

Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Geofísica

Tatiana Arenas Suárez

**Resfriamento de corpos intrusivos no interior da crosta
continental: o efeito da liberação do calor latente**

Orientador: Prof. Dr. Fernando Brenha Ribeiro

São Paulo
2017

Tatiana Arenas Suárez

**Resfriamento de corpos intrusivos no interior da crosta
continental: o efeito da liberação do calor latente**

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Geofísica

Orientador: Prof. Dr. Fernando Brenha Ribeiro

São Paulo
2017

Abstract

The purpose of this work is to study the thermal evolution of intrusive bodies formed by successive sills injection in different levels of the crust, taking into account the phase change and latent heat release in a finite temperatures interval. Our numerical models involve heat transfer only by conduction. Thermal evolution of the system is found with the energy balance equation of enthalpy that includes phase and composition change of magmas. The thermal evolution of the basaltic igneous body intruded into the lower crust is evaluated using finite difference scheme. At this level of the crust we develop two different ways of igneous body construction: over-accretion and under-accretion. Over-accretion is the more efficient way for keeping high temperatures in the time. In the upper crust, the thermal evolution of a tonalite igneous body formed by successive sills injection is computed with finite elements method in a geometry with rotational symmetry about z axis. Thermal and geological development of this igneous bodies strongly depends on magma emplacement rate and magma and crust thermal properties. These features defines if the igneous body develops in a magmatic chamber, a melt reservoir or a high crystalline body. In the second part of this work we examine heat transfer from magmatic chambers of different geometries into the country rock, solving the enthalpy equation with latent heat release effects with finite element method. The magmatic chambers geometries constructed are oblate spheroid, prolate spheroid and spherical. The viscosity of the rock is also obtained from temperature field.

Keywords: Magmatic chamber, igneous bodies, heat transfer, sill accretion.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar a evolução térmica de corpos intrusivos em diferentes níveis da crosta formados por múltiplas injeções de magma em forma de sils, levando em consideração mudança de fase e liberação de calor latente em um intervalo finito de temperaturas. A análise proposta inclui o estudo dos modelos de transferência de calor puramente condutivos utilizando a equação da evolução da entalpia que integra a mudança composicional dos magmas. A evolução térmica do corpo ígneo gerado por introdução do magma basáltico através de sils na crosta inferior obtém-se usando o método das diferenças finitas em uma dimensão, além disso se desenvolvem duas formas de construção do corpo ígneo neste nível: acréscimo por cima e acréscimo por baixo, sendo o primeiro caso o mais eficiente em manter o sistema a temperaturas elevadas durante mais tempo. Na crosta superior a evolução térmica do corpo ígneo de composição próxima ao tonalito introduzido por meio de sils é resolvida em duas dimensões com o método dos elementos finitos utilizando uma geometria com simetria axial no eixo z . O desenvolvimento destes corpos depende do ritmo de acréscimo do magma e das propriedades térmicas tanto da crosta como do magma injetado, podendo desenvolver-se como uma câmara magmática, um repositório de fusão ou um corpo altamente cristalino. A segunda fase do trabalho consistiu na solução da equação de condução de calor com mudança de estado em câmaras magmáticas esféricas, esferóides oblatos e esferóides prolatos com o método de elementos finitos para analisar evolução do sistema crosta-câmara magmática e introduzir o estudo da variação da viscosidade em função da temperatura. A geometria da câmara magmática influencia fortemente os fluxos de calor à crosta e portanto a criação de um halo dúctil que pode afetar a estabilidade dela mesma.

Palavras chave: Câmaras magmáticas, corpos ígneos, acréscimo por sils, evolução térmica.

*A la unidad motora de mi universo, Mi Familia:
Margarita, William, Karla y Alejandro.*

“Impossível? A maioria das coisas “impossíveis” são impossíveis apenas porque não foram tentadas. Quanta coisa você não faz apenas por timidez ou medo... Você já experimentou pintar paredes? Pois, acredite ou não, não é necessário tirar “curso” (só um curso de “confiança-em-si-mesma” ajudaria, pois confiança é o que lhe falta). A tinta, você compra. O pincel, também. A parede, você tem. E duas mãos também. Por incrível que pareça, você é dona dos instrumentos necessários. O que falta mais? Um pouco de ousadia e vontade de se divertir. (E de economizar).”

– Clarice Lispector, *Só para Mulheres*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Fernando Brenha Ribeiro por toda a paciência, ajuda oferecida e por acreditar no meu trabalho, meu mais sinceros agradecimentos.

Ao Brasil por me ter dado esta grande oportunidade, estou profundamente agradecida por me abrir suas portas sem receios.

Aos professores e companheiros do IAG, obrigada por me ajudar a encontrar o caminho para alcançar o sonho da geofísica.

Agradezco especialmente a mis padres, Margarita y William, desde la tierra y en el infinito, nunca me dejaron desfallecer en esta difícil etapa de mi vida a través de sus enseñanzas, consejos y recuerdos. También a mis hermanos Karla y Alejandro por su gran cariño y a toda mi familia que nunca se olvidaron de mi.

Agradeço profundamente ao Andrés pela grande paciência, apoio, conselhos e carinho oferecidos neste tempo no Brasil.

Agradeço à ajuda de Gustavo pelos conselhos acadêmicos que me ajudaram a desenvolver esta dissertação.

A meus amigos Karol Ramírez, Hamilton Trejos, Ana Paula Trindade, Sebastian Valencia e Dayana Silva, e outras pessoas que me ajudaram para chegar até o final. Obrigada por estar presentes sempre ao meu lado.

Agradeço o suporte financeiro da agencia CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

Conteúdo

	Pagina
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Figuras	xv
1 Introdução	1
2 Termodinâmica	3
2.1 Transferência de calor equações fundamentais	4
2.1.1 A equação de calor na presença de mudança de estado	6
2.1.2 Soluções da equação de calor para intrusões magmáticas	7
3 Formação de corpos intrusivos por múltiplas injeções de magma	11
3.1 Conceitos gerais na formação de sistemas ígneos	12
3.2 Formação de corpos intrusivos por múltiplas injeções de magma na crosta inferior (modelo 1D)	12
3.2.1 Resultados	17
3.3 Formação de corpos intrusivos por múltiplas injeções de magma na crosta superior (modelo 2D)	24
3.3.1 Resultados	28
4 Modelo do grande tanque	37
4.1 Modelo de resfriamento de câmaras magmáticas	38
4.1.1 Resultados	41
5 Conclusões	49
A Apêndice A	51
A.1 Método das diferenças finitas	51
A.2 Método dos elementos finitos	55
A.2.1 Fluxograma para a construção de um corpo ígneo por meio de acréscimo de sils	57

B Apêndice B	59
Referências Bibliográficas	61

Lista de Tabelas

Tabela	Pagina
3.1 Parâmetros utilizados no modelo 1D de formação de corpos ígneos.	16
3.2 Parâmetros utilizados no modelo 2D de formação de corpos ígneos.	27
4.1 Dimensões das câmaras magmáticas de volume 130,89 km ³	39
4.2 Parâmetros utilizados na fórmula de Arrhenius.	40
4.3 Tempo de resfriamento para diferentes geometrias e profundidades do topo da câmara magmática.	41

Lista de Figuras

Figura	Pagina
2.1 fração cristalizada como função da temperatura a pressão constante para basalto. Imagem modificada de Jaupart and Mareschal (2010).	5
2.2 Acima, condições iniciais para a intrusão de magma, de dimensão $2b$ e temperatura T_f , na rocha encaixante de dimensão infinita e temperatura uniforme T_0 . Na figura inferior se mostra evolução da temperatura em um tempo $t = t'$, a temperatura na rocha encaixante aumenta por efeito da liberação do calor latente na fronteira de solidificação.	8
2.3 Mudança de estado de uma substancia não pura.	10
3.1 Modelo geral para as múltiplas injeções de magma na crosta superior.	13
3.2 Fração de fusão vs. Temperatura para basaltos, pressão de 1.2 GPa e conteúdos iniciais de H_2O em massa de 5%,3,8%, 2,5% e 1,5%. A figura foi extraída de Annen et al. (2006).	14
3.3 Fração de fusão vs. Temperatura para grauvaca, A figura foi extraída de Annen et al. (2006).	15
3.4 Evolução térmica da formação de um corpo ígneo a partir de basalto andesítico com 1,5wt% H_2O . (a) e (b) Evolução no tempo da Geoterma. (c) e (b) Evolução da temperatura do corpo ígneo através de diferentes sils. (e) e (f) Evolução de fração de fusão do corpo ígneo através de diferentes sils.	18
3.5 Evolução térmica da formação de um corpo ígneo a partir de basalto andesítico com 2,5 wt% H_2O . (a) e (b) Evolução no tempo da Geoterma. (c) e (b) Evolução da temperatura do corpo ígneo através de diferentes sils. (e) e (f) Evolução de fração de fusão do corpo ígneo através de diferentes sils.	19
3.6 Evolução térmica da formação de um corpo ígneo a partir de basalto andesítico com 3,8 wt% H_2O . (a) e (b) Evolução no tempo da Geoterma. (c) e (b) Evolução da temperatura do corpo ígneo através de diferentes sils. (e) e (f) Evolução de fração de fusão do corpo ígneo através de diferentes sils.	20

3.7	Evolução térmica da formação de um corpo ígneo a partir de basalto andesítico com 5,0 wt% H ₂ O . (a) e (b) Evolução no tempo da Geoterma. (c) e (b) Evolução da temperatura do corpo ígneo através de diferentes sils. (e) e (f) Evolução de fração de fusão do corpo ígneo através de diferentes sils.	21
3.8	Detalhes da evolução inicial da temperatura e da fração de fusão para 1,5 wt% H ₂ O .	22
3.9	Evolução da fração de fusão ao longo da crosta com AC para magmas com (a) 5,0 wt% de H ₂ O (b) 3,8 wt% H ₂ O .)	23
3.10	Condições iniciais e de fronteira para o modelo de acréscimo de corpos ígneos em duas dimensões (a) Dimensões do sistema (b) Condições de fronteira e iniciais.	25
3.11	Fração de fusão como função da temperatura a pressão constante para tonalito. A Figura foi extraída de (Annen et al., 2008).	26
3.12	Malha gerada por FreeFem ++ para o modelo em duas dimensões para a formação de um corpo ígneo por múltiplas injeções de magma.	27
3.13	Evolução da temperatura na formação de um corpo ígneo em duas dimensões a um ritmo de 0.1 m/ano e com uma composição da crosta de grauvaca e do magma de tonalito.	29
3.14	Evolução da fração de fusão ao longo do tempo para uma câmara magmática e rocha encaixante de tonalito.	30
3.15	Tempos de incubação para diferentes frações de fusão para a injeção de magma de tonalito em uma crosta de grauvaca.	31
3.16	Evolução da temperatura na formação de um corpo ígneo em duas dimensões a um ritmo de 0,1 m/ano e com uma composição uniforme de tonalito.	33
3.17	Tempos de incubação para diferentes frações de fusão para uma Crosta e magma injetado de tonalito.	34
4.1	Parâmetros geométricos das câmaras magmaicas, esférica (a), oblata (b) e prolata (c) e condições iniciais e de contorno impostas sobre os limites da crosta superior. O perfil A corresponde a um afastamento horizontal do centro das câmaras magmaticas, o perfil B corresponde ao eixo de do rotação das figuras plata ou eixo de simetria das câmaras.	38
4.2	Valores da viscosidade das rochas da crosta superior segundo o modelo de Arrhenius e um gradiente geotermico de 20 °C/km	39
4.3	Variação da temperatura e da viscosidade para o sistema câmara magmática esférica-crosta ao longo do eixo de simetria (perfil B) e do eixo horizontal (perfil A) como função do tempo desde o início do resfriamento da câmara magmática até sua cristalização completa. A coluna da esquederra cooresponde ao topo da câmara de 10 km de profundidade e a coluna da direita corresponde ao topo da câmara a 5 km de profundidade. A linha vertical cinza mostra o limite entre a câmara magmática (CM) e a rocha encaixante (RE).	43

4.4	Variação da temperatura e da viscosidade para o sistema câmara magmática oblata-crosta ao longo do eixo de simetria (perfil B) e do eixo horizontal (perfil A) como função do tempo desde o início do resfriamento da câmara magmática até sua cristalização completa. A coluna da esquerda cooresponde ao topo da câmara de 10 km de profundidade e a coluna da direita corresponde ao topo da câmara a 5 km de profundidade. A linha vertical cinza mostra o limite entre a câmara magmática (CM) e a rocha encaixante (RE).	44
4.5	Variação da temperatura e da viscosidade para o sistema câmara magmática prolata-crosta ao longo do eixo de simetria (perfil B) e do eixo horizontal (perfil A) como função do tempo desde o início do resfriamento da câmara magmática até sua cristalização completa. A coluna da esquerda cooresponde ao topo da câmara de 10 km de profundidade e a coluna da direita corresponde ao topo da câmara a 5 km de profundidade. A linha vertical cinza mostra o limite entre a câmara magmática (CM) e a rocha encaixante (RE).	45
4.6	As figuras da coluna direita apresentam a distribuição da temperatura no proceso de resfriamento das câmaras magmáticas introduzidas nos 10 km de profundidade, a coluna esquerda apreenta a distribuição da fração de fusão na câmara magmática no mesmo instante.	46
4.7	Valores da temperatura e da viscosidade nos pontos 1, 2 e 3 no momento de sua cristalização completa para (a) câmara magmatica esferica, (b) câmara magmática oblata e (c) câmara magmática prolata.	47
A.1	Discretização do domínio espacial e temporal do problema de transferência de calor para una rocha. O eixo x representa a extensão espacial do corpo, enquanto o eixo y representa o domínio espacial do desenvolvimento do problema.	53
A.2	Esquema de modelo implícito	54
A.3	Sistema de equações das diferenças finitas para o sistema magma -rocha encaixante.	55
A.4	Malha gerada por FreeFem++ para o problema axissimetrico da câmara magmática esférica.	58
A.5	Fluxograma para a construção de um corpo ígneo por meio de acréscimo de sils.	58

Introdução

Ao longo da crosta terrestre os processos magmáticos transportam calor proveniente do manto, criam e modificam as rochas que conformam os continentes e controlam a evolução vulcânica na superfície. O centro da atividade destes processos são os reservatórios de magma na crosta superior e inferior que funcionam como grandes máquinas térmicas onde ocorre a diferenciação magmática dos basaltos provenientes do manto superior. O magma que atinge a crosta superior pode formar reservatórios que evoluem a corpos totalmente cristalizados como plutons e batólitos ou corpos parcialmente fundidos como câmaras magmáticas que podem alimentar a atividade vulcânica.

A evidência geocronológica e petrológica dos corpos plutônicos expostos apontam que a maioria dos corpos ígneos são formados a partir do amalgamento ou acréscimo de sils e diques durante longos períodos de tempo. Com este mecanismo de formação se tem modelado todo tipo de reservatórios de magmáticos através da crosta inferior e superior. O interesse principal destes modelos é calcular os efeitos dos ritmos de introdução do magma no sistema magmático, dado que, esta característica define como é o desenvolvimento geotérmico, geoquímico e geológico do corpo ígneo em construção e da rocha encaixante. Por exemplo, diferentes ritmos de acreção do magma na crosta superior podem desenvolver vulcanismo ou plutonismo.

Este modelo têm tido um longo desenvolvimento. Inicialmente se utilizou para estudar a formação das localidades na crosta inferior onde ocorrem os processos de diferenciação magmática dos magmas máficos provenientes do manto que evoluem a composições mais félsicas (Annen et al., 2006; Solano et al., 2012). Depois se utilizou para modelar a criação de câmaras magmáticas na crosta superior cujo conteúdo de magma parcialmente fundido pudesse alimentar a atividade vulcânica ou ao contrario formasse corpos ígneos como plutons (Annen, 2009; Gelman et al., 2013). Porém este último modelo não têm sido comprovado com observações geofísicas, já que

câmaras magmáticas do tamanho sugerido por estes não tem sido monitoradas na crosta superior (Lundstrom and Glazner, 2016). Pelo contrario tem sido observadas na crosta inferior das grandes zonas vulcânicas. Para solucionar este enigma, hoje em dia se propõe um modelo de sistema de introduções magmáticas do tamanho da crosta inteira chamado de "sistema magmático transcrostal"(Sparks and Cashman, 2017; Karakas et al., 2017), onde as câmaras magmáticas da crosta superior não precisam de ter grandes tamanhos para alimentar grandes erupções vulcânicas.

Neste trabalho se estuda os fundamentos e conceitos da criação de corpos ígneos através de múltiplas injeções de magma na crosta inferior e superior dando maior atenção nos aspetos térmicos da cristalização do magma, e a exploração as ferramentas computacionais para a simulação de modelos numéricos para a quantificação desses processos.

O capítulo 2 apresenta uma revisão dos fundamentos da transferência de calor utilizados para descrever a evolução térmica de sistemas magmáticos com mudança de estado em um intervalo finito de temperaturas, junto com um resumo da solução problema clássico de Stefan para o resfriamento de sils.

No Capítulo 3, foram desenvolvidos modelos de condução de calor com mudança de estado para simular o acréscimo de corpos ígneos no interior da crosta continental. O modelo na crosta inferior é unidimensional e foi desenvolvido com o método das diferenças finitas. Enquanto os modelos desenvolvidos para a crosta superior foi utilizado o método dos elementos finitos para representar o acréscimo de corpos tabulares com simetria axial.

No capítulo 4 foram desenvolvidos modelos simples de resfriamento de câmaras magmáticas com as geometrias mais frequentemente observadas na crosta superior : esfera, esferóide oblato e esferóide prolato. Estes modelos com simetria axial foram feitos com o método dos elementos finitos.

Termodinâmica

Desde meados do século XX têm sido propostos diferentes modelos de resfriamento de corpos ígneos com mudança de estado e efeito da liberação de calor latente. As primeiras aproximações foram propostas em Larsen (1945) e Jaeger (1957), este último utilizando a formulação do problema de Stefan ou problema de fronteira móvel de mudança de estado em uma dimensão. Neste tipo de solução a transição de estado ocorre em uma única temperatura. Os modelos mais complexos desenvolvidos a partir da década dos 80 resolvem as equações de conservação do momento, energia e massa fazendo ênfase no fenômeno de convecção (e.g. Martin, 1988; Huppert, 1988; Raia, 1997; Dufek, 2005; Ulvrová, 2012).

O uso das sequências de cristalização do magma nas equações de condução de calor dependente do tempo para o resfriamento de corpos ígneos, permitiu desenvolver modelos simples e mais realistas para substâncias com mais de uma componente que cristalizam em uma faixa de temperaturas (Marsh, 1981; Bergantz, 1989). Os modelos recentes que utilizam esta técnica são aqueles que descrevem o desenvolvimento de corpos ígneos através de múltiplas intrusões de magma com o objetivo de estudar a evolução petrológica e reológica de corpos diferenciados e a criação de câmaras magmáticas que alimentam erupções vulcânicas (Annen et al., 2006; Annen, 2009; Gelman et al., 2013). A integração destas técnicas além do desenvolvimento de software especializado para a solução de sistemas de multifásicos têm chegado a modelos termo petrográficos complexos (e.g. Bea, 2010). Neste capítulo serão descritos os fundamentos termodinâmicos dos modelos desenvolvidos ao longo da dissertação.

2.1 Transferência de calor equações fundamentais

O calor é a energia que é transferida espontaneamente de um corpo a uma temperatura T para um corpo com temperatura T_0 menor ($T > T_0$). Esta energia é chamada de entalpia (H_t) para um sistema sob pressão P constante que absorve ou libera calor. Considerando um sistema que muda de temperatura ($\Delta T = T_2 - T_1$) sem mudar seu estado a variação da entalpia por unidade de massa é dada por

$$H_t = \rho \int_{T_1}^{T_2} c_p dT, \quad (2.1)$$

onde c_p é o calor específico a pressão constante do material ρ a densidade, que normalmente variam em função da temperatura. Esta expressão também é conhecida como calor sensível. Se adicionalmente o sistema muda de estado se libera ou absorve energia na forma de calor latente. As substâncias puras como água mudam de estado a temperatura constante, o que quer dizer, liberam ou absorvem calor latente em uma única temperatura na qual coexistem duas fases, por exemplo, enquanto um volume de gelo estiver em fusão coexistirão o sólido e o líquido na temperatura de fusão T_f . Neste caso a variação da entalpia por unidade de volume é dada por

$$\Delta H_{\text{latente}} = \rho' L \quad (2.2)$$

onde L é o calor latente de fusão e ρ' é a densidade do material em processo de fusão. As substâncias não puras desde ponto de vista químico, como por exemplo a maioria das rochas, não mudam de estado a uma temperatura de fusão fixa. Por sua vez o processo de fusão ocorre em um intervalo finito de temperaturas. A forma como o calor latente é liberado ou absorvido em um processo de solidificação ou fusão em um sistema polifásico é complicado. Depende da proporção de líquido e de sólido presente durante o processo de mudança de estado, e da concentração das componentes, e pode não depender da forma linear da temperatura.

Existe, na literatura, uma série de modelos simplificados para descrever de forma aproximada a liberação de calor latente em sistemas com mais de uma componente. Os modelos mais simples não consideram as mudanças composicionais do fluido residual da cristalização ou solidificação, nem mesmo as concentrações das componentes do sistema durante o processo de mudança de estado o que faz com que o calor latente L seja constante.

Na Figura 2.1 se mostra esquematicamente o diagrama de a fração cristalizada ou sólida do sistema como função da temperatura a pressão constante para basalto. O diagrama está dividido em três regiões, uma região onde a substância está totalmente em estado sólido, uma região onde está totalmente fundida, e uma região onde líquido e sólido coexistem. A temperatura na qual começa o aparecimento de fluido é chamada de solidus, abaixo dessa temperatura todo o calor entregue é absorvido em forma de calor sensível até atingir a temperatura de solidus. Nessa temperatura o processo de fusão passa a absorver parte do calor entregue para produzir uma

quantidade de líquido que aumenta conforme aumenta a temperatura. Quando toda a substância absorve suficiente calor para atingir o totalmente o estado líquido se chega à temperatura de liquidus. Acima de dessa temperatura o fluido absorve energia em forma de calor sensível.

