados. Eles propõem, por exemplo, diferentes raios de corrotação com diferentes valores para a velocidade do padrão espiral ou até mesmo a existência de múltiplas velocidades. Outros afirmam que os braços são estruturas transientes e que a barra teria uma velocidade diferente da dos braços espirais. Há também uma visão artística, em moda, da estrutura espiral disponível no site da NASA, que é reproduzida muitas vezes em trabalhos científicos e que apresenta a Galáxia como uma espiral logarítmica perfeita para raios distantes. Tal estrutura não poderia ser transiente. Outros ainda consideraram que a ampliação da perturbação devido à oscilação radial é a base física por trás dos braços espirais. Há muitas maneiras contraditórias de se compreender a estrutura galáctica e o nosso grupo de pesquisa acrescenta mais uma possibilidade. Nós entendemos os braços como um poço de potencial gravitacional no disco e de longa duração, cuja forma é determinada principalmente pelas órbitas estelares e não por ondas de choque que se propagam no meio interestelar.

A estrutura espiral é auto-consistente em termos de forma do braço, em uma gama de raio que vai desde a ressonância interna de Lindblad até a ressonância 4:1, de modo que

esta região é, provavelmente, o que garante a estabilidade de toda a estrutura e impõe a velocidade angular do padrão espiral. Fora dessa região muitas estruturas observadas têm formas que são similares às órbitas periódicas previstas em regiões além da ressonância 4:1. Uma vez que nosso modelo prevê a existência de órbitas ressonantes com curvatura negativa entre os cantos (como ilustra a Fig. 5.6), não é surpreendente observar estruturas com características similares em nossa Galáxia. Da mesma forma, não é muito surpreendente descobrir estruturas similares a braços que se cruzam. A resposta esperada do gás presente no disco Galáctico é ficar preso nesses poços de potenciais e fluir ao longo deles.

6.2 *Perspectivas*

Uma sequência natural desse trabalho é o estudo mais aprofundado das ressonâncias, principalmente a 4:1 e as que estão próximas ao círculo solar. Queremos também verificar qual é a importância que elas exercem na migração e variação radial das estrelas, que terá consequências importantes no gradiente de metalicidade.

Uma outra parte do trabalho envolve o desenvolvimento de simulações mais realistas para verificar a evolução do disco em termos de escala de altura e aquecimento. Essa não é uma tarefa trivial e não há trabalhos na literatura que expliquem satisfatoriamente as observações. Pretendemos desenvolver trabalhos conjuntos com outros grupos para tais fins.

Trabalhos sobre o efeito da corotação no disco estelar já estão sendo feitos e um artigo foi recentemente submetido para MNRAS.

Referências Bibliográficas

- Agertz, O., Teyssier, R., & Moore, B. 2011, MNRAS, 410, 1391
- Amaral, L. H., & Lépine, J. R. D. 1997, MNRAS, 286, 885
- Amôres, E. B., Lépine, J. R. D., & Mishurov, Y. N. 2009, MNRAS, 400, 1768
- Antoja, T., Figueras, F., Romero-Gómez, M., et al. 2011, MNRAS, 418, 1423
- Athanassoula, E., Romero-Gómez, M., & Masdemont, J. J. 2009, MNRAS, 394, 67
- Aumer, M., & Binney, J. J. 2009, MNRAS, 397, 1286
- Baba, J., Saitoh, T. R., & Wada, K. 2013, ApJ, 763, 46
- Barbanis, B. 1970, The Spiral Structure of our Galaxy, 38, 343
- Barbanis, B. 1976, A&A, 46, 269
- Bertin, G., & Haass, J. 1982, A&A, 108, 265
- Binney, J., & Tremaine, S. 2008, Galactic Dynamics: Second Edition, by James Binney and Scott Tremaine. ISBN 978-0-691-13026-2 (HB). Published by Princeton University Press, Princeton, NJ USA, 2008.,
- Block, D. L., & Wainscoat, R. J. 1991, Nature, 353, 48
- Block, D. L., Bertin, G., Stockton, A., et al. 1994, A&A, 288, 365
- Bobylev, V. V., & Bajkova, A. T. 2010, MNRAS, 408, 1788