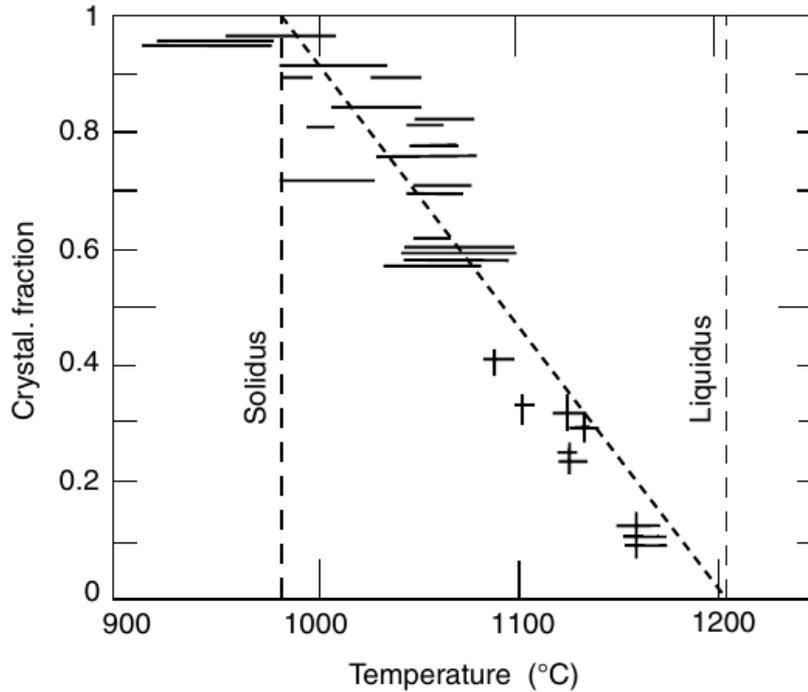


Figura 2.1. fração cristalizada como função da temperatura a pressão constante para basalto. Imagem modificada de Jaupart and Mareschal (2010).

A fração cristalizada na mistura líquido-sólido se expressa em geral em termos de fração de massa. A fração de sólido f_s é definida como :

$$f_L = \frac{\text{massa de sólido}}{\text{massa de líquido} + \text{massa de sólido}}, \quad (2.3)$$

e a fração de fusão é definida de forma análoga ($f_L + f_S = 1$). Portanto f_s é igual a um na temperatura de solidus diminuindo até zero à temperatura liquidus. Na maioria dos modelos se considera que a fração de sólido f_s depende linearmente da temperatura no intervalo de cristalização:

$$f_s = \frac{T_{\text{Liquidus}} - T}{T_{\text{Liquidus}} - T_{\text{Solidus}}}, \quad (2.4)$$

o que corresponde à liberação ou absorção do calor latente de forma uniforme no intervalo $T_{\text{solidus}} < T < T_{\text{liquidus}}$. Esse tipo aproximação é aceitável quando se estuda um sistema em

processo de mudança de estado no seu conjunto.

Em modelos onde é importante encontrar as mudanças composicionais provocados pela cristalização e precipitação de mineral no magma são geralmente utilizados sistemas de dois componentes ou fases miscíveis, tanto no estado sólido como em estado líquido. Nesses modelos a fase líquida pode escrita como uma fração do sólido na solução. Neste caso, o calor latente não é liberado uniformemente através do intervalo de cristalização.

Esses modelos consideram que a liberação do calor latente é função da fração de sólido f_s , ou de líquido, presente na mistura líquido-sólido presente a uma temperatura T , na forma

$$\Delta H_{\text{Latente}} = \rho' f_s(T)L. \quad (2.5)$$

À variação de entalpia associada à liberação de calor latente, se soma a variação de calor sensível da mistura líquido-sólido e a variação total de entalpia por unidade de volume passa a ser escrita como:

$$H_t = \rho \int_{T_1}^{T_2} (\rho c_p) dT + \rho' f_s(T)L, \quad (2.6)$$

aqui é a capacidade térmica volumétrica da mistura e ρ' é a densidade do material em processo de mudança de estado (o sólido no caso de fusão ou o líquido no caso de solidificação) na temperatura T .

Existem também modelos que expressam a fração de cristalização em função da posição no interior da mistura líquido sólido (Alexiades and Solomon, 1993) ou do tempo em que o processo de mudança de estado se processa (referências). No que segue a fusão das rochas, que de uma forma geral são sólidos polifásicos, ou sólidos com mais de duas componentes, será representada ou por processos que ocorrem a uma temperatura fixa, ou por processos que ocorrem em um intervalo finito de temperaturas representados por modelos simples, tais como os que acabam de ser descritos.

2.1.1 A equação de calor na presença de mudança de estado

O balanço do calor e a evolução da temperatura de um sistema termodinâmico que não muda de estado pode ser descrito pela equação da evolução da entalpia ou conservação da energia,

$$-\nabla \vec{q} + F = \frac{\partial(H_t)}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.7)$$

onde \vec{q} é o vetor fluxo de energia ou fluxo de calor que é dado pela lei de Fourier que quantifica o calor que atravessa uma unidade de área por unidade de tempo, que é proporcional ao gradiente de temperatura,

$$\vec{q} = -k\nabla T, \quad (2.8)$$

onde F pode ser uma fonte de calor. Se F for positivo, as fontes fornecem calor para o meio e se F for negativo as fontes retiram calor do meio. A combinação dessas duas equações leva à equação de condução de calor,

$$\nabla \cdot (k\nabla T) + F = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Se a condutividade térmica k , for constante no meio,

$$k\nabla^2 T + F = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Quando ocorre uma mudança de estado em um intervalo finito de temperaturas, a equação de condução de calor, escrita para a mistura líquido-sólido, ou seja, para a região onde $T_{\text{solidus}} < T < T_{\text{liquidus}}$, deve ser modificada. No caso de modelos de mudança de estado simplificados, por exemplo, os representados pela equação 2.4, a equação de condução de calor é modificada na forma:

$$-\nabla \vec{q} + F = \frac{\partial(H_t)}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho L \frac{\partial f_s}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.11)$$

ou no caso de transferência exclusivamente por condução de calor,

$$\nabla \cdot (k\nabla T) + F = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho L \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (2.12)$$

onde $\frac{\partial f_s}{\partial t}$ é a derivada total de f_s no tempo. Se a condutividade térmica k , for constante no meio:

$$k\nabla^2 T + F = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho L \frac{\partial f_s}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Nesta equação os termos da direita representam a variação local de temperatura enquanto os termos da esquerda o primeiro termo representa a difusividade e o segundo termo representa as fontes ou sumidouros de calor.

2.1.2 Soluções da equação de calor para intrusões magmáticas

A primeira aproximação da solução do problema de transferência de calor com mudança de estado é conhecido como o problema de Stefan ou problema de fronteira móvel dependente do tempo. Este tipo de problema assume que a mudança de estado ocorre a uma temperatura bem definida,

de modo que, se pode estabelecer uma fronteira de solidificação determinada como uma função do espaço e do tempo. As soluções analíticas do problema de Stefan são limitadas e dependem das condições iniciais do sistema, de modo que, mostramos um dos problemas mais simples em uma dimensão e uma única fase que pode ser aplicado para o caso de *sils* ou *diques* (Alexiades and Solomon, 1993; Turcotte and Schubert, 2014). Problemas de uma única fase são problemas onde um líquido na temperatura de fusão se solidifica. Como se mostra na Figura 2.2, um pulso de magma com dimensão $2b$ é introduzido a sua temperatura de liquidus, T_f , na rocha encaixante de dimensão infinita e temperatura uniforme, T_0 . Por simplicidade as propriedades térmicas, ρ, c_p, K, κ são iguais para o magma cristalizado e a rocha encaixante. A posição inicial da fronteira entre o líquido e o sólido está em $x = 0$, e se desenvolve como função do tempo $x = X(t)$.

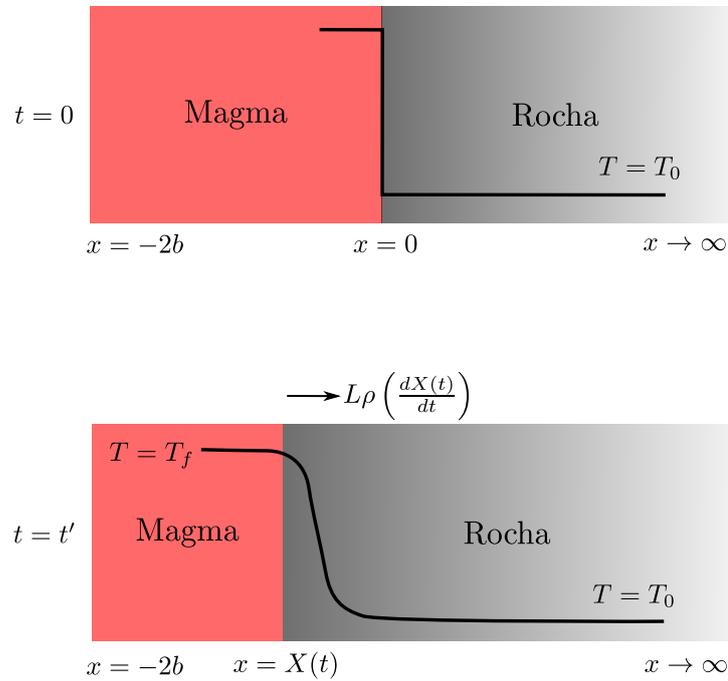


Figura 2.2. Acima, condições iniciais para a intrusão de magma, de dimensão $2b$ e temperatura T_f , na rocha encaixante de dimensão infinita e temperatura uniforme T_0 . Na figura inferior se mostra evolução da temperatura em um tempo $t = t'$, a temperatura na rocha encaixante aumenta por efeito da liberação do calor latente na fronteira de solidificação.

A evolução da temperatura para o domínio $x > X(t)$, porção sólida do sistema, satisfaz a equação de condução de calor dependente do tempo (2.10). A liberação do calor latente na fronteira móvel é estabelecida por a condição de fronteira,

$$\rho L \frac{dX}{dt} = k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.14)$$

conhecida como condição de Stefan. A condição de stefan indica que o calor latente, ρL , liberado na cristalização equivale ao fluxo de calor através da interface. Este calor flui para o material sólido

causando que sua temperatura aumente perto da fronteira de solidificação, mas a temperatura T_0 da rocha permanece inalterada em pontos muito afastados da interface. A temperatura na fronteira de cristalização, $X(t)$, é constante e equivalente a $T = T_f$. O uso das equações (2.10) e (B.1) substituem o uso da equação (2.13) para a mudança de estado em uma substância pura. A solução das equações¹ (2.10) e (B.1) é,

$$T(x, t) = T_0 - \left((T_m - T_0) \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)}{\operatorname{erfc}(-\lambda)} \right), \quad (2.15)$$

que representa a evolução espaço temporal da temperatura no domínio $X(t) < x < \infty$, enquanto o avanço temporal do frente de cristalização,

$$X(t) = -2\lambda\sqrt{\kappa t}, \quad (2.16)$$

onde λ é uma constante que deve ser encontrada com a equação (B.1); para achar o termo $\frac{dX}{dt}$ se deriva a equação (2.16),

$$\frac{dX}{dt} = -\lambda \left(\frac{\kappa}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.17)$$

e para achar o termo $\frac{\partial T}{\partial x}$ se deriva a equação (2.15)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-(T_f - T_0)}{(\pi\kappa t)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-\lambda^2}}{(1 + \operatorname{erf}(\lambda))}. \quad (2.18)$$

Substituindo as equações (2.17) e (2.18) na (B.1) e definindo o numero de Stefan como

$$St = \frac{c(T_f - T_0)}{L}, \quad (2.19)$$

obtém-se

$$\frac{\sqrt{\pi}}{St} = \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda(1 + \operatorname{erf} \lambda)}, \quad (2.20)$$

sendo esta uma equação transcendental para achar λ . Para cada valor de $St > 0$ existe uma única solução λ , que pode ser calculada iterando o lado direto da equação ou representando graficamente em função de λ como é mostrado na Figura 2.2.

¹O procedimento matemático completo para chegar as equações (2.15) e (2.16) e apresentado no apêndice B.

É importante ressaltar que na solução do problema de Stefan o magma cristaliza em uma única temperatura na fronteira móvel, situação que não é real, pois o magma é composto por múltiplas fases minerais que se cristalizam ou fundem a diferentes temperaturas, portanto, libera ou absorve calor latente em uma faixa de temperaturas. No processo de resfriamento do magma o líquido se cristaliza gradualmente e desenvolve uma região parcialmente solidificada chamada de zona pastosa (o termo pastoso está sendo utilizado aqui no lugar do termo em inglês “mushy”). Esta zona se torna rígida quando a cristalinidade está em torno de 55% a 60%, com valores menores o magma ainda pode movimentar-se (Marsh, 1989). Este processo que se representa na Figura 2.3.

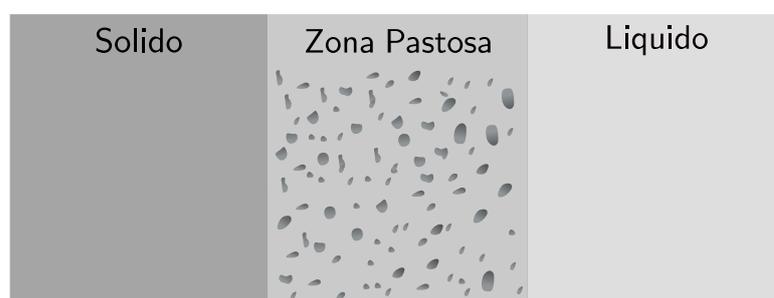


Figura 2.3. Mudança de estado de uma substância não pura.

A equação (2.13) descreve a evolução da temperatura na zona pastosa, para encontrar sua solução se precisa a fração de fusão, f , que dá a proporção de líquido na rocha fundida e depende da temperatura do magma. Esta última dependência se mostra em um diagrama f VS T ou diagrama de fase que relaciona a sequência de cristalização, a composição, a fração cristalizada e a temperatura da substância submetida à mudança de fase (Hort, 1997). Para a construção destes diagramas se pode fazer uma parametrização simplificada de dados unicamente experimentais de fusão e solidificação, ou desenvolver modelos termodinâmicos que incorporam resultados experimentais. Um exemplo do último é o software MELTS que entrega interpolações mais precisas, composições de magma mais gerais e permite a aplicação de variáveis termodinâmicas específicas (Gualda et al., 2012).

Portanto modelar o resfriamento de um corpo ígneo exige resolver um sistema de equações acopladas que descrevam o fluxo de calor entre as zonas sólidas, líquidas e pastosas tanto para a rocha encaixante como para o magma, como se mostra na Figura 2.3. Este tipo de sistemas de equações não têm solução exata e por conseguinte, se deve utilizar métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais parciais como diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos entre outros. Nos seguintes capítulos foram resolvidos alguns problemas de transferência de calor em intrusões magmáticas utilizando diferenças finitas e elementos finitos.

Formação de corpos intrusivos por múltiplas injeções de magma

Atualmente é amplamente aceito que os grandes corpos ígneos, se desenvolvem a partir pequenas injeções de magma ao longo de milhares e milhões de anos através da injeção intermitente de diques e sils. Estes corpos de magma podem se desenvolver em diferentes níveis da crosta. Por exemplo, na crosta superior este tipo de processo magmático está principalmente relacionado com a formação de corpos intrusivos como plútons e batólitos compostos principalmente por granitos e granodioritos; rochas ricas em SiO_2 também conhecidas como rochas félsicas, formadas por fusão e diferenciação na presença de água. Se o ritmo e o volume dos fluxos magmáticos é maior do que os necessários para formar um corpo plutônico pode-se desenvolver vulcanismo silícico. Porém o magma que ascende pela crosta nem sempre culmina em uma erupção vulcânica formando principalmente corpos intrusivos como plútons, sils, diques e batólitos (Putirka, 2017).

Na crosta inferior a injeção repetitiva de sils de composição máfica forma progressivamente um ponto de maior temperatura na geoterma onde se gera magmas de composição félsica por diferenciação fracionada e algumas vezes por fusão parcial da crosta. Em um ambiente de subdução o magma máfico gerado no manto é injetado na crosta inferior é principalmente basalto hidratado. As acumulações magmáticas deste tipo têm sido amplamente estudadas para entender a geração das rochas da crosta superior através da diferenciação magmática e compreender a conexão entre a formação de plútons e vulcões (Annen and Sparks, 2002; Annen et al., 2006; Solano et al., 2012).

3.1 Conceitos gerais na formação de sistemas ígneos

Um corpo ígneo é um volume de material ígneo que pode estar fundido, parcialmente fundido ou totalmente cristalizado onde podem conviver magma nestes estados simultaneamente. Uma câmara magmática é um volume de magma com frações de fusão o suficientemente altas para que os cristais estejam suspensos no material fundido onde o material se comporta em totalidade como um líquido. Um reservatório de fusão é um corpo de rocha parcialmente fundida onde os cristais formam uma rede sólida com fusão intersticial que pode ou não estar interligada. Plúton é usado para designar uma grande massa de rochas ígneas completamente cristalizadas (Annen et al., 2015).

Para classificar o estado de um volume de magma se diz que está em estado sólido ou altamente cristalino se a fração de fusão for menor que 0,3 ($f < 0,3$), um estado parcialmente fundido ou estado pastoso se a fração de fusão for maior que 0,3 e menor que 0,5 ($0,3 < f < 0,5$) e um estado líquido se a fração de fusão for maior que 0,5 ($f > 0,5$) (Annen et al., 2015). Se o magma atinge uma fração de fusão de 0,6 ($f > 0,6$) é possível que o processo de convecção térmica se inicie (Annen, 2009), condição a qual se deve adicionar que a espessura mínima de uma câmara magmática para começar o processo de convecção é de 200 m (Bea, 2010).

A criação de corpos ígneos a partir de múltiplas injeções de magma tem, teoricamente, três formas de se desenvolver: acreção por cima onde o sill mais novo se injeta em cima do sill anterior, acreção por baixo onde o sill mais novo se injeta embaixo do sill anterior e acreção aleatória onde o sill pode ser injetado em um segmento da crosta aleatoriamente. Geocronologicamente se tem verificado que a acreção por baixo é o padrão observado mais frequentemente em plutões, onde as novas injeções de magma ficam presas entre a zona pastosa e o magma fluido (Wiebe and Collins, 1998).

Estas definições podem variar amplamente na literatura, neste trabalho utilizaremos aquelas empregadas nos trabalhos de Annen et al. (2006), Annen et al. (2008), Annen (2009) e Annen et al. (2015).

3.2 Formação de corpos intrusivos por múltiplas injeções de magma na crosta inferior (modelo 1D)

Desenvolvemos um modelo simples de construção de um corpo intrusivo por múltiplas injeções de magma em uma dimensão, com o objetivo de entender os fundamentos matemáticos e geofísicos deste tipo de problema, portanto seguiremos de perto as considerações teóricas expostas em Annen et al. (2006) e Annen et al. (2008).

No modelo desenvolvido a introdução de magma se efetua no limite da crosta inferior¹ com a

¹A espessura média da crosta continental varia com o cenário tectônico, estimada em 40 km, com a crosta inferior que atinge aproximadamente desde os 24 km até 40 km. Estudos recentes que incluem dados gravitacionais e dispersão de ondas rasas mostram uma espessura média da crosta de $34,4 \pm 4,1$ km (Hacker et al., 2015).

crosta superior, nos 20 km de profundidade, limite conhecido como a descontinuidade de Conrad (Figura 3.1).

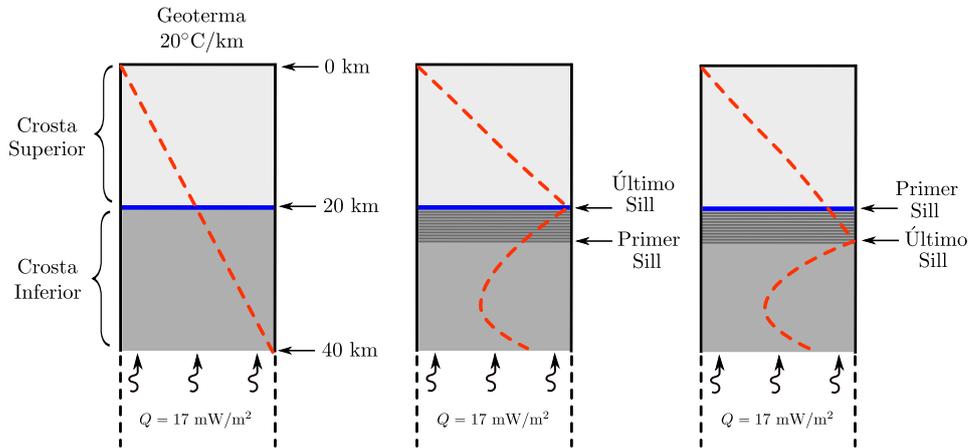


Figura 3.1. Modelo geral para as múltiplas injeções de magma na crosta superior.

Dois modelos são considerados: no primeiro a injeção de um novo sill é sempre em cima do anterior, o segundo a injeção de um novo sill é sempre em baixo do anterior, em ambos os casos fazendo que a crosta desça. A temperatura inicial da crosta é definida por um gradiente geotérmico de 20 °C/km e uma temperatura fixa na superfície de 0 °C, enquanto a temperatura inicial do magma é sua temperatura de liquidus. O fluxo de calor do manto para a crosta inferior nas zonas continentais pode variar desde os 17 mW/m² até 23 mW/m², em nosso modelo utilizamos o limite inferior (Hacker et al., 2015). Na Figura 3.1 se mostra a configuração geral do modelo antes e depois das injeções de magma tanto por cima como por baixo.

A evolução térmica do sistema, $T(y, t)$, pode ser encontrada com a solução da equação de condução de calor sem mudança de estado equação 2.7, ou com mudança de estado equação 2.13, tanto na crosta como o corpo ígneo, junto com condições iniciais e de fronteira apropriadas. O transporte de calor no magma e na rocha encaixante ocorre apenas por condução. A equação 2.13 inclui o termo da fração de fusão $f(T)$, que depende da temperatura e da composição de cada parte do sistema. Os magmas injetados entre a crosta superior e inferior são basaltos andesíticos ricos em H₂O que é uma composição própria de um ambiente de subdução. Para a construção da função $f(T)$ a uma pressão de 1,2 GPa se utiliza andesito basáltico proveniente das da região das Cascades no oeste de Canadá e nordeste dos Estados Unidos, os dados foram tomados de (Muëntener et al., 2001) e (Sisson et al., 2005), processados e extrapolados por (Annen et al., 2006). A relação resultante $f - T$ é

$$f_{\text{Magma}} = \begin{cases} f = 1 & T > T_L, \\ f = 3.25 \times 10^{-3}(T - T_L) + 1 & T_L \geq T \geq T_a, \\ f = \frac{f_a}{T_a - T_s}(T - T_s) & T_a > T \geq T_s, \\ f = 0 & T < T_s, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde T_a é a temperatura de aparição do anfibólio, T_L é a temperatura de liquidus que depende do conteúdo de H_2O : 1225 °C para um conteúdo de água de 5% em massa, 1261 °C para um conteúdo de água de 3,8% em massa, 1285 °C para um conteúdo de água de 2,5% em massa e 1302 °C para um conteúdo de água de 1,5% em massa. Daqui para frente o conteúdo de água em massa será escrito como wt%, que é a abreviatura de *weight percent*, percentagem em peso em inglês.

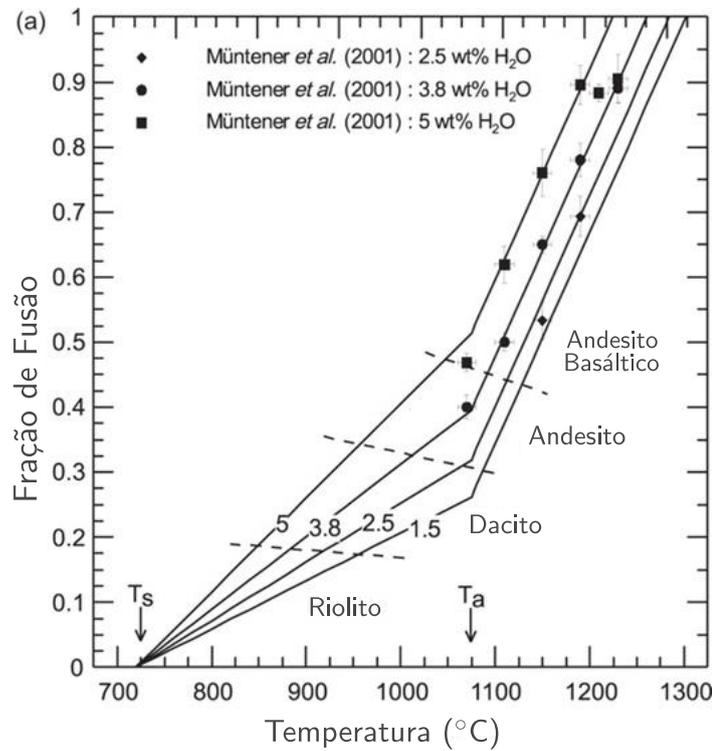


Figura 3.2. Fração de fusão vs. Temperatura para basaltos, pressão de 1.2 GPa e conteúdos iniciais de H_2O em massa de 5%,3,8%, 2,5% e 1,5%. A figura foi extraída de Annen et al. (2006).

Enquanto T_s é a temperatura de solidus para basaltos saturados em H_2O , que foi fixada em 720 °C para todos os casos. Da função 3.1 se deve ressaltar que se a temperatura do magma é maior que a temperatura de liquidus, a fração de fusão f é igual a 1 com a ausência total de cristais, por outro lado, se a temperatura do magma é menor á temperatura de solidus a fração de fusão f é igual a 0 e o magma está totalmente cristalizado.

O processo de cristalização fracionada apresentado na Figura 3.2 é estático, o que significa sem remoção da fração líquida do magma e baseado em resultados de laboratório. Neste caso a mudança de composição depende somente da temperatura. Em modelos dinâmicos a composição varia com a temperatura e com o processo de segregação magmática (Solano et al., 2012). Porém pode ser utilizado como uma aproximação, por exemplo, para $f > 0,65$, o fluido residual gerado corresponde a andesito basáltico, para $0,42 < f < 0,65$ corresponde a andesito, para $0,21 < f < 0,42$ corresponde a dacito e $0 < f < 0,21$ corresponde a riolito.

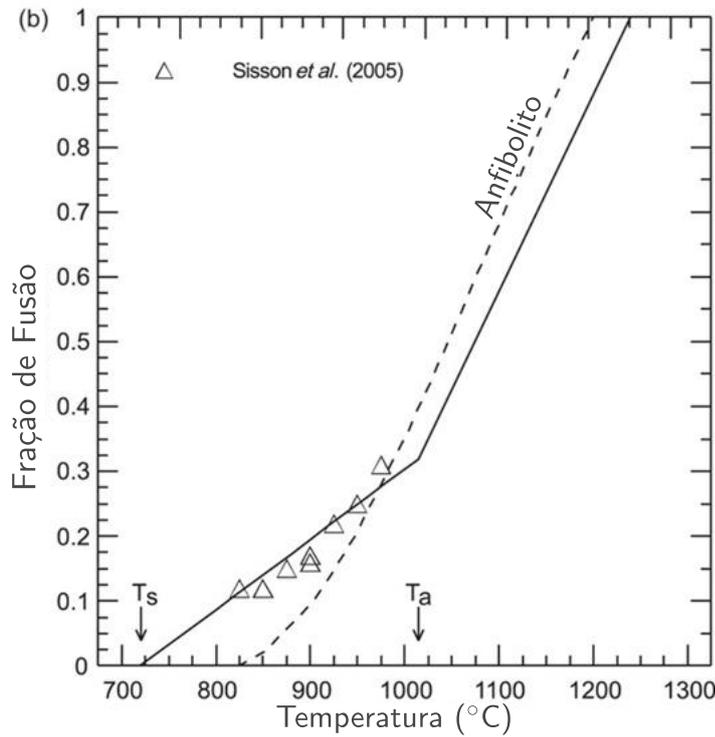


Figura 3.3. Fração de fusão vs. Temperatura para grauvaca, A figura foi extraída de Annen et al. (2006).

A composição da crosta superior é considerada como sendo a composição média das grauvacas (Annen et al., 2006), na Figura 3.3 se mostra seu diagrama de fase cuja relação $f - T$ é aproximada por:

$$f_{\text{crosta superior}} = \begin{cases} f = 1 & T > T_L, \\ f = 6.36 \times 10^{-3} T - 5.17 & T_L \geq T \geq 900^\circ\text{C}, \\ f = 1.75 \times 10^{-3} T - 1.017 & 900^\circ\text{C} < T \geq T_s, \\ f = 0 & T < T_s, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde T_s é 812 °C e T_L é 1150 °C. A composição da crosta inferior é considerada como sendo de composição anfíbolítica cuja relação $f - T$ resulta da linearização aproximada da função $f(T)$ dada em Petford (2001),

$$f_{\text{crosta inferior}} = \begin{cases} f = 1 & T > T_L, \\ f = 3.239 \times 10^{-3} T - 2.88 & T_L \geq T \geq 981.5^\circ\text{C}, \\ f = 1.83 \times 10^{-3} T - 1.50 & 981.5^\circ\text{C} > T \geq T_s, \\ f = 0 & T < T_s, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde T_L 1200 °C e T_s e 822 °C.

Tabela 3.1. Parâmetros utilizados no modelo 1D de formação de corpos ígneos.

Símbolo	Descrição	Valores
ρ	Densidade	Kg/m ³
	Crosta superior	2650
	Crosta inferior	2900
	Magma injetado	2830
K_o	Condutividade térmica	W/m K
	Crosta superior	3.0
	Crosta inferior	2.6
	Magma injetado	2.6
L	Calor latente	
	Crosta superior	2.7×10^5
	Crosta inferior	2.93×10^5
	Magma injetado	4.0×10^5
c_p	Calor específico	J/ Kg
	Crosta superior	1370
	Crosta inferior	1200
	Magma injetado	1480

A Tabela 3.1 se apresentam os parâmetros utilizados no modelo de transferência de calor. É importante ressaltar que a condutividade térmica na crosta varia de forma inversamente proporcional à temperatura e diretamente proporcional à profundidade (pressão), e pode ser aproximada por

$$K(T, z) = \frac{k_0(1 + cz)}{(1 + bT)}, \quad (3.4)$$

obtida em Chapman (1986). b é o coeficiente térmico igual a $1,5 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ para a crosta superior e $1,0 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ para crosta inferior. c é o coeficiente de pressão que tem um valor para toda a crosta de $1,5 \times 10^{-3} \text{ km}^{-1}$, k_0 é a condutividade térmica nas condições da superfície.

Se a condutividade térmica é mantida constante se obtém discordâncias especialmente a altas temperaturas, porém a variação é maior na crosta superior do que na crosta inferior onde se mantém em um valor aproximado de 2,6 W/m K (Whittington et al., 2009).

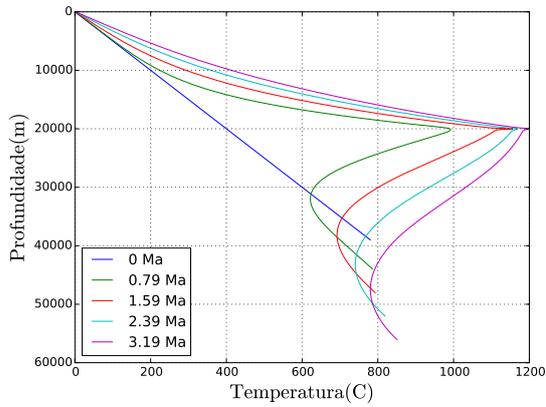
A solução do sistema de equações diferenciais parciais que compõe o problema de condução de calor na presença de mudança de estado foi obtida como o método das diferenças finitas, o algoritmo foi escrito na linguagem Python. No apêndice A se mostra o procedimento completo para desenvolver esse sistema. O acréscimo do corpo ígneo dura de 3.2 Ma (milhões de anos), com um intervalo de tempo de 10^4 anos entre duas injeções consecutivas de magma. Cada injeção tem uma espessura de 50 m que corresponde a aumento do basalto a uma taxa de 5 mm/ano.

3.2.1 Resultados

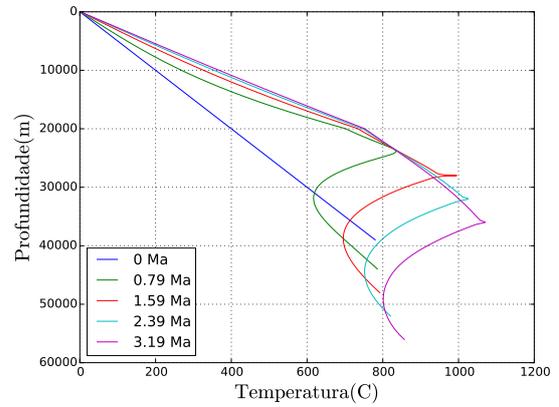
A análise da evolução da temperatura e da fração de fusão do sistema na formação de um corpo ígneo por múltiplas injeções de magma, se faz para diferentes profundidades, pulsos, e conteúdos H_2O no sistema. As figuras apresentadas estão organizadas por quantidade de H_2O : a Figura 3.4 para 1,5wt% H_2O , a Figura 3.5 para 2,5wt% H_2O , a Figura 3.6 para 3,8 wt% H_2O e a Figura 3.7 para 5,0 wt% H_2O . Ao mesmo tempo cada uma delas apresenta as figuras para o acréscimo por cima na coluna esquerda e acréscimo por baixo na coluna direita. Daqui para frente para abreviar acréscimo por cima se utilizara AC enquanto acréscimo por baixo será AB.

As linhas horizontais para todas as subfiguras (e) e (f) da fração de fusão representam a composição do líquido residual para a cristalização fracionada do basalto andesítico como foi descrito na Figura 3.2. Entre o eixo T é a linha vermelha corresponde ao riolito, entre a linha vermelha e a linha azul corresponde a dacito, entre a linha azul e verde corresponde a andesito e por em cima da linha verde corresponde a andesito basáltico. Cada curva para todas as Figuras (c) e (d) representam a evolução térmica no tempo de um sil específico de magma em sua ordem de introdução. Por exemplo, na Figura (c) a curva vermelha mostra a evolução da temperatura da parte central do centésimo sil introduzido. Isto também aplica para as Figuras (d) que apresentam a evolução da fração de fusão através do corpo ígneo.

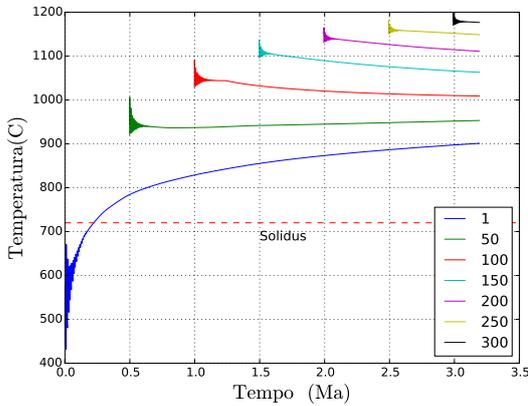
A temperatura e a fração de fusão (Figuras (c), (d), (e) e (f)) oscilam o longo do corpo enquanto se introduzem novos sils que aumentam a temperatura em sua vizinhança. Este comportamento pode ser observado na Figura 3.8, onde se constata mais de perto essas características. Quando as novas introduções de magma estão o suficientemente afastadas acaba este comportamento e se entra equilíbrio térmico como os arredores. Essa temperatura de equilíbrio térmico aumenta conforme aumenta o número de sils introduzidos no corpo, por essa razão as oscilações diminuem de amplitude como o tempo portanto a parte superior terá temperaturas maiores do que a parte inferior do corpo.



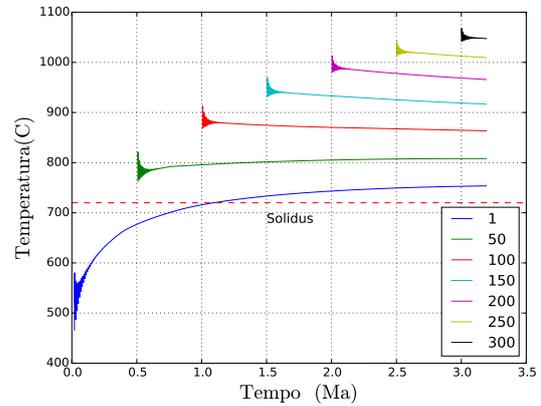
(a) Evolução da Geoterma AC.



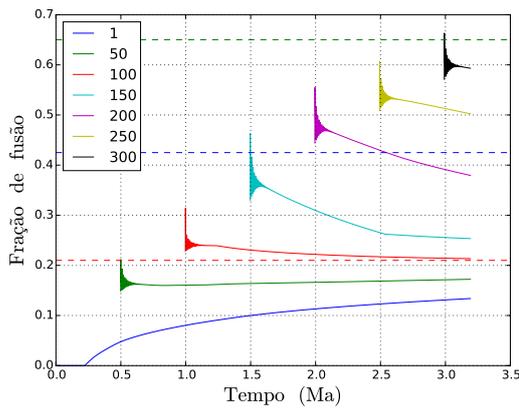
(b) Evolução da Geoterma AB.



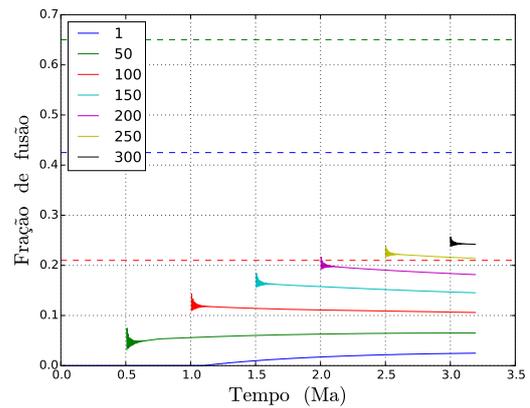
(c) Evolução da temperatura AC.



(d) Evolução da temperatura AB.

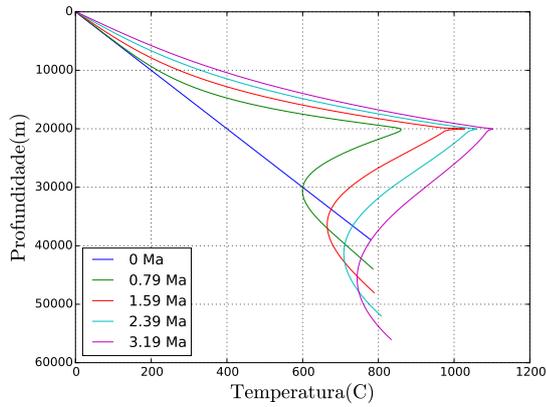


(e) Evolução da fração de fusão AC.

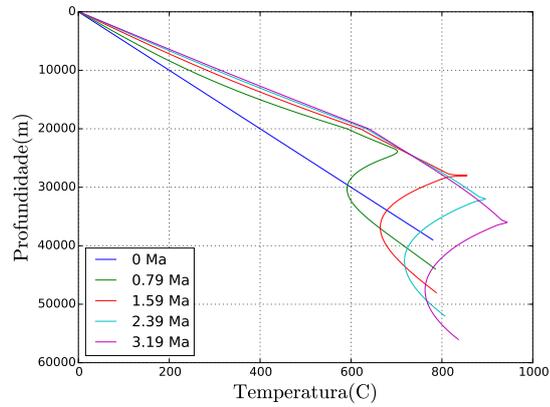


(f) Evolução da fração de fusão AB.

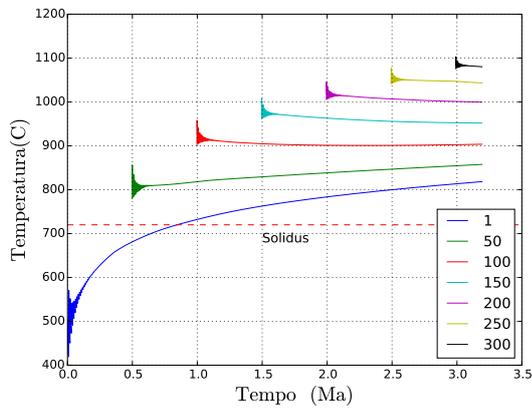
Figura 3.4. Evolução térmica da formação de um corpo ígneo a partir de basalto andesítico com 1,5wt% H_2O . (a) e (b) Evolução no tempo da Geoterma. (c) e (d) Evolução da temperatura do corpo ígneo através de diferentes sils. (e) e (f) Evolução de fração de fusão do corpo ígneo através de diferentes sils.



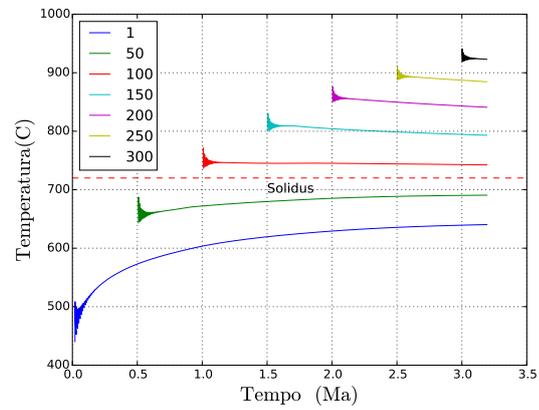
(a) Evolução da Geoterma AC.



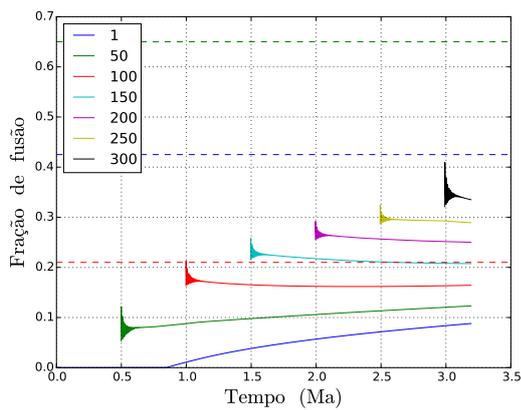
(b) Evolução da Geoterma AB.



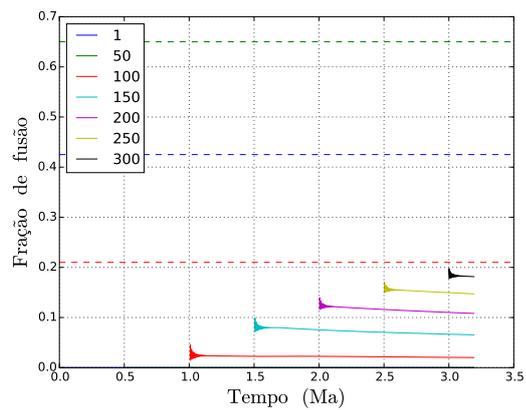
(c) Evolução da temperatura AC.



(d) Evolução da temperatura AB.

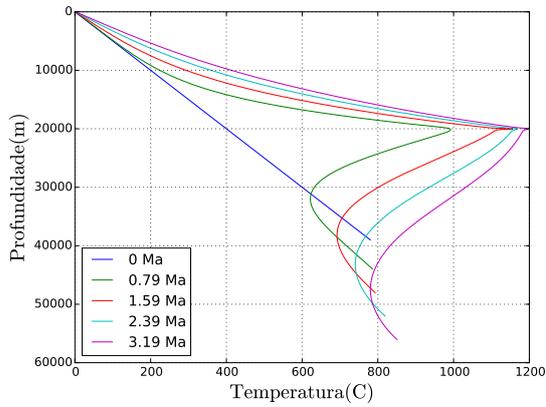


(e) Evolução da fração de fusão AC.