- Bowman A. W., & Azzalini, A. 1997, *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis: The Kernel Approach with S-Plus Illustrations* by Adrian W. Bowman, Adelchi Azzalini. ISBN 0 19 852396 3 (HB). Published by Oxford University Press Inc, Oxford, NY USA, 1997.,
- Burton, W. B. 1971, *A&A*, 10, 76
- Burton, W. B., & Gordon, M. A. 1978, *A&A*, 63, 7
- Burton, W. B., & Liszt, H. S. 1993, *A&A*, 274, 765
- Cavichia, O., Costa, R. D. D., & Maciel, W. J. 2011, *Rev. Mexicana Astron. Astrofis.*, 47, 49
- Chernin, A. D., Zasov, A. V., Arhipova, V. P., & Kravtsova, A. S. 2001, *Astronomical and Astrophysical Transactions*, 20, 139
- Clemens, D. P. 1985, *ApJ*, 295, 422
- Contopoulos, G. 1970, *ApJ*, 160, 113
- Contopoulos, G. 1973, *ApJ*, 181, 657
- Contopoulos, G. 1975, *ApJ*, 201, 566
- Contopoulos, G. 1979, *A&A*, 71, 221
- Contopoulos, G., & Grosbøl, P. 1986, *A&A*, 155, 11
- Contopoulos, G., & Grosbol, P. 1988, *A&A*, 197, 83
- Creze, M., & Mennessier, M. O. 1973, *A&A*, 27, 281
- Danver, C.-G. 1942, *Annals of the Observatory of Lund*, 10, 7
- Davis, B. L., Berrier, J. C., Shields, D. W., et al. 2012, *ApJS*, 199, 33
- de Jong, R. S. 1996, *A&A*, 313, 45
- Dias, W. S., Alessi, B. S., Moitinho, A., & Lépine, J. R. D. 2002, *A&A*, 389, 871
- Dias, W. S., & Lépine, J. R. D. 2005, *ApJ*, 629, 825

-
- Dib, S., Walcher, C. J., Heyer, M., Audit, E., & Loinard, L. 2009, *MNRAS*, 398, 1201
- Dobbs, C. L., Theis, C., Pringle, J. E., & Bate, M. R. 2010, *MNRAS*, 403, 625
- Eggen, O. J., Lynden-Bell, D., & Sandage, A. R. 1962, *ApJ*, 136, 748
- Elmegreen, B. G., & Elmegreen, D. M. 1989, *ApJ*, 342, 67
- Elmegreen, D. M., & Elmegreen, B. G. 1995, *ApJ*, 445, 591
- Elmegreen, D. M., Elmegreen, B. G., Yau, A., et al. 2011, *ApJ*, 737, 32
- Elmegreen, B. G. 2011, *EAS Publications Series*, 51, 19
- Feldman, S. I., & Lin, C. C. 1973, *Studies in Applied Mathematics*, 52, 1
- Fich, M., Blitz, L., & Stark, A. A. 1989, *ApJ*, 342, 272
- Flynn, C., Holmberg, J., Portinari, L., Fuchs, B., & Jahreiß, H. 2006, *MNRAS*, 372, 1149
- Foyle, K., Rix, H.-W., Walter, F., & Leroy, A. K. 2010, *ApJ*, 725, 534
- Francis, C., & Anderson, E. 2012, *MNRAS*, 422, 1283
- Freudenreich, H. T. 1998, *ApJ*, 492, 495
- Ganda, K., Peletier, R. F., Balcells, M., & Falcón-Barroso, J. 2009, *MNRAS*, 395, 1669
- Georgelin, Y. M., & Georgelin, Y. P. 1976, *A&A*, 49, 57
- Gerhard, O. E., & Vietri, M. 1986, *MNRAS*, 223, 377
- Gerhard, O. 2011, *Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplementi*, 18, 185
- Goldreich, P. 1965, *MNRAS*, 130, 159
- Graham, A. W. 2001, *AJ*, 121, 820
- Grosbøl, P., Patsis, P. A., & Pompei, E. 2004, *A&A*, 423, 849
- Hänninen, J., & Flynn, C. 2004, *A&A*, 421, 1001
- Hernquist, L. 1990, *ApJ*, 356, 359

- Hou, L. G., Han, J. L., & Shi, W. B. 2009, *A&A*, 499, 473
- Junqueira, T. C., Lépine, J. R. D., Braga, C. A. S., & Barros, D. A. 2013, *A&A*, 550, A91
- Kalnajs, A. J. 1965, Ph.D. Thesis
- Kalnajs, A. J. 1972, *ApJ*, 175, 63
- Kalnajs, A. J. 1973, *Proceedings of the Astronomical Society of Australia*, 2, 174
- Kaufmann, D. E., & Contopoulos, G. 1996, *A&A*, 309, 381
- Kendall, S., Kennicutt, R. C., & Clarke, C. 2011, *MNRAS*, 414, 538
- Kennicutt, R. C., Jr. 1981, *AJ*, 86, 1847
- Kennicutt, R., Jr., & Hodge, P. 1982, *ApJ*, 253, 101
- Kent, S. M., Dame, T. M., & Fazio, G. 1991, *ApJ*, 378, 131
- Kent, S. M. 1992, *ApJ*, 387, 181
- Kormendy, J. 1977, *ApJ*, 217, 406
- Lépine, J. R. D., & Leroy, P. 2000, *MNRAS*, 313, 263
- Lépine, J. R. D., Acharova, I. A., & Mishurov, Y. N. 2003, *ApJ*, 589, 210
- Lépine, J. R. D., Dias, W. S., & Mishurov, Y. 2008, *MNRAS*, 386, 2081
- Lépine, J. R. D., Roman-Lopes, A., Abraham, Z., Junqueira, T. C., & Mishurov, Y. N. 2011, *MNRAS*, 414, 1607
- Lépine, J. R. D., Cruz, P., Scarano, S., Jr., et al. 2011b, *MNRAS*, 417, 698
- Levine, E. S., Blitz, L., & Heiles, C. 2006, *Science*, 312, 1773
- Lin, C. C., & Shu, F. H. 1964, *ApJ*, 140, 64
- Lin, C. C., & Shu, F. H. 1966, *Proceedings of the National Academy of Science*, 55, 229
- Lin, C. C., Yuan, C., & Shu, F. H. 1969, *ApJ*, 155, 721
- Lynden-Bell, D., & Kalnajs, A. J. 1972, *MNRAS*, 157, 1

- Lynga, G., & Palous, J. 1987, *A&A*, 188, 35
- Ma, J., Peng, Q.-H., & Gu, Q.-S. 1998, *A&AS*, 130, 449
- Ma, J., Zhao, J. L., Shu, C. G., & Peng, Q. H. 1999, *A&A*, 350, 31
- Maciel, W. J., & Lago, L. G. 2005, *Rev. Mexicana Astron. Astrofis.*, 41, 383
- Marochnik, L. S., Mishurov, Y. N., & Suchkov, A. A. 1972, *Ap&SS*, 19, 285
- Martig, M., Bournaud, F., Croton, D. J., Dekel, A., & Teyssier, R. 2012, *ApJ*, 756, 26
- Martínez-García, E. E., & González-Lópezlira, R. A. 2013, *ApJ*, 765, 105
- Martos, M., Yañez, M., Hernandez, X., Moreno, E., & Pichardo, B. 2004, *Journal of Korean Astronomical Society*, 37, 199
- McMillan, P. J. 2011, *MNRAS*, 414, 2446
- Méndez-Abreu, J., Simonneau, E., Aguerri, J.A.L., Corsini, E.M. 2010, *A&A*, 521, A71
- Menessier, M. O., & Martinet, L. 1978, *A&A*, 65, 409
- Menessier, M. O., & Martinet, L. 1979, *A&A*, 75, 276
- Mermilliod, J.-C., Andersen, J., Nordstroem, B., & Mayor, M. 1995, *A&A*, 299, 53
- Mestel, L. 1963, *MNRAS*, 126, 553
- Minchev, I., & Quillen, A. C. 2006, *MNRAS*, 368, 623
- Minchev, I., Famaey, B., Combes, F., et al. 2011, *A&A*, 527, A147
- Mishurov, Y. N., Pavlovskaya, E. D., & Suchkov, A. A. 1979, *Soviet Ast.*, 23, 147
- Mishurov, Y. N., Zenina, I. A., Dambis, A. K., Mel'Nik, A. M., & Rastorguev, A. S. 1997, *A&A*, 323, 775
- Mishurov, Y. N., & Zenina, I. A. 1999, *A&A*, 341, 81
- Moore, T. J. T., Urquhart, J. S., Morgan, L. K., & Thompson, M. A. 2012, *MNRAS*, 426, 701