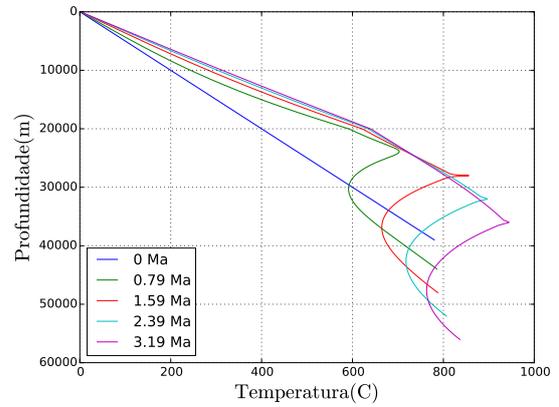


(f) Evolução da fração de fusão AB.

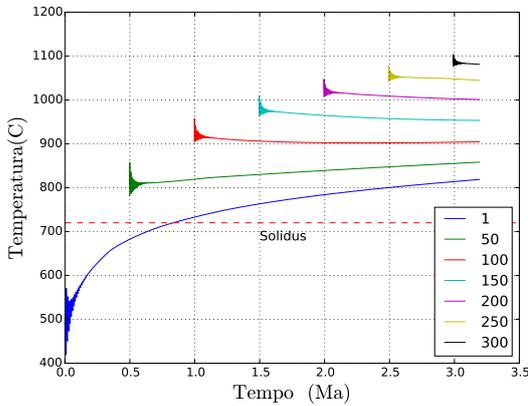
Figura 3.5. Evolução térmica da formação de um corpo ígneo a partir de basalto andesítico com 2,5 wt% H₂O . (a) e (b) Evolução no tempo da Geoterma. (c) e (b) Evolução da temperatura do corpo ígneo através de diferentes sils. (e) e (f) Evolução de fração de fusão do corpo ígneo através de diferentes sils.



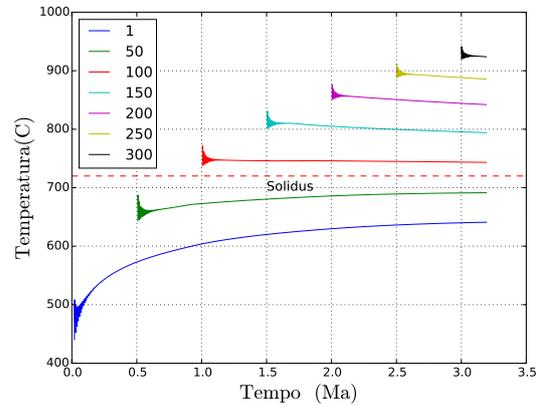
(a) Evolução da Geoterma AC.



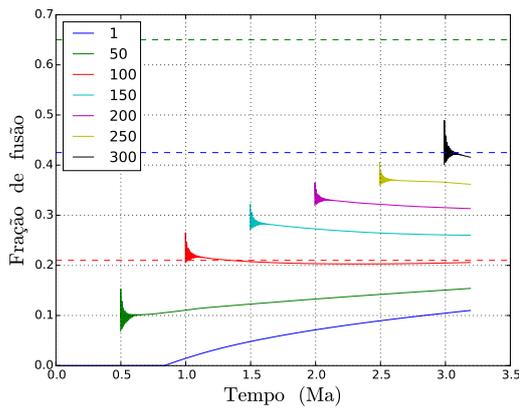
(b) Evolução da Geoterma AB.



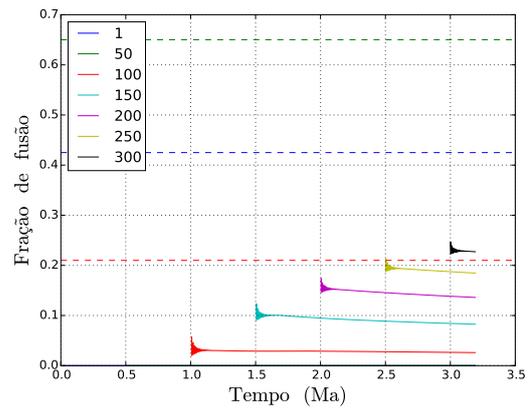
(c) Evolução da temperatura AC.



(d) Evolução da temperatura AB.

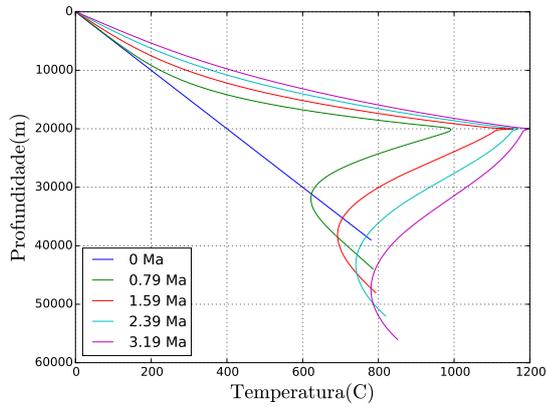


(e) Evolução da fração de fusão AC.

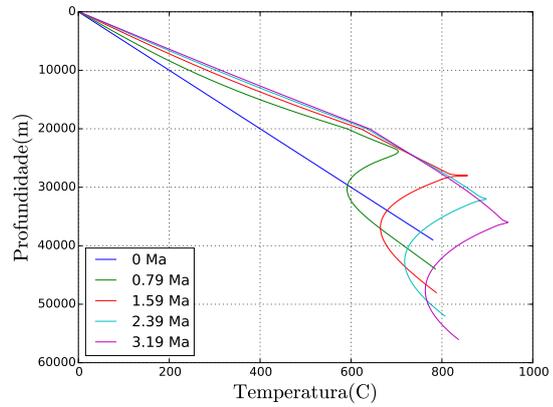


(f) Evolução da fração de fusão AB.

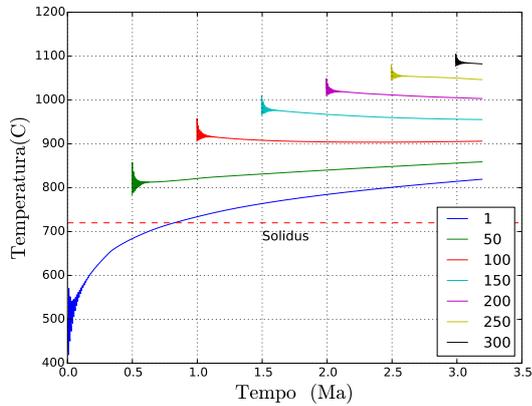
Figura 3.6. Evolução térmica da formação de um corpo ígneo a partir de basalto andesítico com 3,8 wt% H_2O . (a) e (b) Evolução no tempo da Geoterma. (c) e (d) Evolução da temperatura do corpo ígneo através de diferentes sils. (e) e (f) Evolução de fração de fusão do corpo ígneo através de diferentes sils.



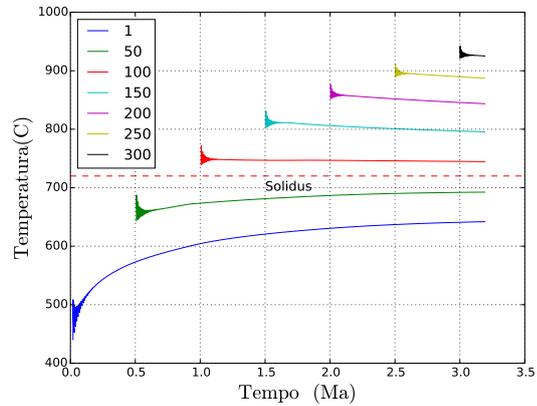
(a) Evolução da Geoterma AC.



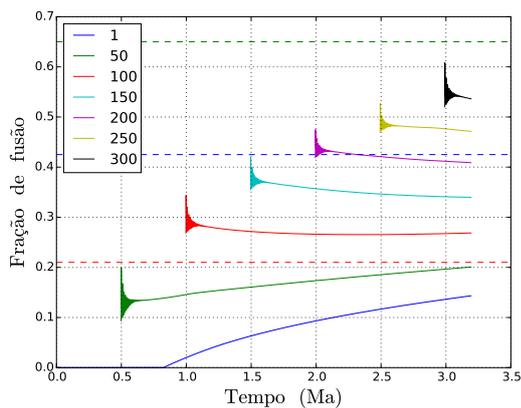
(b) Evolução da Geoterma AB.



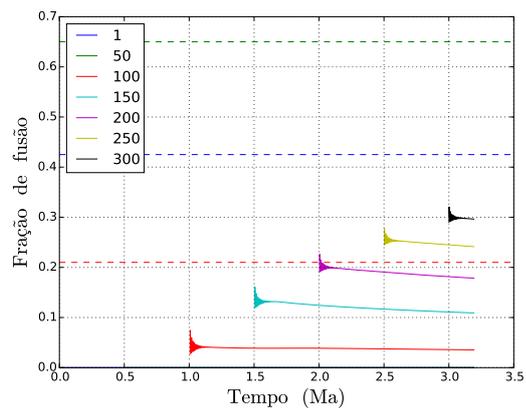
(c) Evolução da temperatura AC.



(d) Evolução da temperatura AB.



(e) Evolução da fração de fusão AC.



(f) Evolução da fração de fusão AB.

Figura 3.7. Evolução térmica da formação de um corpo ígneo a partir de basalto andesítico com 5,0 wt% H_2O . (a) e (b) Evolução no tempo da Geoterma. (c) e (d) Evolução da temperatura do corpo ígneo através de diferentes sils. (e) e (f) Evolução de fração de fusão do corpo ígneo através de diferentes sils.

A evolução térmica do sistema é controlada pela habilidade de absorber calor que depende da difusividade térmica e a temperatura da geoterma, o que quer dizer, da profundidade. Para todos os casos estudados, tanto para AC como para AB, a temperatura da geoterma (Figuras 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 (a) e (b)) aumenta com as múltiplas injeções de magma pois o tempo de entre duas intrusões é menor que o tempo de difusão do calor latente e sensível liberados pelos magma no processo de solidificação.

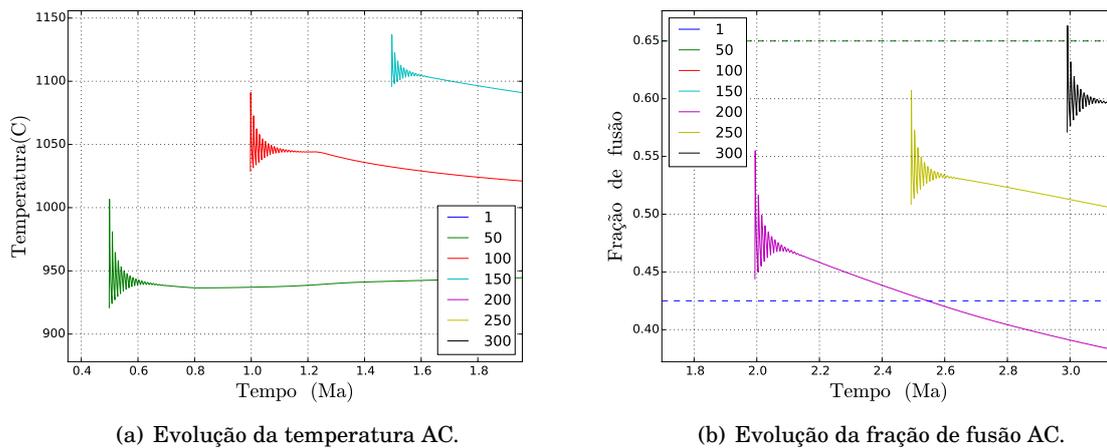


Figura 3.8. Detalhes da evolução inicial da temperatura e da fração de fusão para 1,5 wt% H₂O .

A condutividade térmica é menor na crosta superior do que a crosta inferior aos 20 km de profundidade, lugar da primeira intrusão de magma, por este motivo o ritmo de resfriamento dos corpos formados por AB é maior do que os corpos formados por AC como se pode notar em todas as Figuras (a),(b) e (c),(d). Esta característica controlará e diferenciará o desenvolvimento térmico e químico deste tipo de corpos introduzidos entre a crosta superior e inferior. Independentemente da quantidade de água todas as geotermas que pertencem a corpos AB atingem temperaturas menores no mesmo intervalo de tempo que as geotermas dos corpos AC, dado que, sempre a ultima injeção de magma entra em contato térmico direto com a crosta já seja inferior ou superior.

A geometria de intrusão também define a profundidade de máxima temperatura na geoterma, sendo maior na profundidade de intrusão: aos 20 km para AC, enquanto para AB a profundidade de máxima temperatura desce ao ponto de intrusão de cada novo sill (Figuras (a) e (b)). As geotermas que correspondem a 2,5wt%, 3,8wt% e 5wt% de H₂O , tanto para AB como para AC, apresentam mudanças apenas perceptíveis, exibindo temperaturas levemente maiores quanto maior o conteúdo de água, atingindo uma temperatura máxima de 1103,33°C para AC e 945.7° para BC. Mas as geotermas que correspondem a 1,5wt% de H₂O atingem uma temperatura maior de 1195,6 ° para AC e 1070,55° para AB, dado que a temperatura de liquidus do magma é a mais elevada para este percentagem de H₂O .

Nas Figuras (d) de 2,5 wt%, 3,8 wt% e 5 wt% de H₂O se pode notar que devido ao rápido resfriamento do magma no AB as primeiras 76 injeções de magma que corresponde aos 3800 m do nível superior do corpo se cristalizam ($f < 0,3$) e nunca atingem de novo a temperatura do solidus. De outro lado o sistema com 1,5 wt% H₂O todo o corpo atinge a temperatura de solidus. A distribuição resultante da fração de fusão ao longo da geoterma depende fortemente da

quantidade de água do magma pois no processo de cristalização do basalto a água se acumula na porção líquida aumentando a retenção de energia em forma de calor sensível e por tanto de fração líquida de magma à mesma temperatura. Por esta razão, como se pode observar em todas Figuras (e) e (f), apesar de que a temperatura varia levemente no sistema com 5 wt% de H₂O em comparação com os sistemas com 2,5 e 3,8 wt% de H₂O se produz maior quantidade total de fundido. De todas as Figuras (f) da fração de fusão para AB se pode concluir que nenhuma atinge

a temperatura suficiente para criar uma zona pastosa, pois a maior fração de fusão alcançada é de 0,3 no sistema com 5 wt% de H₂O, abaixo da qual se considera ainda como um corpo altamente cristalino ou sólido, o que quer dizer um reservatório de fusão. Isto significa que neste nível da crosta o AB não possibilita a criação de uma câmara magmática.

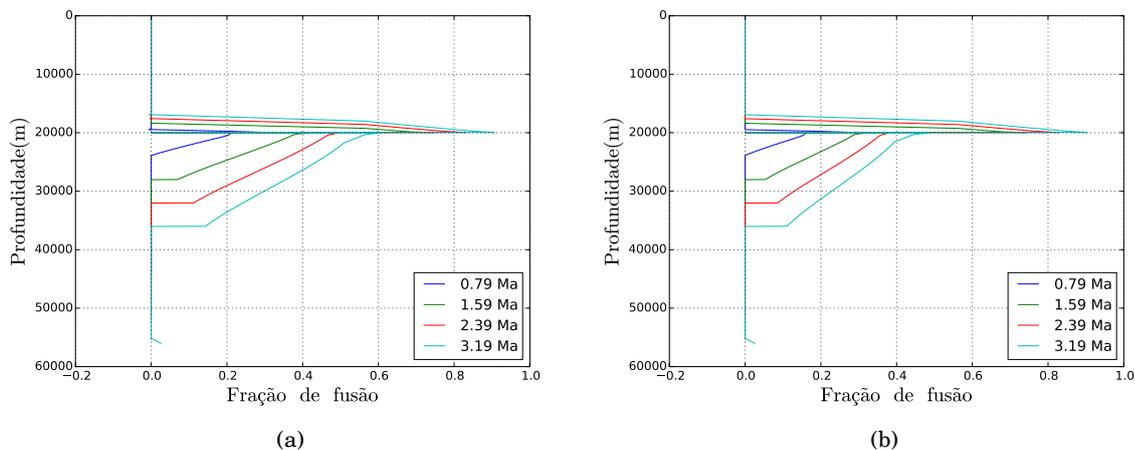


Figura 3.9. Evolução da fração de fusão ao longo da crosta com AC para magmas com (a) 5,0 wt% de H₂O (b) 3,8 wt% H₂O .)

Na Figura 3.6 (e) que apresenta a fração de fusão para AC e 3,8 wt% H₂O mais dados computacionais, se pode observar que uma terceira parte que corpo atinge frações de fusão maiores a 0,3 ($f > 0,3$) formando no topo do corpo uma zona pastosa, o restante do corpo tem uma fração de fusão menor de 0,3 ($f < 0,3$) região que se considera, portanto, ainda cristalina ou um reservatório de fusão. Este mesmo cenário se repete para o sistema AC com 2,5 wt% H₂O (Figura 3.5 (e)) mas só a quinta parte do corpo chega a um estado pastoso e restante do corpo fica em estado cristalino. Por outro lado da Figura 3.7 (e) se pode observar que para 5 wt% H₂O um

pouco mais da sexta parte do corpo atinge estado de líquido ($f > 0,5$), a metade do corpo está em estado pastoso ($f > 0,3$) e a terceira parte do corpo está cristalino ($f < 0,3$). Enquanto o sistema com 1,5 wt% H₂O (Figura 3.4 (e)) se pode observar que ao redor da quarta parte do corpo atinge o estado de líquido ($f > 0,5$), outra quarta parte do corpo está em estado pastoso ($f > 0,3$) e a metade do corpo em estado cristalino ($f < 0,3$).

A temperatura da rocha encaixante aumenta progressivamente até atingir sua temperatura de solidus e começa a se fundir como se mostra na Figura 3.9 que apresenta a distribuição da fração de fusão no tempo tanto para a rocha encaixante como para o magma. O fundido residual produzido produto da fusão da crosta contribui no desenvolvimento de rochas com composições químicas diferentes, por exemplo para instrução de magma por acréscimo por em cima com 1,5 wt% H₂O a crosta superior se funde ao redor dos 4 km que o máximo atingido para esta coleção de dados por causa de sua temperatura de liquidus elevada.

No processo de cristalização fracionada do basalto andesítico (Figura 3.2) se pode observar que se o magma se mantém a temperaturas altas não produzirá fluidos residuais evoluídos ou de composição félsica, unicamente os sistemas onde a temperatura descem a temperaturas próximas à solidus podem desenvolver fluidos magmáticos evoluídos (silícicos). Isto quer dizer que enquanto a temperatura do sistema aumenta com as múltiplas injeções de magma os fluidos residuais são menos evoluídos. Os sistemas AC com 2,5 e 3,8 wt% H₂O produzem fluidos com composições próximas ao dacito com camadas inferiores que contem fluidos com composição próxima ao riolito. Os sistemas AC com 5,0 e 1,5 wt% H₂O acumulam fluidos máficos com camadas inferiores de composição mais evoluída. Por outro lado todos sistemas AB (Figuras (f)) produzem principalmente fluidos félsicos com composições próximas ao riolito e dacito, portanto o mecanismo AB é mais efetivo para produzir na crosta inferior rochas de composições da crosta superior, se pode falar de um armazenamento frio de magma evoluído na crosta inferior. A forma como os magmas máficos evoluem em félsicos e ascendem pela crosta desde um reservatório frio tendo uma baixa cristalinidade é ainda um tema de estudo (Jackson et al., 2017).

3.3 Formação de corpos intrusivos por múltiplas injeções de magma na crosta superior (modelo 2D)

O modelo em duas dimensões para a formação de corpos ígneos por meio múltiplas injeções de magma é desenvolvido na crosta superior onde a atividade magmática é principalmente de carácter silícico, e pode evoluir para formar uma câmara magmática, um reservatório de fusão ou um plutón.

A geometria em que é desenvolvida a solução do problema se mostra na Figura 3.10 (a). Este é um modelo axissimétrico ou com simetria axial. As injeções de magma são em forma de sils e

a evolução térmica do sistema é igualmente calculada com as equações 2.7 e 2.13. A primeira injeção de magma se faz a uma profundidade de 5 km que corresponde ao topo do corpo, o raio do plutón é de 10 km considerando um corpo de grande escala, porém o raio pode variar entre os 3.5 km até os 20 km. As novas intrusões de magma são instantâneas, efetuadas em cima do anterior sil com uma temperatura inicial equivalente à temperatura do liquidus e uma espessura de 300m, enquanto a temperatura inicial da crosta é definida por um gradiente geotérmico de 30 °C/km.

A condutividade térmica na crosta superior é novamente estabelecida por a equação 3.4, e o calor específico da crosta também varia com a temperatura como é descrito em Whittington et al. (2009) da forma,

$$\begin{cases} c_P(T < 846K) = 199.0 + 0.0857T - 5.0 \times 10^{-6} T^{-2} \\ c_P(T > 846K) = 229.32 + 0.0323T - 47.9 \times 10^{-6} T^{-2}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Os demais parâmetros do modelo se apresentam na Tabela 3.2. O fluxo lateral de calor no eixo de simetria e nos pontos afastados do eixo na crosta é zero, estes limites são apresentados de roxo na Figura 3.10. O fluxo de calor da crosta inferior para a crosta superior é $Q = 0.03 \text{ W/m}^2$ (Douglas et al., 2016) e a superfície tem temperatura fixa de $T(0, t) = 0 \text{ °C}$ como se mostra na Figura 3.10 (b).