- Oh, S. H., Kim, W.-T., Lee, H. M., & Kim, J. 2008, *ApJ*, 683, 94
- Oort, J. H., Kerr, F. J., & Westerhout, G. 1958, *MNRAS*, 118, 379
- Palous, J. 1980, *A&A*, 87, 361
- Patsis, P. A., Contopoulos, G., & Grosbøl), P. 1991, *A&A*, 243, 373
- Patsis, P. A., Hiotelis, N., Contopoulos, G., & Grosbøl), P. 1994, *A&A*, 286, 46
- Patsis, P. A., Grosbøl), P., & Hiotelis, N., 1997, *A&A*, 323, 762
- Peng, Q.-H. 1988, *A&A*, 206, 18
- Pérez-Villegas, A., Pichardo, B., Moreno, E., Peimbert, A., & Velázquez, H. M. 2012, *ApJ*, 745, L14
- Pérez-Villegas, A., Pichardo, B., & Moreno, E. 2013, arXiv:1305.5847
- Pichardo, B., Martos, M., Moreno, E., & Espresate, J. 2003, *ApJ*, 582, 230
- Popova, M. É. 2006, *Astronomy Letters*, 32, 244
- R core Team. 2012, *R: A Language and Environment for Statistical Computing* ISBN 3-900051-07-0. R Foundation for Statistical Computing. <http://www.R-project.org/>
- Reid, M. J., & Brunthaler, A. 2004, *ApJ*, 616, 872
- Rix, H.-W., & Zaritsky, D. 1994, *Astronomy with Arrays, The Next Generation*, 190, 151
- Rix, H.-W., & Zaritsky, D. 1995, *ApJ*, 447, 82
- Russeil, D. 2003, *A&A*, 397, 133
- Salo, H., Laurikainen, E., Buta, R., & Knapen, J. H. 2010, *ApJ*, 715, L56
- Sanz-Serna, J. M., & Calvo, M. P. 1994, *Numerical Hamiltonian Problems* by J. M. Sanz-Serna, M. P. Calvo. ISBN 0412542900, 9780412542909 (HB). Published by Chapman & Hall, Universidade de Michigan, 1994.,
- Scarano, S., & Lépine, J. R. D. 2013, *MNRAS*, 428, 625
- Schombert, J. M., & Bothun, G. D. 1987, *AJ*, 93, 60

-
- Schönrich, R., Binney, J., & Dehnen, W. 2010, MNRAS, 403, 1829
- Seigar, M. S., & James, P. A. 1998, MNRAS, 299, 685
- Sellwood, J. A., & Binney, J. J. 2002, MNRAS, 336, 785
- Sellwood, J. A. 2011, MNRAS, 410, 1637
- Sellwood, J. A., & Sparke, L. S. 1988, MNRAS, 231, 25P
- Shen, J., Rich, R. M., Kormendy, J., et al. 2010, ApJ, 720, L72
- Sofue, Y., Honma, M., & Omodaka, T. 2009, PASJ, 61, 227
- Solway, M., Sellwood, J. A., & Schönrich, R. 2012, MNRAS, 422, 1363
- Stinson, G. S., Brook, C., Macciò, A. V., et al. 2013, MNRAS, 428, 129
- Struck, C., Dobbs, C. L., & Hwang, J.-S. 2011, MNRAS, 414, 2498
- Toomre, A. 1963, ApJ, 138, 385
- Toomre, A. 1964, ApJ, 139, 1217
- Toomre, A. 1969, ApJ, 158, 899
- Toomre, A. 1981, Structure and Evolution of Normal Galaxies, 111
- Young, P. J. 1976, AJ, 81, 807
- Zibetti, S., Charlot, S., & Rix, H.-W. 2009, MNRAS, 400, 1181