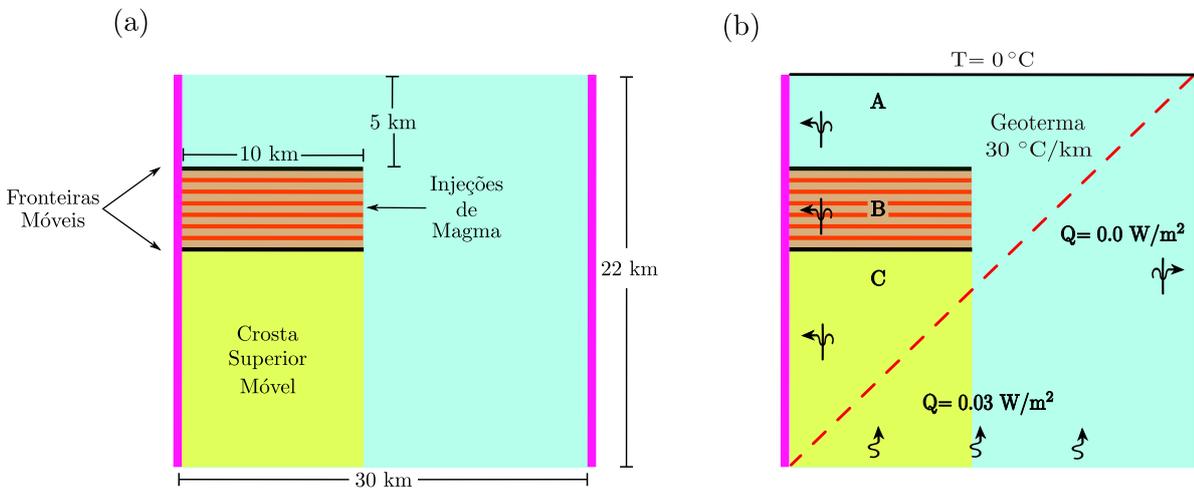


Figura 3.10. Condições iniciais e de fronteira para o modelo de acréscimo de corpos ígneos em duas dimensões (a) Dimensões do sistema (b) Condições de fronteira e iniciais.

A fração de fusão para o magma injetado é de uma composição próxima ao tonalito² com 6,0wt% de H₂O, uma temperatura de solidus de 760 °C e uma temperatura de liquidus de 990°C; os dados foram processados e extrapolados por (Annen et al., 2008) os quais se apresentam na Figura 3.11 e cuja interpolação é

² O tonalito é uma rocha ígnea intrusiva de composição félsica.

$$f_{\text{Magma}} = \begin{cases} f = \frac{f(876)}{876 - T_s} (T - T_s), & 876^\circ\text{C} > T > T_s, \\ f = -4.668 \times 10^{-5} T^2 + 8.636 \times 10^{-2} T - 39.244, & 930^\circ\text{C} \leq T \leq 876^\circ\text{C}, \\ f = \frac{1 - f(930)}{T_L - 930} (T - T_L) + 1, & T_L > T > 930^\circ\text{C}. \end{cases} \quad (3.6)$$

A composição da rocha encaixante é novamente de grauvaca cuja fração de fusão é dada por a equação 3.2.

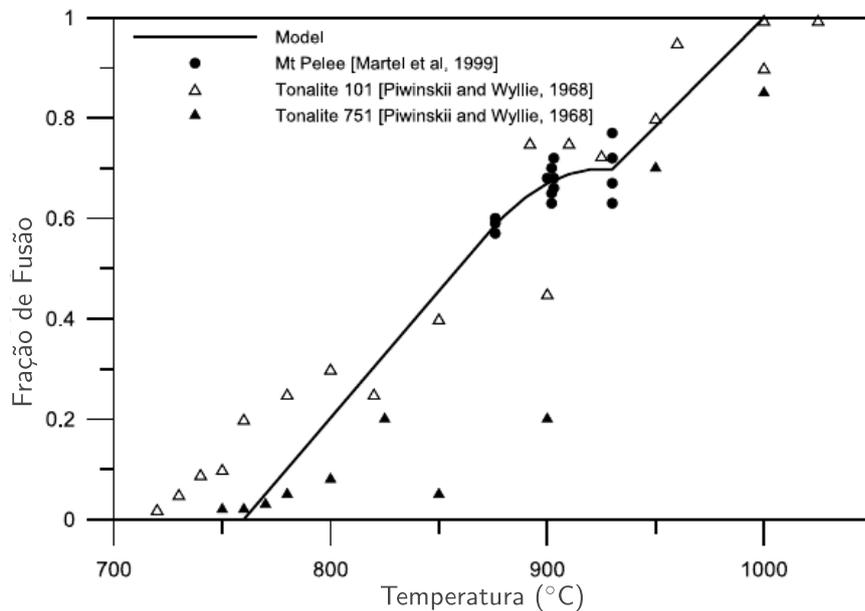


Figura 3.11. Fração de fusão como função da temperatura a pressão constante para tonalito. A Figura foi extraída de (Annen et al., 2008).

O objetivo principal de este tipo de modelo na crosta superior é calcular o ritmo de injeção mínimo para que uma porção suficiente de magma em estado líquido ($f > 0,5$) se desenvolva e permaneça ao longo de certo tempo, dito de outro modo, que se crie uma câmara magmática que possa alimentar uma erupção vulcânica ou simplesmente se mantenha como um reservatório de fusão que finalmente se converta em um plúton. Esta construção teórica está desprovida de convecção, circulação hidrotermal, migração de magma ou compactação entre outros fenômenos que podem se desenvolver neste tipo de sistema, trata-se, no em tanto, de uma boa aproximação para calcular o balanço de energia pois o calor nos sistemas magmáticos se perde principalmente por difusão.

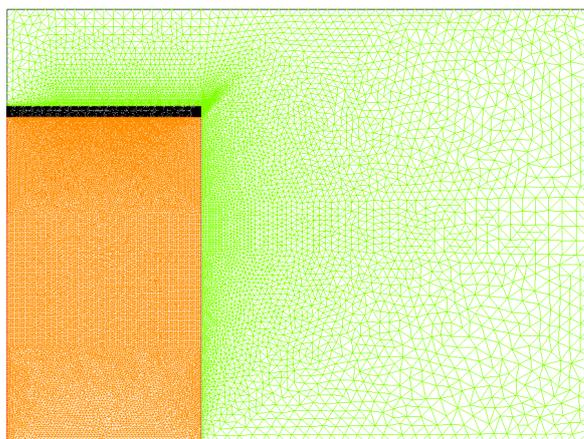
Neste tipo de problema se define o **tempo de incubação** como o tempo necessário para que um volume de magma equivalente a 150 metros de espessura com determinada fração de fusão f_i

Tabela 3.2. Parâmetros utilizados no modelo 2D de formação de corpos ígneos.

Símbolo	descrição	valores
ρ	Densidade	Kg/m^3
	Crosta superior	2650
	Magma injetado	2500
K_o	Condutividade térmica	W/m K
	Crosta superior	3.0
	Magma injetado	2.5
L	Calor latente	J/kg
	Crosta superior	2.7×10^5
	Magma injetado	3.0×10^5
c_p	Calor específico	J/ Kg K
	Crosta superior	Eq.3.4
	Magma injetado	1000

persista ao longo tempo. Antes que se cumpra o tempo de incubação o último sil introduzido se resfria abaixo da temperatura de existência de f_i . Se define o tempo de resfriamento de um corpo ígneo como aquele no qual todo o corpo atinge frações de fusão menores de 0,3 ($f < 0,3$).

O problema em duas dimensões foi resolvido com o método de elementos finitos com ajuda do solucionador FreeFem++ software package (Hecht, 2012), escrito em C++. Este método oferece mais flexibilidade na geometria da malha utilizando um gerador automático baseado no algoritmo Delaunay-Voronoi. Na Figura 3.12 se mostra um exemplo de malha feito em FreeFem++ para o modelo apresentado na Figura 3.10.



(a) Erros entre o corpo ígneo e a crosta móvel

Figura 3.12. Malha gerada por FreeFem ++ para o modelo em duas dimensões para a formação de um corpo ígneo por múltiplas injeções de magma.

O método dos elementos finitos reduz o problema do contorno para equações diferenciais parciais a um sistema linear de equações, que pode ser resolvido com métodos da álgebra linear.

No modelo geral, como se mostra na Figura 3.10, para injetar um novo sill a crosta superior móvel deve descer 300 m diminuindo o tamanho da região **C**, por conseguinte um novo espaço de 300 m deve ser criado acima na região **B**, no qual se introduzira um novo pulso de magma. A região **A** não muda de tamanho, portanto é um marco de referência estático, enquanto **B** e **C** pertencem a um marco de referência móvel que muda de dimensões com cada injeção de magma. Em FreeFem++ as regiões **A**, **B** e **C** são definidas em uma única malha (Figura 3.12) para garantir a conservação do fluxo de calor nas fronteiras internas apesar de possuir propriedades físicas diferentes como a condutividade térmica, densidade e calor específico entre outras. FreeFem++ não permite que as regiões **B** e **C** da malha se movimentem independentemente de **A**, portanto para modificar o tamanho das regiões **B** e **C** deve-se criar uma nova malha que se ajuste à injeção de um novo sil. Nesta nova malha se interpola o último perfil de temperatura da crosta achado como a solução das equações 2.7 , 2.13. Este procedimento se repete tantas vezes como sils são introduzidos, por conseguinte múltiplas interpolações devem ser feitas e cada uma delas incorpora erros de aproximação nos dados, principalmente nas bordas das malhas, fato que pode limitar a qualidade dos dados. Este tipo de erros serão amostrados mais para frente neste capítulo.

A interpolação de dados de uma malha a outra melhora se são utilizados elementos quadrilaterais, mas FreeFem++ só implementa elementos triangulares. Existem outros software que incluem elementos triangulares e quadrilaterais com a possibilidade de integrar ambos tipos elementos em uma única malha, ou definir diferentes subdomínios na malha que podem mudar independentemente dos outros domínios, como por exemplo COMSOL multiphysics que é amplamente utilizado neste tipo de problemas. Na presente dissertação se começo a experimentar este tipo de soluções por esse motivo se utilizo o software livre FreeFem++.

3.3.1 Resultados

Devido às limitações computacionais já referidas o tamanho mínimo dos sils introduzidos é de 300 m de espessura. E evolução térmica é estudada a diferentes ritmos de acreção com o objetivo de encontrar os fluxos e os tempos de incubação para a formação de câmaras magmáticas. Estes ritmos são: 0,03 m/ano que corresponde a um pulso de magma cada 10 000 anos ou um volume $9,42 \times 10^{-3} \text{ km}^3/\text{ano}$, 0,05 m/ano que corresponde a um pulso cada 6 000 anos ou um volume $1,57 \times 10^{-2} \text{ km}^3/\text{ano}$, 0,1 m/ano que corresponde a um pulso cada 3 000 anos ou um volume de $3,1 \times 10^{-2} \text{ km}^3/\text{ano}$, 0,2 m/ano, que corresponde a um pulso cada 1 500 anos ou um volume de $6,28 \times 10^{-2} \text{ km}^3/\text{ano}$ e 0,4 m/ano que corresponde a um pulso cada 750 anos e um volume de $1,2 \times 10^{-1} \text{ km}^3/\text{ano}$. Para todos os casos o numero total de sils introduzidos é de 34 que equivale a um corpo de 10.2 km de profundidade.

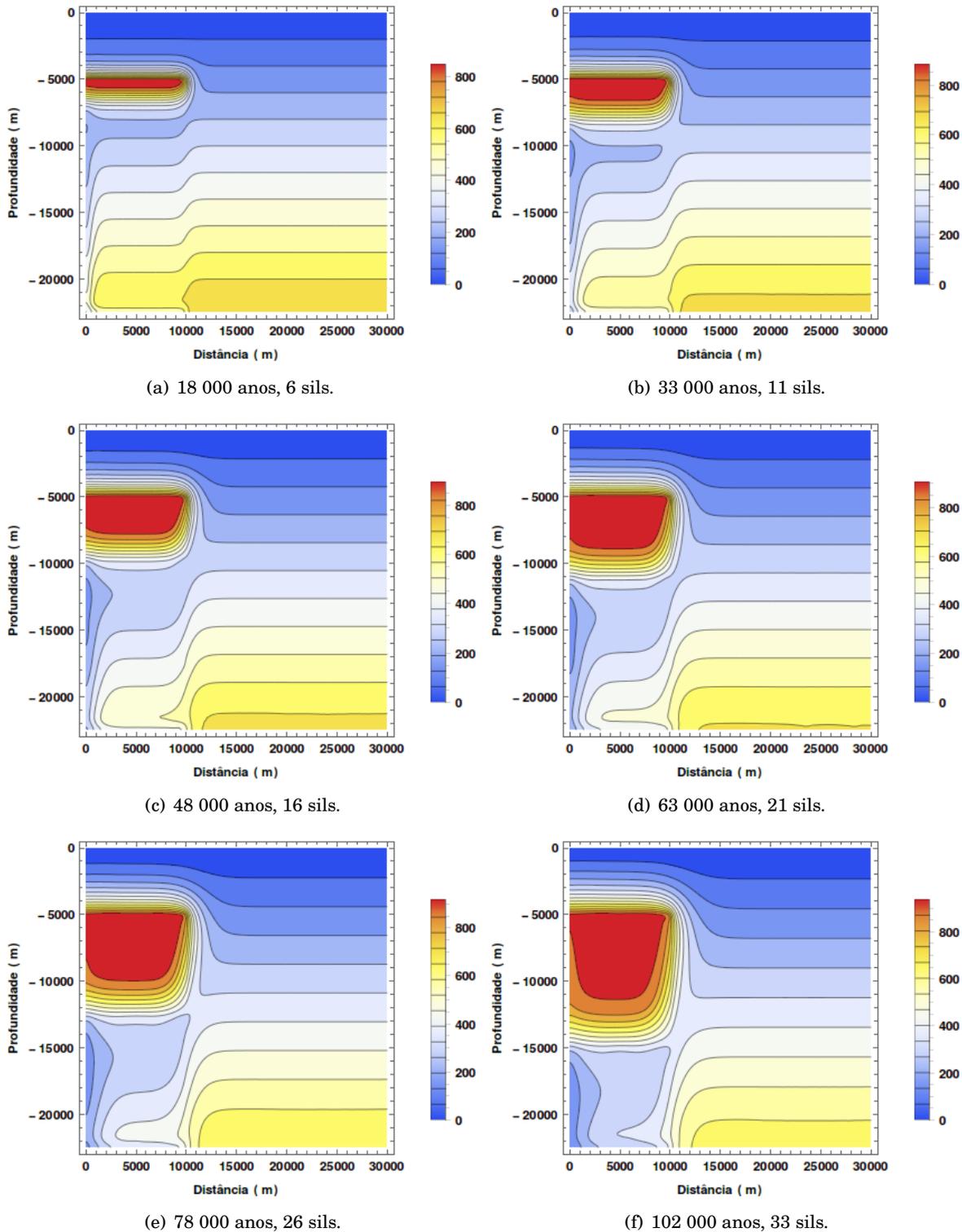


Figura 3.13. Evolução da temperatura na formação de um corpo ígneo em duas dimensões a um ritmo de 0.1 m/ano e com uma composição da crosta de grauvaca e do magma de tonalito.

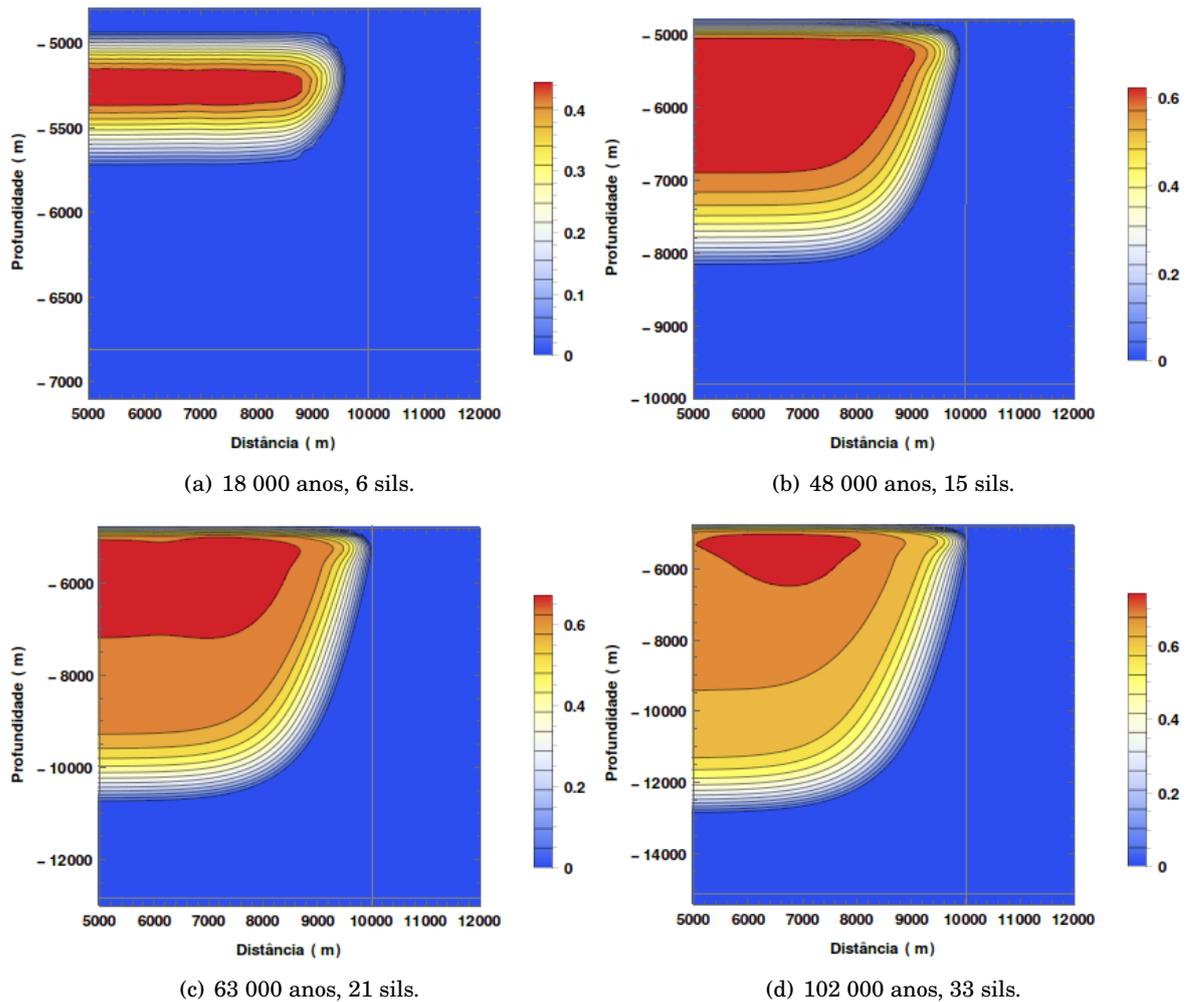


Figura 3.14. Evolução da fração de fusão ao longo do tempo para uma câmara magmática e rocha encaixante de tonalito.

O primeiro teste se fez com uma composição da crosta superior de grauvaca sendo o magma injetado é tonalito. Analisaremos detalhadamente o modelo com ritmo de acréscimo de $0,1\text{m/ano}$, na Figura 3.13 se apresenta a evolução da temperatura deste sistema. Deve-se notar nestas figuras que no eixo de simetria a temperatura tem problemas de interpolação, pois deve apresentar isothermas sem curvatura. A característica principal desta sequência de figuras é que a temperatura da parte superior do corpo se mantém acima de 800°C ao longo do tempo, enquanto a parte inferior do corpo se resfria gradualmente por baixo da temperatura de solidus. A medida que se introduze magma a temperatura da geoterma e da crosta adjacente aumenta pela liberação de calor latente e calor sensível produto da cristalização do magma. O aumento lateral da temperatura na crosta atinge uma distância média de 15 km de desde o eixo de simetria ou 5 km da parede lateral do corpo ígneo. A crosta baixo do corpo em formação desce gradualmente devido as injeções de magma, portanto vai ficando mais fria do que a crosta fixa adjacente e se

estabelece um fluxo de calor da crosta quente à crosta fria.

A Figura 3.14 mostra a distribuição da fração de fusão para diferentes tempos da evolução do corpo ígneo. As linhas cinza mostram o volume total de magma introduzido até esse momento. Desta figura podemos afirmar que apesar que a parte inferior do corpo se cristaliza rapidamente se desenvolve uma câmara magmática com frações de fusão maiores a 0,3 ($f > 0,3$) que persiste no tempo e evolui a um corpo ígneo que contem principalmente material fundido. A distribuição da fração de fusão quando finaliza o processo de acréscimo de magma (Figura 3.14(d)), corresponde a um 30 % do volume do corpo totalmente cristalino ($f = 0$), um 62 % do volume do corpo em estado liquido ($f > 0,5$), e o percentagem restante do corpo (8%) está entre altamente cristalino e estado pastoso ($0 < f < 0,5$).

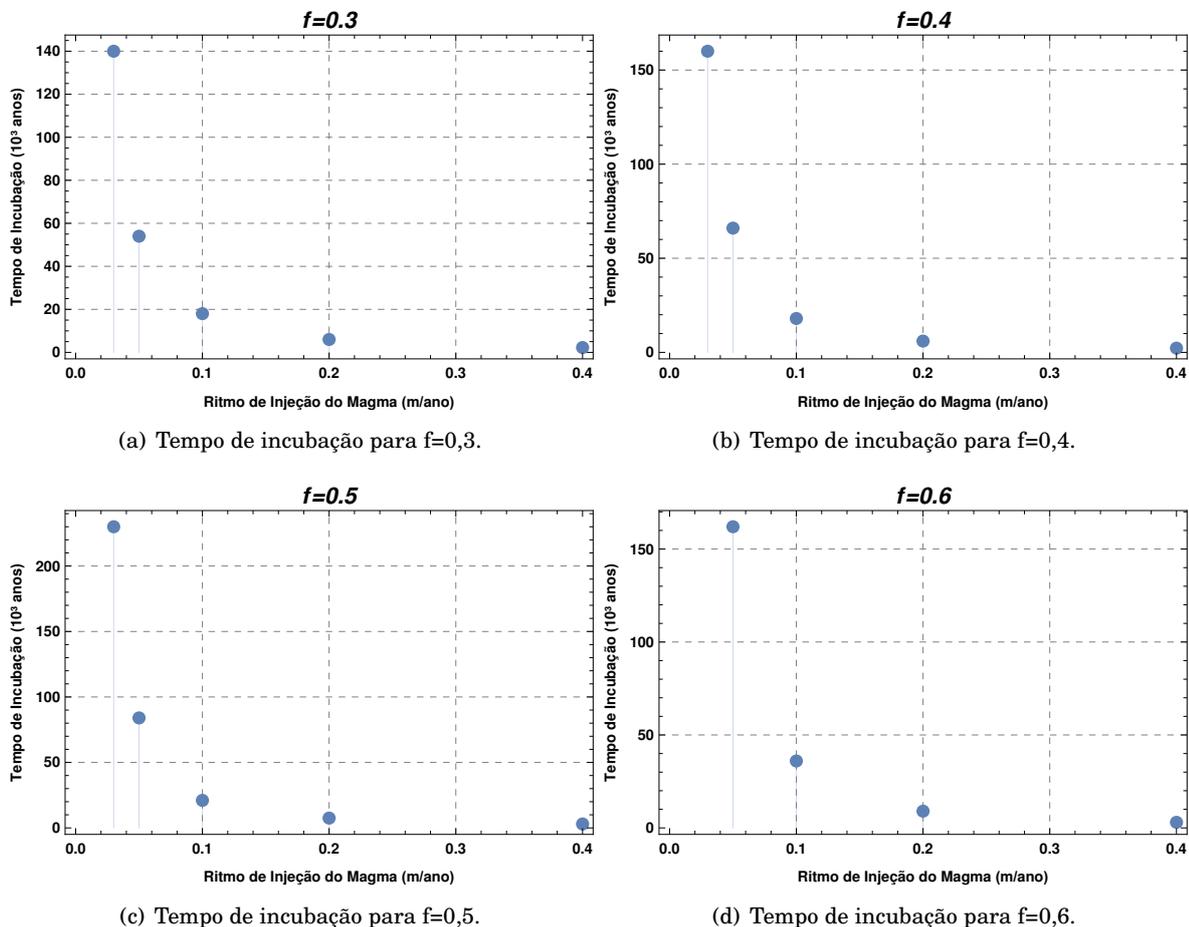


Figura 3.15. Tempos de incubação para diferentes frações de fusão para a injeção de magma de tonalito em uma crosta de grauvaca.

Da análise direto dos dados se pode concluir que as primeiras quatro injeções de magma se solidificam totalmente depois de ser introduzidas é somente a partir da quinta injeção de magma (15 000 anos) uma parte do corpo atinge a temperatura de solidus. O processo de retenção

de material parcialmente fundido ($f > 0,3$) começa a partir da sexta injeção de magma (18 000 anos), estado que dura até a sétima injeção de magma (25 000 anos), quando se inicia a acumular material fluido ($f > 0,5$). Aos 36 000 anos uma pequena porção da câmara magmática pode iniciar o processo de convecção, já que atinge frações de fusão maiores do que 0,6 ($f > 0,6$). O tempo total de desenvolvimento do corpo até a última injeção de magma é de 102 000 anos e o tempo de resfriamento é de 383 500 anos tempo no qual todo o corpo alcança frações de fusão menores do que 0,3 ($f < 0,3$).

Na Figura 3.15 se classificam os tempos de incubação, já mencionados no início da seção, para os diferentes ritmos de acréscimo de magma na formação do corpo ígneo. Todos os ritmos de acreção provados formam uma câmara magmática com fração de fusão maior a 0,3 ($f < 0,3$) e chegam ter uma fração do corpo fluida ($f > 0,5$). O tamanho da câmara magmática aumenta proporcionalmente ao ritmo de injeção do magma, pois quanto menores os ritmos de injeção de magma aumenta o tempo para que o corpo ígneo atinga o equilíbrio térmico com a crosta e se solidifique. Somente o sistema com fluxo de 0,03 m/ano não atinge a temperatura necessária para acumular magmas com possibilidade de convecção ($f > 0,6$).

O segundo teste se fez com a composição da crosta superior igual à composição do magma sendo de tonalito. Analisaremos detalhadamente o modelo com ritmo de acréscimo de 0,1m/ano, na Figura 3.16 se apresenta a evolução da temperatura deste sistema. Antes de examinar o desenvolvimento da temperatura deve-se fazer ênfase nos erros que ocorram na interpolação de dados. Neste caso são facilmente percebidos como um retângulo preto nas bordas da crosta móvel. O erro é maior na interfase entre a crosta e o corpo ígneo do que o contato da crosta móvel com a crosta fixa. Isto em razão do maior gradiente de temperatura entre a crosta e o corpo ígneo. Através das múltiplas injeções de magma o erro se expande quando o solucionador entrega temperaturas negativas. Porém se analisará o desenvolvimento de este corpo já que perde calor principalmente pelas paredes laterais.

A evolução da temperatura do corpo ígneo deste sistema (Figura 3.16) é similar à evolução do sistema anterior (Figura 3.13), mas a temperatura máxima que atinge o corpo ígneo é menor em todo o desenvolvimento da simulação, fato que não é perceptível na escala de cores das figuras. Não obstante a evolução da temperatura na crosta móvel não é conclusivo pela má qualidade dos dados.

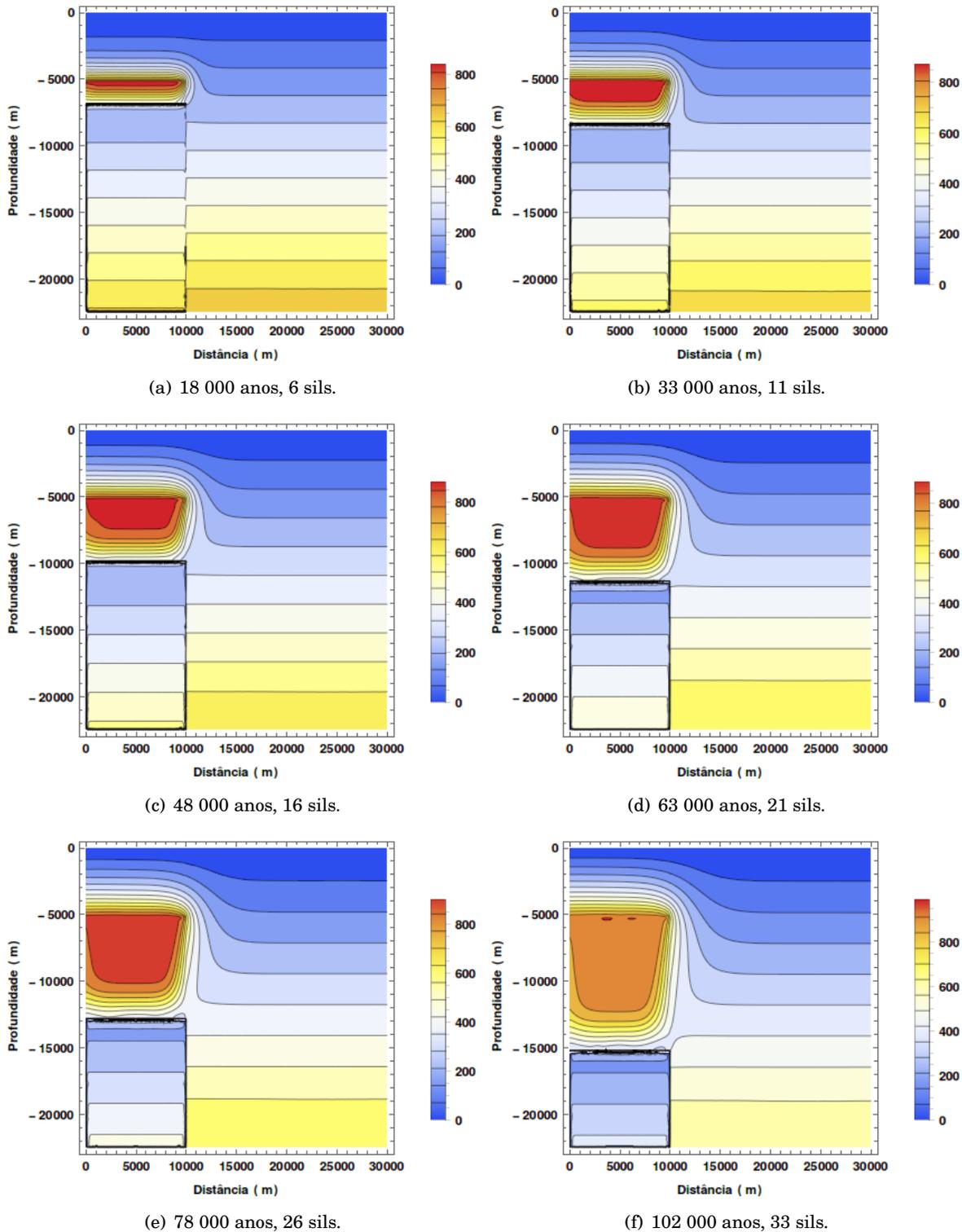


Figura 3.16. Evolução da temperatura na formação de um corpo ígneo em duas dimensões a um ritmo de 0,1 m/ano e com uma composição uniforme de tonalito.

Para este ritmo de acréscimo de 0,1 m/ano as primeiras 4 injeção de magma se solidificam totalmente depois de intrudidas e somente a partir da quinta injeção magma (15000 anos) uma pequena porção do corpo atinge a temperatura de solidus. O processo de retenção de material parcialmente fundido ($f < 0,3$) inicia a partir da sexta injeção de magma (18 000 anos), este estado dura até a decima injeção (30000 anos) quando começa acumular material fluido ($f < 0,5$), aos 75 000 anos uma pequena porção da câmara magmática pode começar o processo de convecção. O tempo total de desenvolvimento do corpo até a ultima injeção de magma é de 102 000 anos e o tempo de resfriamento é de 477 000 anos.

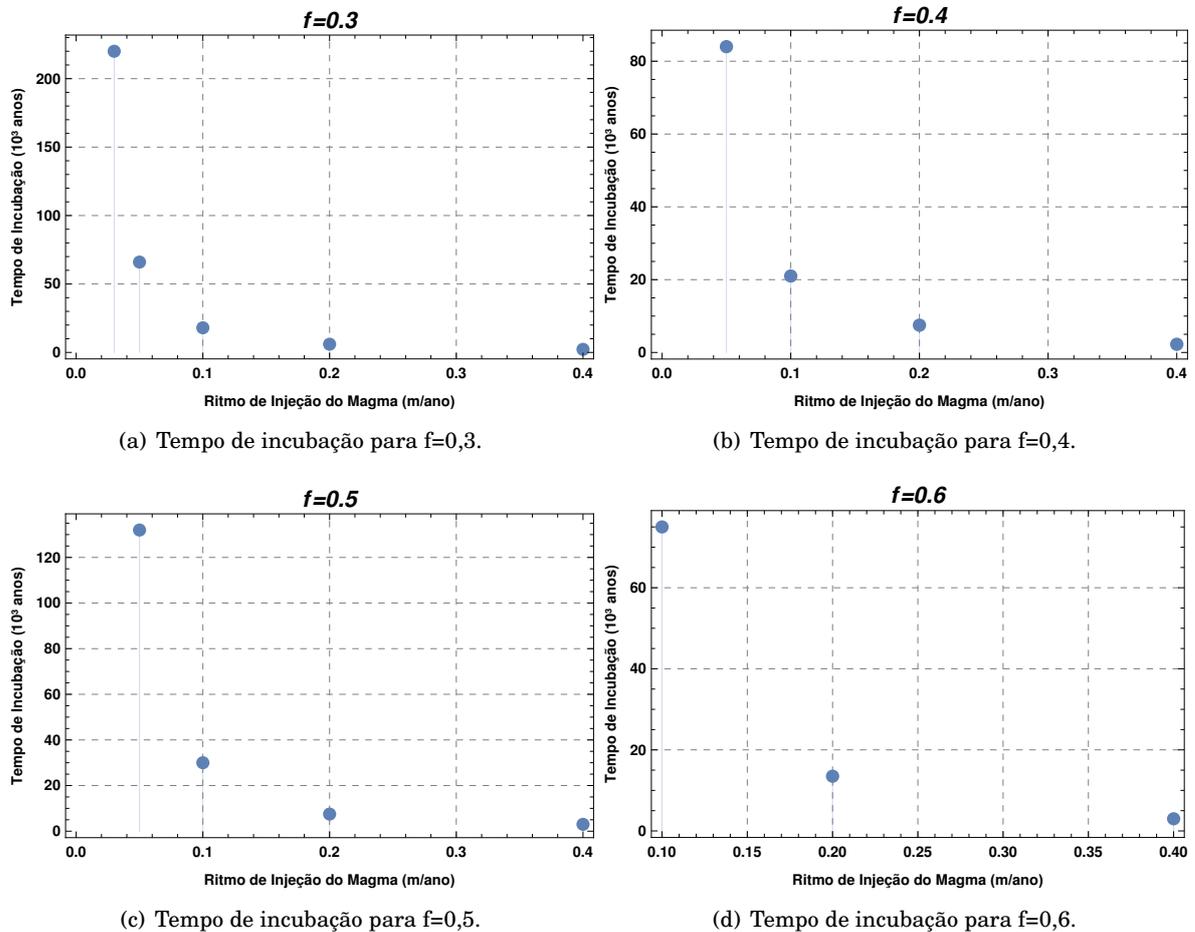


Figura 3.17. Tempos de incubação para diferentes frações de fusão para uma Crosta e magma injetado de tonalito.

A distribuição da fração de fusão quando termina o processo de acréscimo de magma , corresponde a um 30 % do volume totalmente cristalino ($f = 0$), 54 % do volume do corpo em estado liquido ($f > 0,5$), o percentagem restante do corpo está entre altamente cristalino e estado pastoso.

Na Figura 3.17 se classificam os tempos de incubação para diferentes ritmos de acréscimo de magma na formação do corpo ígneo. Se pode observar que para o ritmo de injeção de magma de 0,03 m/ano nunca atinge uma fração de fusão maior a 0,3 ($f < 0,3$), e dizer que permanece ao longo do tempo em um estado altamente cristalino ou em forma de reservatório de fusão e formara finalmente um *plutón*. O sistema com o ritmo de injeção de magma de 0,05 m/ano atinge o estado de cristal pastoso ($0,3 < f < 0,5$) aos 66 000 anos e o estado de fluido, $f = 0,5$, aos 132 000 anos, esta é a fração de fusão máxima para este sistema, portanto no terá convecção mas formara uma câmara magmática. Os sistemas com ritmo de acresção maior que 0,1 m/ano desenvolvem rapidamente porções fluidas e com possibilidade de convecção, portanto formam câmaras magmáticas com possibilidade de alimentar uma erupção magmática de menor magnitude quanto menor o ritmo de acresção do magma.

Nestes sistemas se pode observar que o corpo ígneo em desenvolvimento está conformado simultaneamente por rochas totalmente solidificadas na parte inferior do corpo, por zonas parcialmente fundidas (zonas pastosas), e zonas de magma fluido na parte superior do corpo e que conforma a câmara magmática.

Modelo do grande tanque

Um volume de magma equivalente a uma câmara magmática não pode ser injetado instantaneamente na crosta superior, pelo contrário se desenvolve através de múltiplas injeções de magma em forma de sils que são alimentados por diques. A evolução geométrica da câmara magmática depende das condições termo-mecânicas da crosta como a taxa de deformação, a tensão no meio e o esforço regional, da profundidade e do tamanho dos pulsos de magma injetado (Sparks and Cashman, 2017). O espaço necessário na crosta para a introdução de magma é gerado por sobrepressão do fluido que dobra, deforma e fratura as rochas encaixantes. Por exemplo uma câmara magmática formada por acréscimo de sils pode evoluir em forma de um esferóide oblato¹ devido à pressão do magma flexiona o chão e o teto da câmara dando-lhe essa geometria (Gudmundson, 2012; Annen et al., 2015). Este tipo de câmara magmática é a mais comum e tem sido encontrada em áreas vulcânicas e zonas de rifte.

Neste capítulo, será apresentado um modelo conceitual simples de resfriamento de uma intrusão instantânea de grande volume que foi chamada modelo do grande tanque por A. F. Glazner (2004). Câmaras magmáticas em forma de esferóide prolato² estão principalmente relacionadas com corpos cilíndricos como condutas que são conhecidas como agulhas vulcânicas quando se encontram expostos em estado sólido. Por outro lado as câmaras magmáticas esféricas se formam quando o esforço regional na crosta é isotrópico, ou como uma pequena câmara magmática remanescente produto do resfriamento de uma câmara magmática maior e de uma forma original diferente (Gudmundson, 2012). A geometria da câmara magmática influencia a distribuição da temperatura na rocha encaixante e portanto suas propriedades reológicas que dependem da tem-

¹O esferóide oblato é um volume gerado pela rotação de uma elipse em torno do seu eixo menor.

²O esferóide prolato volume gerado pela rotação de uma elipse em torno do seu eixo maior.

peratura. Os modelos termomecânicos se utilizam principalmente para encontrar as propriedades viscoelásticas da crosta e portanto sua possível deformação, para calcular a sobrepressurização por causa da recarga de magma ou exsolução de voláteis (Gregg et al., 2012, 2013; Del Negro et al., 2009).

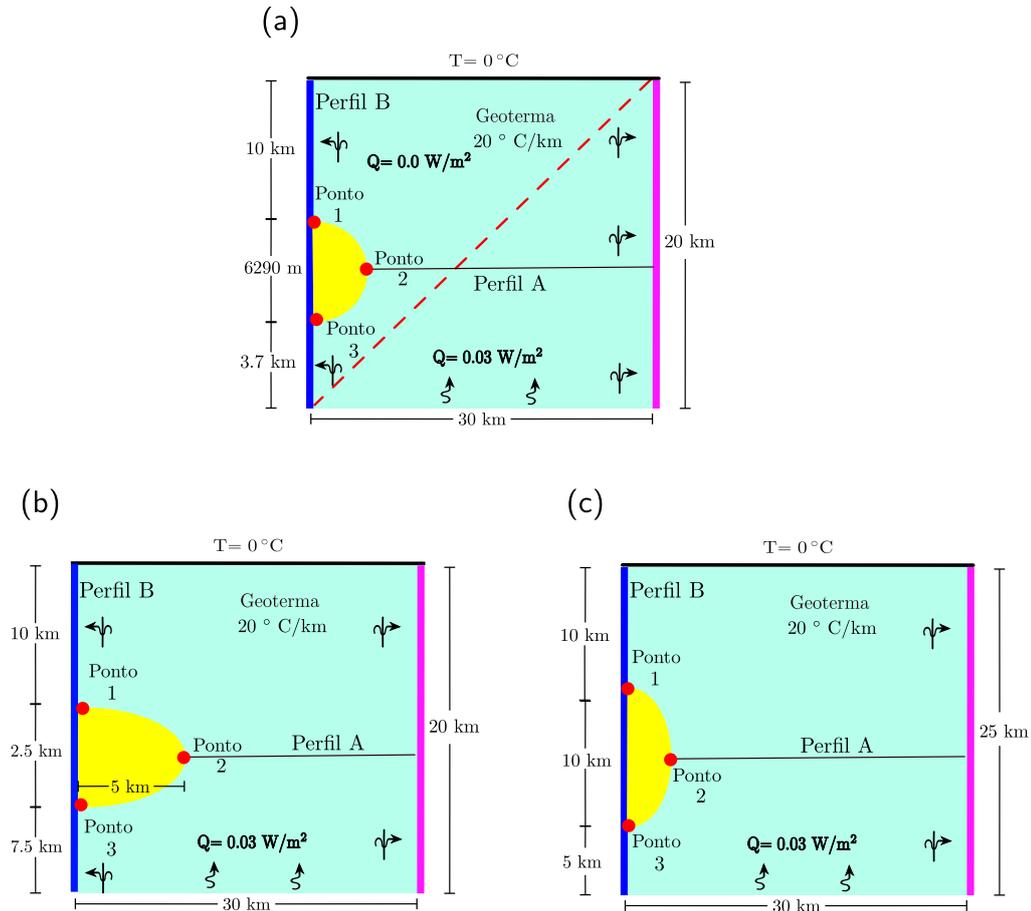


Figura 4.1. Parâmetros geométricos das câmaras magmáticas, esférica (a), oblata (b) e prolata (c) e condições iniciais e de contorno impostas sobre os limites da crosta superior. O perfil A corresponde a um afastamento horizontal do centro das câmaras magmáticas, o perfil B corresponde ao eixo de do rotação das figuras plana ou eixo de simetria das câmaras.

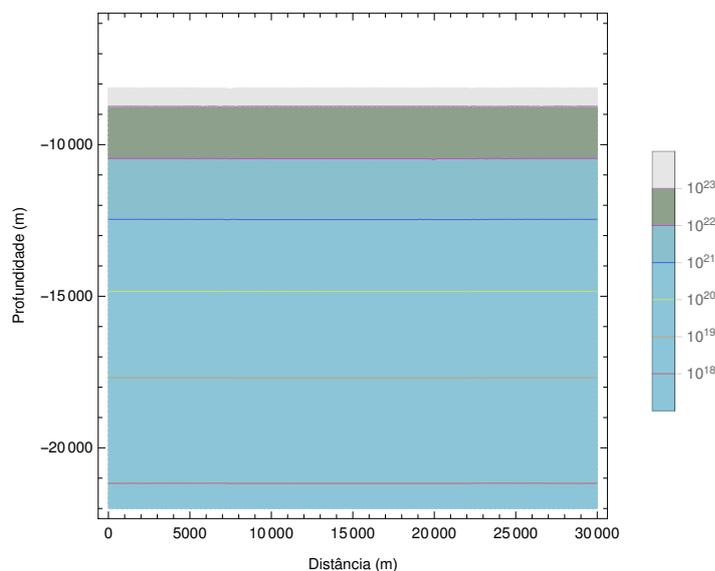
4.1 Modelo de resfriamento de câmaras magmáticas

No presente capítulo desenvolvemos um modelo para o resfriamento de câmaras magmáticas com três geometrias simples: esfera, esferóide oblato e esferóide prolato na crosta superior, onde a atividade magmática é principalmente de carácter silícico. Este é um modelo em duas dimensões e axissimétrico, o que quer dizer, com simetria axial em relação com o eixo z como se apresenta na Figura 4.1.

Tabela 4.1. Dimensões das câmaras magmáticas de volume $130,89 \text{ km}^3$.