Apêndice

Apêndice A

Dedução do potencial espiral gaussiano

A Eq. A.1 descreve uma gaussiana em duas dimensões para $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$, igual nas duas direções

$$p(x, y) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{2\sigma^2}}. \quad (\text{A.1})$$

Vamos transformar a equação acima de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. O primeiro passo é dado pelas duas equações abaixo:

$$(x - x_0)^2 = R^2 \cos^2(\theta) - 2R R_0 \cos(\theta) \cos(\alpha) + R_0^2 \cos^2(\theta), \quad (\text{A.2})$$

$$(y - y_0)^2 = R^2 \sin^2(\theta) - 2R R_0 \sin(\theta) \sin(\alpha) + R_0^2 \sin^2(\theta), \quad (\text{A.3})$$

onde $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ é a posição da espiral logarítmica. Fixando o raio e olhando apenas para a variação angular, as Eqs. A.2 e A.3 podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$(x - x_0)^2 = R^2 \cos^2(\theta) - 2R^2 \cos(\theta) \cos(\alpha) + R^2 \cos^2(\theta), \quad (\text{A.4})$$

$$(y - y_0)^2 = R^2 \sin^2(\theta) - 2R^2 \sin(\theta) \sin(\alpha) + R^2 \sin^2(\theta). \quad (\text{A.5})$$

Somando essas duas equações e usando a lei dos cossenos, temos:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 2R^2[1 - \cos(\theta - \alpha)]. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo a Eq. A.6 na Eq. A.1, temos

$$p(R, \theta) = A e^{-\frac{R^2}{\sigma^2}[1 - \cos(\theta - \alpha)]}. \quad (\text{A.7})$$

Na equação acima o ângulo α descreve a espiral logarítmica, a qual define os braços espirais

$$\alpha = \frac{\ln(R/R_i)}{\tan(i)} + \gamma. \quad (\text{A.8})$$

Entretanto, a Eq. A.7 descreve apenas um braço. Contudo, ela pode ser facilmente generalizada para m braços, basta multiplicarmos o termo $(\theta - \alpha)$, dentro do cosseno na Eq. A.7, por m . Isso nos leva à equação final que descreve o potencial com m braços.

$$p_m(R, \theta) = A e^{\frac{-R^2}{\sigma^2} \{1 - \cos[m(\theta - \alpha)]\}}. \quad (\text{A.9})$$

Dedução da curva de rotação para um disco infinitesimal

Resolvemos aqui a equação de Laplace $\vec{\nabla}^2 \Phi_0 = 0$ sujeita às condições de contorno apropriadas no disco e no infinito. Em coordenadas cilíndricas, a equação de Laplace fica:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi_0}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Aplicando o método de separação de variáveis, escrevendo $\Phi_0(R, z) = J(R)Z(z)$ e fazendo algumas considerações a respeito das condições de contorno, temos:

$$\frac{1}{J(R)R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dJ}{dR} \right) = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2, \quad (\text{B.2})$$

onde k é um número arbitrário real ou complexo. Assim,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z(z) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dJ}{dR} \right) + k^2 J(R) = 0. \quad (\text{B.4})$$

A Eq. B.3 pode ser imediatamente integrada,

$$Z(z) = Z_0 e^{\pm kz}, \quad (\text{B.5})$$

onde Z_0 é uma constante. A Eq. B.4 é simplificada se fizermos a substituição $u = kR$. Uma vez feita essa substituição, a solução para essa equação é a chamada função cilíndrica de Bessel de ordem zero, $J_0(\mu) = J_0(kR)$. Utilizando esses resultados, temos que as funções

$$\Phi_{0\pm}(R, z) = e^{\pm kz} J_0(kR), \quad (\text{B.6})$$

são soluções de $\vec{\nabla}^2 \Phi_0 = 0$.