Corpo	a km	c (eixo de rotação) km
Esfera	3,5	-
esferóide Oblato	5,0	1,25
esferóide Prolato	2,5	5,0

Com o objetivo de comparar o efeito da geometria na evolução da temperatura no sistema câmara magmática-crosta, o volume inicial das câmaras magmáticas é igual para todas elas e equivalente a $130,89 \text{ km}^3$, na Tabela 4.1 se apresentam as dimensões das câmaras magmáticas. Além disso o modelo é calculado para duas profundidades do topo da câmara magmática: 5 km e 10 km. A este tipo de câmara magmática na crosta superior, entre os 3 - 10 km de profundidade, se associam alguns fenômenos como deformação do terreno, tremores rasos e emissões de gases (Sparks and Cashman, 2017). A introdução do magma na câmara é instantânea e sua temperatura inicial é a temperatura do liquidus, por outro lado temperatura inicial da crosta é definida por um gradiente geotérmico de $20 \text{ }^\circ\text{C/km}$. A condutividade térmica e o calor específico da crosta superior são novamente estabelecidos pelas equações 3.4 e 3.5. Os demais parâmetros do modelo se apresentam na Tabela 3.2. O fluxo lateral de calor é zero no eixo de simetria e nos pontos afastados do eixo na crosta, estes limites são apresentados de roxo na Figura 4.1. O fluxo de calor da crosta inferior para a crosta superior é $Q = 0.03 \text{ W/m}^2$ (Douglas et al., 2016; Rodríguez et al., 2015) enquanto a superfície tem temperatura fixa de $T(0, t) = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ como se mostra na Figura 4.1.

**Figura 4.2.** Valores da viscosidade das rochas da crosta superior segundo o modelo de Arrhenius e um gradiente geotérmico de $20 \text{ }^\circ\text{C/km}$

A evolução térmica do sistema, representada pela variação da temperatura no espaço e no tempo $T(x, y, t)$, pode ser encontrada com a solução da equação de condução de calor sem mudança de estado (equação 2.7), ou com mudança de estado (equação 2.13), aplicadas tanto na crosta como na câmara magmática. O transporte de calor no magma e na rocha encaixante ocorre apenas por condução. O magma injetado tem de novo uma composição próxima ao tonalito com 6,0 wt% de H_2O , uma temperatura de solidus de $760^\circ C$ e uma temperatura de liquidus de 990° , e sua fração de fusão é estabelecida por a equação 3.6, enquanto a composição da crosta superior é novamente de grauvaca cuja fração de fusão é dada por a equação 3.2. O problema em duas dimensões foi resolvido com o método de elementos finitos com ajuda do solucionador FreeFem++, os detalhes podem ser revisados no apêndice B.

Tabela 4.2. Parâmetros utilizados na fórmula de Arrhenius.

Símbolo	Descrição	Valor
A_D	Parâmetro de Dorn	10^9 Pa s
E_A	Energia de ativação	120 000 J/mol
R	Constante molar dos gases	8,314 J/(mol K)

Seguindo o procedimento descrito em Douglas et al. (2016) e Rodríguez et al. (2015) se analisa a temperatura e a viscosidade nos perfis A e B apresentadas nas Figuras 4.1 (b) e (c), igualmente nos pontos 1, 2 e 3 amostrados na Figura 4.1 (c). Estes pontos estão localizados na rocha encaixante a 50 m do contato com a câmara magmática.

Com o objetivo de explorar as propriedades reológicas básicas dependentes da temperatura na rocha encaixante se calcula a viscosidade da crosta com a formula de Arrhenius:

$$v = A_D e^{E_A/RT} \quad (4.1)$$

onde A_D é o parâmetro de Dorn, E_A é a energia de ativação e R e constante molar dos gases, seus valores são apresentados na Tabela 4.2. Deve-se de notar que esta formulação para a viscosidade depende somente da temperatura, porém nos magmas a viscosidade também depende fortemente da quantidade de cristais formados no processo de solidificação do magma. Segundo esta formulação a viscosidade para a crosta superior varia entre 10^{18} em profundidades de 22 km a 10^{24} Pa s em profundidades de 8 km como se pode observar na Figura 4.2.

Este é um modelo básico que não inclui muitos fenômenos presentes na evolução de uma câmara magmática tais como a circulação hidrotermal, convecção, exsolução de voláteis, e reabastecimento de magma entre outros, que pode, porém ser integrado a modelos mais complexos.

4.1.1 Resultados

Definimos o tempo de resfriamento de um corpo ígneo como o tempo no qual todo o volume do corpo atinge uma fração de fusão menor a 0,3 ($f < 0,3$), dito de outro modo, quando todo o corpo se encontra em um estado altamente cristalino (Annen et al., 2015). Sob esta definição a câmara magmática oblata se resfria mais rapidamente do que as outras geometrias, tanto se é introduzida nos 5 km ou nos 10 km de profundidade. A geometria que toma mais tempo em se resfriar é a câmara prolata. Está informação pode ser conferida na Tabela 4.3 onde se apresentam os tempos de resfriamento para cada caso. O tempo de resfriamento das câmaras magmáticas introduzidas nos 5 km de profundidade é menor do que o tempo de resfriamento das câmaras magmáticas introduzidas nos 10 km de profundidade, isto devido a que a temperatura da crosta aumenta com a profundidade ao mesmo tempo que a condutividade térmica diminui. Além disso uma espessura maior de cobertura representa uma resistência térmica maior no fluxo de calor.

Tabela 4.3. Tempo de resfriamento para diferentes geometrias e profundidades do topo da câmara magmática.

Geometria	5 km	10 km
Esfera	105,6± 0.04 ka	118,4± 0.04 ka
Esferóide Oblato	31,2± 0.04 ka	35,6± 0.04 ka
Esferóide Prolato	118,799± 0.04 ka	136,400± 0.04 ka

A Figura 4.3 apresenta os resultados da evolução da temperatura e da viscosidade para a câmara magmática esférica, onde a coluna esquerda mostra os resultados para uma profundidade do topo da câmara de 10 km enquanto a coluna da direita mostra os resultados para o topo da câmara de 5km. As Figuras 4.3 (a) e (b) apresentam a geoterma no eixo de simetria em diferentes tempos e as Figuras 4.3 (c) e (d) apresentam a geoterma no perfil A em diferentes tempos. Por sua vez as Figuras 4.3 (e) e (f) apresentam a evolução da viscosidade no perfil A. Esta mesma organização das figuras se mostra nas Figuras 4.4 para a câmara magmática oblata e 4.5 para a câmara magmática prolata.

Nas Figuras 4.3, 4.4, 4.5 (a) e (b) se pode notar que a temperatura da geoterma aumenta no nível onde o corpo ígneo é introduzido sem importar sua geometria. Conforme passa o tempo a temperatura da rocha encaixante aumenta enquanto a temperatura da câmara magmática diminui pela liberação de calor latente e calor sensível produto da cristalização do magma. A câmara magmática oblata induz um gradiente de temperatura maior na geoterma comparada com as outras geometrias, mas durante menos tempo.

A Figura 4.6 apresenta na coluna esquerda a distribuição de temperatura para a esfera, esferóide oblato e esferóide prolato para um tempo de resfriamento de. Na coluna direita é apresentada a distribuição de fração de fusão na câmara magmática no mesmo instante. A figura

b cooresponde a uma câmara esférica, a Figura (d) a uma câmara oblata e a figura a uma câmara prolata.

Das Figuras 4.3, 4.4, 4.5 (a), (b), (c) e (d) junto com as Figuras 4.6 se pode observar que o resfriamento das câmaras magmáticas se dá de forma radial, o que quer dizer que primeiro se resfria a fronteira da câmara magmática que está em contato com a rocha encaixante e a temperatura aumenta conforme diminui o raio da câmara magmática. Dado que a fração de fusão só depende da temperatura se forma no contato um tipo de crosta ou zona pastosa ($0,3 < f < 0,5$) onde ocorre a cristalização do magma (Figura 4.6 (b), (d) e (f)), cujo frente de solidificação ($f < 0,3$) avança para o centro conforme o calor flui para fora da câmara. Esta crosta é mais grossa na parte superior da câmara devido a seu resfriamento mais rápido do que a parte inferior da câmara (Figuras 4.3, 4.4, 4.5 (a)).

O aumento lateral da temperatura no perfil A atinge uma distância média de 10000 m nas câmaras esférica e prolata com um aumento de 1°C do valor normal da geoterma e um incremento de 100°C nos 5700 m. Na câmara oblata o aumento de 1°C na temperatura no perfil A ocorre aproximadamente nos 8800 m e um aumento de 100°C ocorre aproximadamente nos 5700 m (Figuras 4.3, 4.4, 4.5 (b), (e)).

A distribuição da viscosidade na rocha encaixante nos pontos 1, 2 e 3 indicados na Figura 4.1 pode ser estudada a partir do valor da temperatura e da equação 4.1. Na Figura 4.6 são apresentados os valores de viscosidade quanto toda a câmara magmática atinge uma fração de fusão menor do que 0,3 ($f < 0,3$).

Em geral o aumento da temperatura na vizinhança da câmara magmática têm como resultado a diminuição da viscosidade da rocha encaixante formando uma auréola dúctil. As temperaturas máximas nos pontos 1 e 3 se atingem no esferóide oblato em ambas profundidades alcançando viscosidades da ordem de 10^{16} Pa s, diminuindo até 6 ordens de magnitude a viscosidade da crosta, por outro lado a máxima temperatura no ponto 2 se alcança na câmara prolata alcançando viscosidades de até de 10^{15} Pa s na parede lateral da rocha encaixante, enquanto seu topo não atinge valores de temperatura nem viscosidade comparáveis com as outras geometrias. Nas câmaras magmáticas esféricas o gradiente de temperatura e de viscosidade não é tão pronunciado entre os pontos 1, 2, e 3.

Em geral se atingem viscosidades menores ao redor das câmaras magmáticas introduzidas nos 10 km de profundidade, isto devido a que a temperatura de geoterma maior nesta profundidade e na qual se adiciona o aumento da temperatura pela câmara magmática.

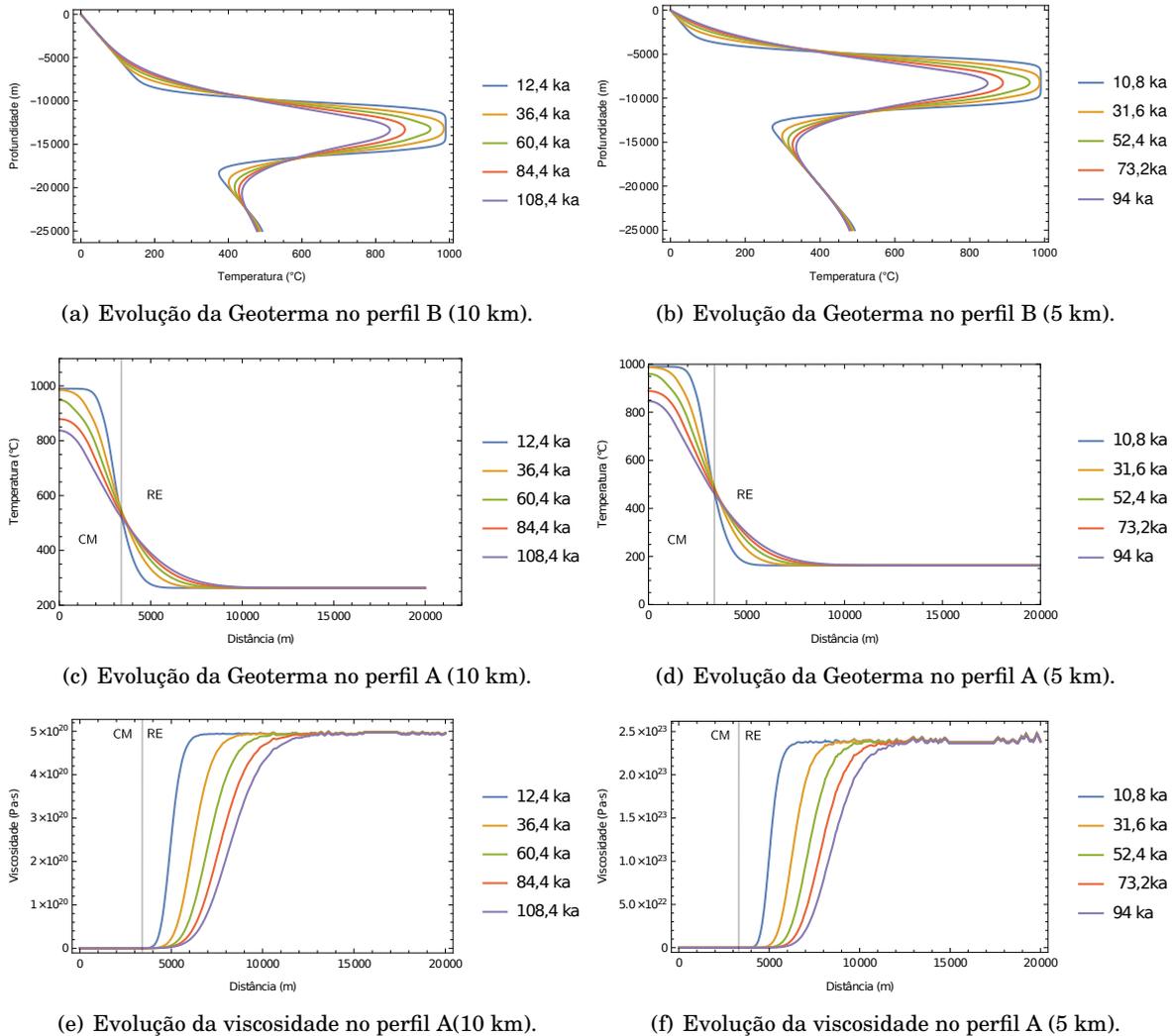
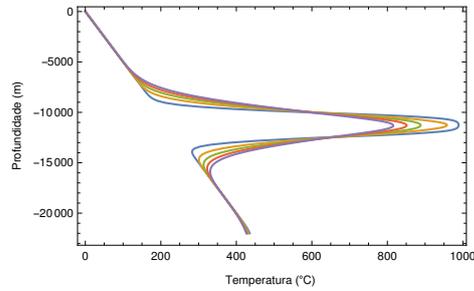
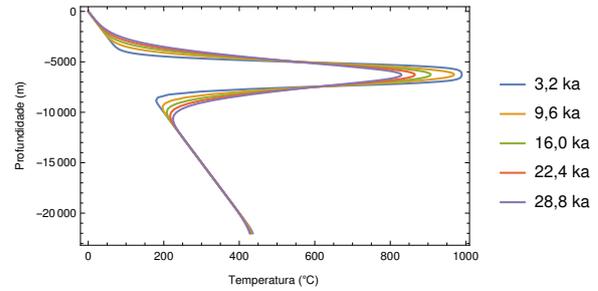


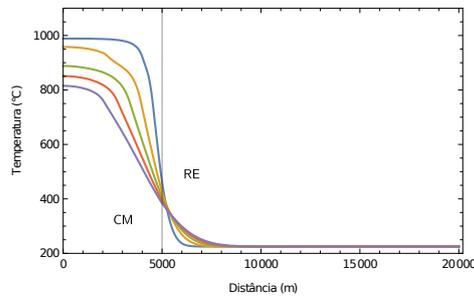
Figura 4.3. Variação da temperatura e da viscosidade para o sistema câmara magmática esférica-crosta ao longo do eixo de simetria (perfil B) e do eixo horizontal (perfil A) como função do tempo desde o início do resfriamento da câmara magmática até sua cristalização completa. A coluna da esqueldeira cooresponde ao topo da câmara de 10 km de profundidade e a coluna da direita cooresponde ao topo da câmara a 5 km de profundidade. A linha vertical cinza mostra o limite entre a câmara magmática (CM) e a rocha encaixante (RE).



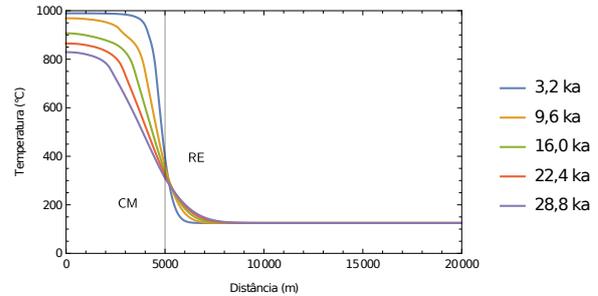
(a) Evolução da Geoterma no perfil B (10 km).



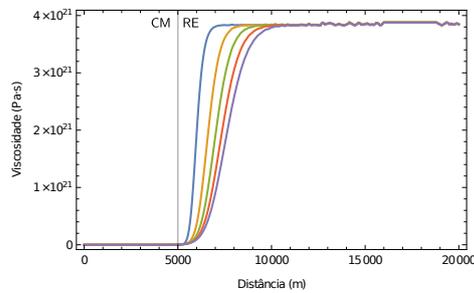
(b) Evolução da Geoterma no perfil B (5 km).



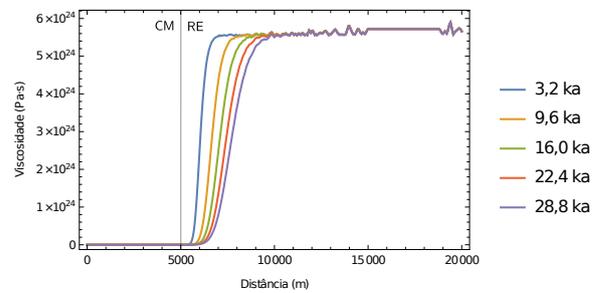
(c) Evolução da Geoterma no perfil A (10 km).



(d) Evolução da Geoterma no perfil A (5 km).

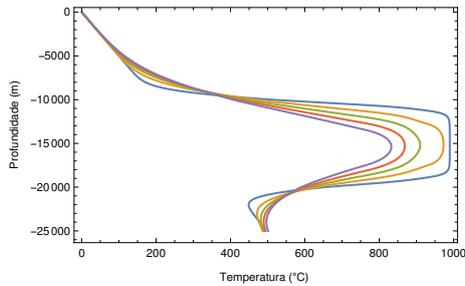


(e) Evolução da viscosidade no perfil B (10 km).

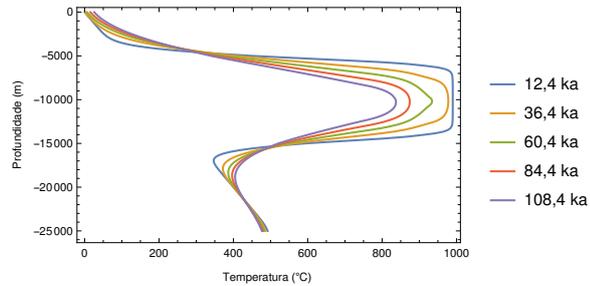


(f) Evolução da viscosidade no perfil A (5 km).

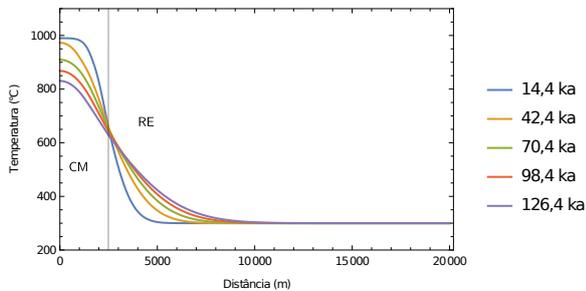
Figura 4.4. Variação da temperatura e da viscosidade para o sistema câmara magmática oblata-crosta ao longo do eixo de simetria (perfil B) e do eixo horizontal (perfil A) como função do tempo desde o início do resfriamento da câmara magmática até sua cristalização completa. A coluna da esquerda cooresponde ao topo da câmara de 10 km de profundidade e a coluna da direita corresponde ao topo da câmara a 5 km de profundidade. A linha vertical cinza mostra o limite entre a câmara magmática (CM) e a rocha encaixante (RE).



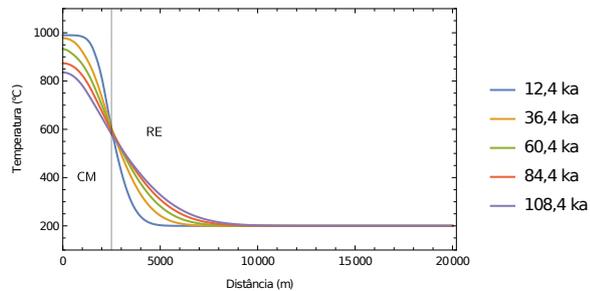
(a) Evolução da Geoterma no perfil B (10 km).



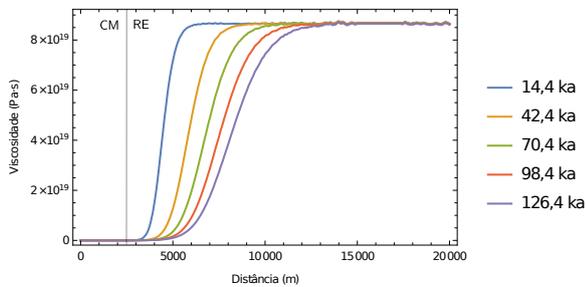
(b) Evolução da Geoterma no perfil B (5 km).



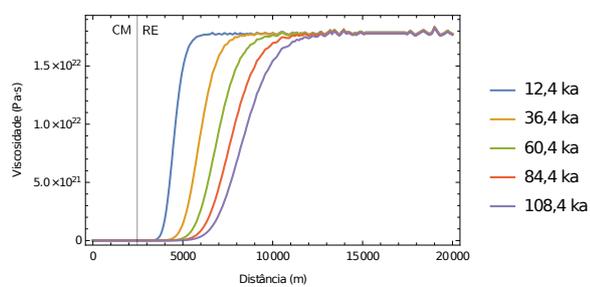
(c) Evolução da Geoterma no perfil A (10 km).



(d) Evolução da Geoterma no perfil A (5 km).