Considerando a função:

$$\Phi_k(R, z) = e^{-k|z|} J_0(kR), \quad (\text{B.7})$$

onde k é real e positivo. $\Phi_k \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$ e, além disso, $\Phi_k \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Assim, Φ_k satisfaz todas as condições requeridas pelo potencial gerado por uma distribuição de densidades isolada: Φ_k é solução de $\vec{\nabla}^2 \Phi_0 = 0$ tanto para $z > 0$ como para $z < 0$. Porém, existe uma dificuldade em $z = 0$, pois o gradiente sofre uma descontinuidade, não satisfazendo assim a equação de Laplace. Contudo, podemos contornar este problema utilizando o teorema de Gauss para avaliar a densidade superficial $\Sigma_k(R)$ da fina camada de distribuição de densidade que produz esta descontinuidade. Se integremos ambos os lados da equação de Poisson sobre um certo volume que contém uma massa M , e então aplicarmos o teorema da divergência, obtemos

$$\begin{aligned} \int \vec{\nabla}^2 \Phi d^3V &= \int \vec{\nabla} \cdot \Phi d^2S = 4\pi G \int \rho d^3V = 4\pi GM, \\ \left(\frac{d\Phi}{dz} \Big|_{z \rightarrow +0} - \frac{d\Phi}{dz} \Big|_{z \rightarrow -0} \right) &= -2kJ_0(kR) = 4\pi G \Sigma_k(R). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ou seja,

$$\Sigma_k(R) = \frac{-kJ_0(kR)}{2\pi G}, \quad (\text{B.9})$$

que representa a densidade superficial. Agora temos que encontrar uma função $S(k)$, tal que:

$$\Sigma(R) = \int_0^\infty S(k) \Sigma_k(R) dk = -\frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty k J_0(kR) S(k) dk, \quad (\text{B.10})$$

onde $S(k)$ é a transformada de Hankel de $(-2\pi G \Sigma)$. Transformadas de Hankel têm propriedades muito similares às transformadas de Fourier. Em particular, elas podem ser invertidas como mostram as equações abaixo,

$$\begin{aligned}
 g(k) &= \int_0^\infty f(k)J(kR)RdR \\
 , f(r) &= \int_0^\infty g(k)J(kR)gdk
 \end{aligned}
 \tag{B.11}$$

Assim, a Eq. B.10 pode ser invertida:

$$S(k) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR)\Sigma(R)RdR.
 \tag{B.12}$$

A função que determina o potencial gravitacional para o disco será

$$\Phi(R, z) = \int_0^\infty S(k)\Phi_k(R, z)dk = \int_0^\infty S(k)J_0(kR)e^{-k|z|}dk.
 \tag{B.13}$$

Substituindo a Eq. B.12 em B.13, obteremos finalmente o potencial do disco dado por:

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR)e^{-k|z|}dk \int_0^\infty J_0(kR')\Sigma(R')R'dR'.
 \tag{B.14}$$

Como já mencionamos, a velocidade circular do disco $V_d(R)$ é uma quantidade em que estamos interessados. Fazendo $z = 0$ em B.13, diferenciando ambos os lados e usando a identidade $dJ_0(x)/dx = -J_1(x)$, obtemos

$$V_d^2(R) = -R \int_0^\infty S(k)J_1(kR)kdk.
 \tag{B.15}$$

Apesar de termos obtido $V_d(R)$ na equação acima, ainda falta sabermos a função distribuição $S(k)$, que por sua vez depende da densidade $\Sigma(R)$. Adotando que a densidade do disco tenha a forma exponencial $\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d}$, como já discutimos em 3.3, derivamos que $S(K)$ para um disco exponencial assume a forma de:

$$S(k) = -\frac{2\pi G \Sigma_0 R_d^2}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}}.
 \tag{B.16}$$

Substituindo essa expressão em B.15 e integrando, chegamos à equação final para velocidade de rotação do disco:

$$V_d^2(R) = 2GM_d y^2 [I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)],
 \tag{B.17}$$

onde I_n e K_n são funções modificadas de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, $y = R/(2R_d)$ e M_d é a massa total do disco dada por

$$M_d = 2\pi\Sigma_0 R_d^2. \quad (\text{B.18})$$