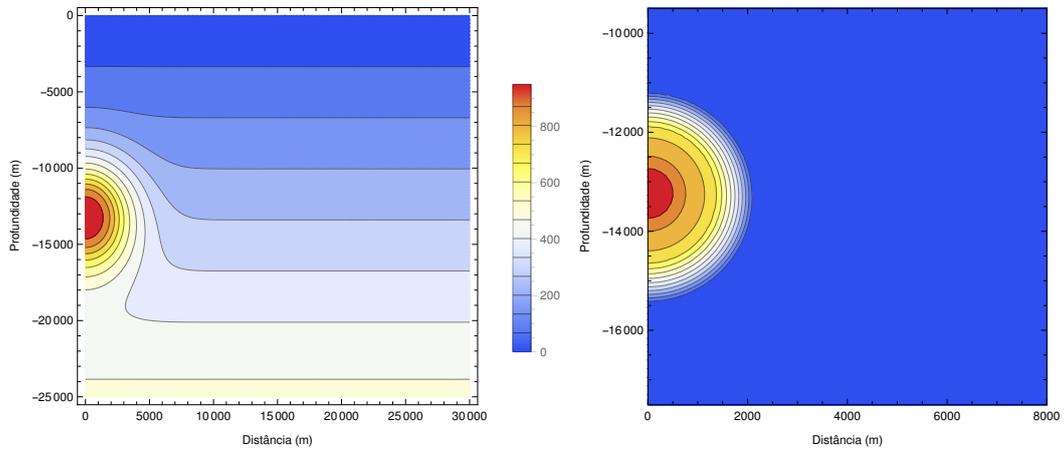


(e) Evolução da viscosidade no perfil A (10 km).

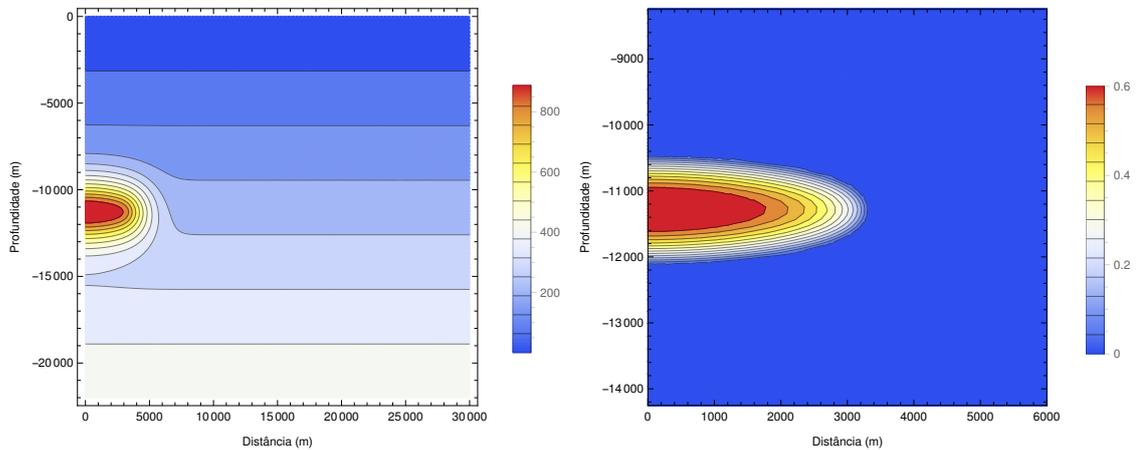


(f) Evolução da Geoterma no perfil A (5 km).

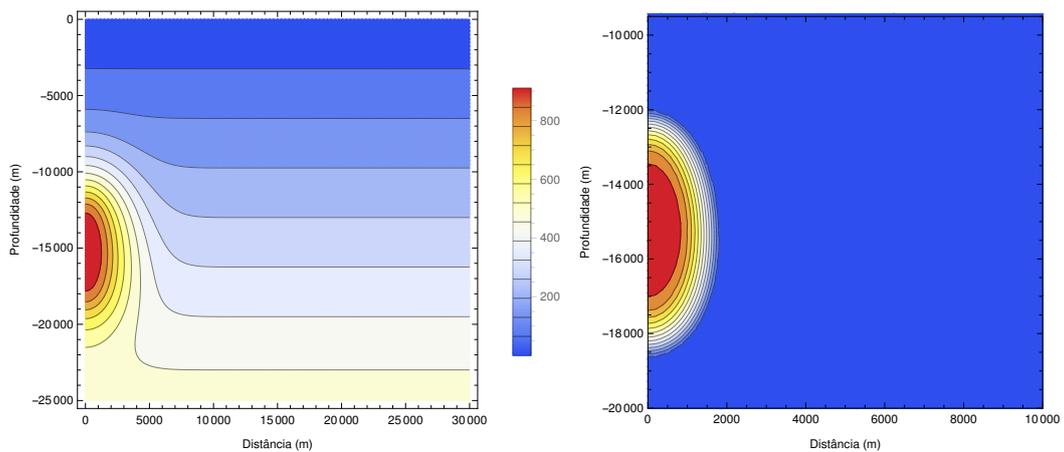
Figura 4.5. Variação da temperatura e da viscosidade para o sistema câmara magmática prolata-crosta ao longo do eixo de simetria (perfil B) e do eixo horizontal (perfil A) como função do tempo desde o início do resfriamento da câmara magmática até sua cristalização completa. A coluna da esquadra esquerda cooresponde ao topo da câmara de 10 km de profundidade e a coluna da direita corresponde ao topo da câmara a 5 km de profundidade. A linha vertical cinza mostra o limite entre a câmara magmática (CM) e a rocha encaixante (RE).



(a) Temperatura para a câmara magmática esférica 84,4 Ka (b) Fração de fusão para a câmara magmática esférica 84,4 ka.



(c) Temperatura para a câmara magmática oblata 28,4 Ka (d) Fração de fusão para a câmara magmática oblata 28,4 ka.



(e) Temperatura para a câmara magmática prolata 98,4 ka (f) Fração de fusão para a câmara magmática prolata 98,4 ka.

Figura 4.6. As figuras da coluna direita apresentam a distribuição da temperatura no processo de resfriamento das câmaras magmáticas introduzidas nos 10 km de profundidade, a coluna esquerda apresenta a distribuição da fração de fusão na câmara magmática no mesmo instante.

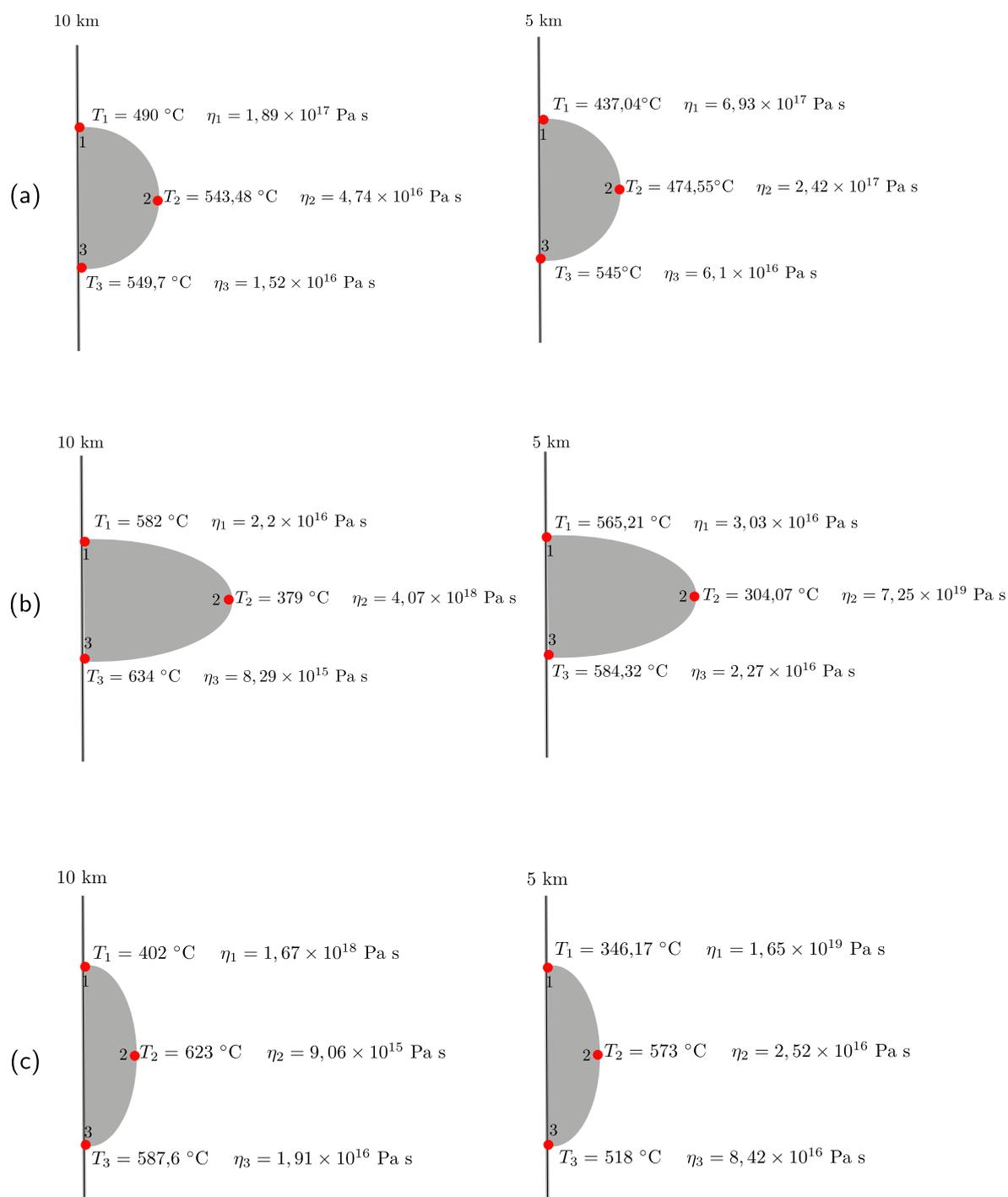


Figura 4.7. Valores da temperatura e da viscosidade nos pontos 1, 2 e 3 no momento de sua cristalização completa para (a) câmara magmática esférica, (b) câmara magmática oblata e (c) câmara magmática prolata.

Conclusões

Os modelos numéricos utilizados no desenvolvimento deste trabalho se mostraram úteis no estudo da evolução da temperatura dos sistemas magmáticos formados por acréscimo de sils ao longo da crosta.

A análise da formação de corpos ígneos na crosta inferior demonstra, apesar de ser um modelo ainda simples, que a evolução térmica deste tipo de sistemas é controlada em grande medida pela difusividade térmica das rochas encaixantes. Encontra-se que a maior difusividade na crosta inferior que na crosta superior não se permite a criação de corpos parcialmente fundidos ($f < 0,4$) que persistam no tempo através do mecanismo de acréscimo por baixo. Enquanto para o mecanismo de acréscimo por cima se encontra que é mais efetivo para manter o corpo em altas temperaturas e maiores frações de fusão ao longo do tempo de sua formação. A quantidade de água nestes sistemas afeta a distribuição de fluidos residuais ao longo do corpo, os magmas com maior conteúdo de água podem manter zonas pastosas ($f > 0,3$) e fluidas ($f > 0,5$) a temperaturas mais baixas.

Os resultados dos modelos numéricos desenvolvidos para a formação de corpos ígneos por acréscimo de sils na crosta superior mostram a formação do corpo com um ritmo de injeção do magma e as propriedades térmicas da rocha encaixante. Maiores fluxos de magma podem originar câmaras magmáticas com frações de fusão altas, os fluxos baixos formam corpos com frações de fusão baixas que evoluem em plutons. Estes resultados concordam com aqueles apresentados por Annen (2009) e Annen et al. (2015).

A distribuição da temperatura e da viscosidade ao redor das câmaras magmáticas depende da geometria destas. O aumento da temperatura na rocha encaixante cria um halo dúctil ou zona de

viscosidade reduzida que poderia afetar a estabilidade da câmara magmática.



Apêndice A

A.1 Método das diferenças finitas

No desenvolvimento deste trabalho se utilizou o método das diferenças finitas em uma dimensão com o objetivo de solucionar a equação de balanço de energia (entalpia) com mudança ou sem mudança de estado. O problema se amostra no capítulo 3 na Figura 3.1. A evolução térmica do sistema $T(y, t)$ pode ser encontrada com a solução das equações de condução de calor 2.7 e 2.13 com condições de fronteira e iniciais apropriadas.

Nas diferenças finitas se aproxima as derivadas de funções contínuas por uma versão discreta obtida com a expansão em series de Taylor ao redor de um ponto x_o :

$$f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + \frac{\partial f(x_o)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} \dots + \frac{\partial^n f(x_o)}{\partial x^n} \frac{(\Delta x)^n}{n!}, \quad (\text{A.1})$$

trancando a serie a partir do terceiro termo obtém-se a aproximação da primeira derivada por diferenças progressivas:

$$\frac{\partial f(x_n)}{\partial x} = \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta x} + \underbrace{O(\Delta x)}_{\text{erro de truncamento}} \rightarrow \text{Diferenças progressivas (DP)}. \quad (\text{A.2})$$

Trancando a serie a partir do quarto termo e junto com a equação A.2 obtém-se a aproximação da segunda derivada por diferenças centradas:

$$\frac{\partial^2 f(x_n)}{\partial x^2} = \frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}{(\Delta x)^2} + \underbrace{O((\Delta x)^2)}_{\text{erro de truncamento}} \rightarrow \text{Diferenças centradas (DC)} \quad (\text{A.3})$$

O seguinte passo é substituir as derivadas contínuas das equações 2.7 e 2.13 por suas aproximações discretas no espaço e no tempo. Os índices serão utilizados da seguinte maneira:

$$T_{i \rightarrow \text{Espaco}}^{n \rightarrow \text{Tempo}}$$

A derivada com respeito ao tempo (em um mesmo ponto do espaço) nas diferenças finitas podem ser expressadas por meio das diferenças progressivas:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(T_i^{n+1} - T_i^n)}{\Delta t}, \quad (\text{A.4})$$

e a derivada com respeito ao espaço (no mesmo instante de tempo) pode ser substituída com a aproximação de diferenças centradas :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})}{\Delta x^2}. \quad (\text{A.5})$$

Portanto a equação 2.7 pode ser escrita:

$$\rho c_p \frac{(T_i^{n+1} - T_i^n)}{\Delta t} = \kappa \frac{(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})}{\Delta x^2}. \quad (\text{A.6})$$

A equação A.6 se desenvolve em duas dimensões: no espaço unidimensional e no tempo. Estes devem-se discretizar em uma malha do tamanho do domínio espacial por o domínio temporal do problema. Na Figura A.1 se apresenta esta discretização, neste caso o eixo x representa a extensão espacial do corpo e o eixo y representa a extensão temporal do evento, que em este caso é o resfriamento de um corpo ígneo.

O método de solução da equação A.6 pode ser encontrada com vários tipos de esquema, neste problema utilizaremos o **esquema implícito** que tem a vantagem que é incondicionalmente estável. Na figura A.2 (a) se apresenta a organização do esquema implícito: a primeira fila corresponde aos valores iniciais da temperatura ao longo corpo ou no tempo atual, T^n (Temperaturas conhecidas), enquanto a segunda fila representa os valores que serão encontrados no seguinte passo de tempo, T^{n+1} (Temperaturas desconhecidas).

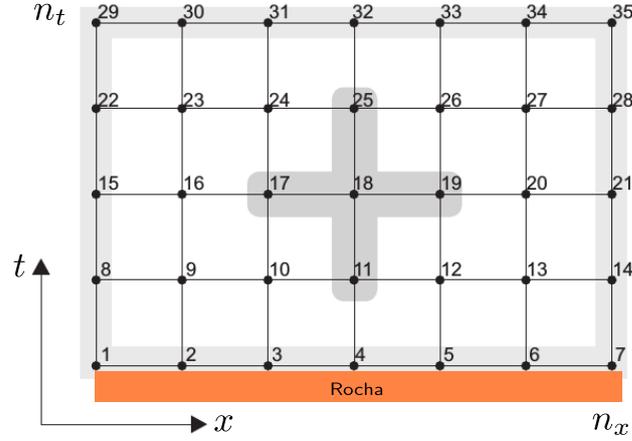


Figura A.1. Discretização do domínio espacial e temporal do problema de transferência de calor para uma rocha. O eixo x representa a extensão espacial do corpo, enquanto o eixo y representa o domínio espacial do desenvolvimento do problema.

Agora a equação A.6 é reorganizada de modo que os termos desconhecidos (T^{n+1}) fiquem na esquerda e os termos conhecidos na direita (T^n) obtendo :

$$-sT_{i+1}^{n+1} + (1 + 2s)T_i^{n+1} - sT_{i-1}^{n+1} = T_i^n, \quad (\text{A.7})$$

onde $s = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2}$. A equação A.7 tem um termo conhecido e três desconhecidos. Para encontrar todos os valores desconhecidos da temperatura, T^{n+1} , se forma um sistema de equações similares a A.7 com todos os pontos da malha como se mostra na Figura A.2 (b).

Se a temperatura do sistema esta entre a temperatura de solidus e a temperatura do liquido o sistema experimenta cristalização e cumpre-se a equação 2.13 que serão expressada em diferencias finitas da forma

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{DP} + \underbrace{\rho L \frac{\partial f}{\partial t}}_{DP} = k \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{DC} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\rho c_p}{\Delta t} (T_i^{n+1} - T_i^n) + \frac{\rho L}{\Delta t} \underbrace{(f_i^{n+1} - f_i^n)}_{3.3 \text{ ou } 3.1} = \frac{k}{\Delta x^2} (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})$$

Devido a que f depende da temperatura deve ser substituído pelas expressões 3.1 ou 3.3 dependendo do material e da faixa de temperatura do sistema. Reorganizando a equação A.8 no

esquema implícito obtemos

$$-\frac{S}{c} T_{i+1}^{n+1} + \frac{S'}{c} T_i^{n+1} - \frac{S}{c} T_{i-1}^{n+1} = T_i^n \quad (\text{A.9})$$

Onde as constantes S, S' e c são

$$S = \frac{k}{\Delta x^2}$$

$$c = \frac{\rho}{\Delta t} (c_p + Lm) \quad S' = 2S + C$$

O valor de m depende da faixa de temperaturas do sistema, para $T_a \geq T \geq T_s$ é $m = \frac{f_a}{T_a - T_s}$ e para $T_L \geq T \geq T_a$ é $m = 3.35f10^{-3}$.

Para cobrir todos os pontos da malha se forma um sistema de equações lineares com as equações A.8 ou A.9, uma equação para cada ponto de temperatura conhecida como se mostra na figura A.2.b.

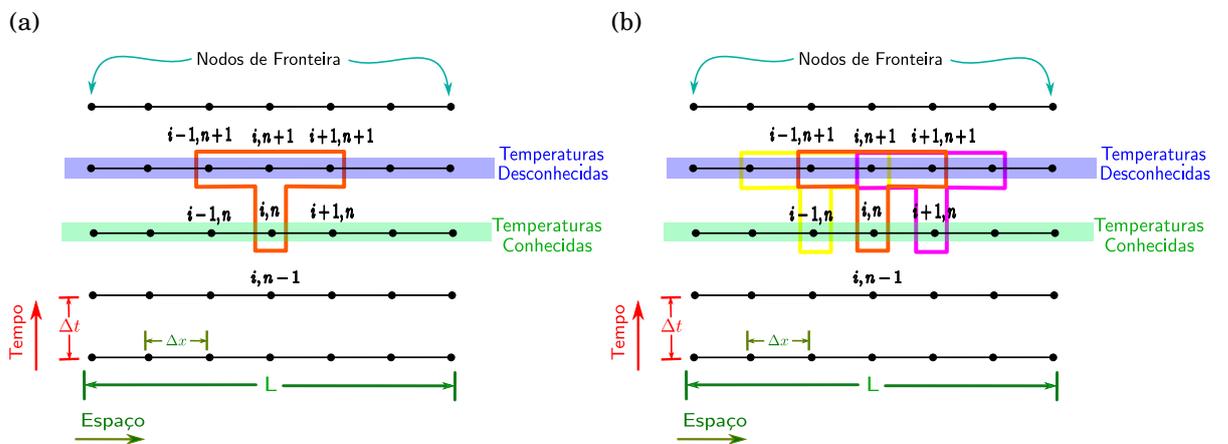


Figura A.2. Esquema de modelo implícito

— Condições de Contorno

Rocha	$\begin{pmatrix} -s & (1+2s) & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & (1+2s) & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & (1+2s) & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & (1+2s) & -s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	=	Condições Iniciais
Magma	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s}{c} & \frac{s'}{c} & -\frac{s}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s}{c} & \frac{s'}{c} & -\frac{s}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s}{c} & \frac{s'}{c} & -\frac{s}{c} \end{pmatrix}$	=	Condições Iniciais
	A		X = b

Figura A.3. Sistema de equações das diferenças finitas para o sistema magma-rocha encaixante.

As condições de contorno que fixam valores constantes para a solução da função $T(x, t)$ são chamadas **Condições de Dirichlet**. No modelo exposto esta condição de contorno se estabelece na superfície:

$$T(0, t) = 0 \rightarrow \text{Temperatura constante na superfície de } 0 \text{ C}$$

Também se pode fixar gradientes da função solução, $\frac{\partial T}{\partial x}$. Estas são chamadas as **Condições de Neuman**. No presente caso se fixa o fluxo de calor nas fronteiras do sistema dada por a lei de fourier: $\vec{q} = k \frac{\partial T}{\partial x}$. No sistema estudado existem dois condições de contorno de neuman:

1. $k_R \frac{\partial T}{\partial x} = k_M \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow$ Fluxo de calor contínuo entre a rocha e magma no contato.
2. $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \rightarrow$ Sem fluxo de calor no limite com o manto.

A.2 Método dos elementos finitos

Os problemas de resfriamento de magma de geometrias complexas estão sendo resolvidas com o método de elementos finitos com a ajuda do solucionador de equações diferenciais parciais FreeFem++ , escrito em C ++ (Hecht, 2012). Este método oferece mais flexibilidade na geometria da malha utilizando um gerador automático baseado no algoritmo Delaunay-Voronoi.

O método dos elementos finitos reduz o problema do contorno para equações diferenciais parciais a um sistema linear de equações, que pode ser resolvido com métodos da álgebra linear. Se o problema e dependente do tempo o problema pode ser resolvido utilizando o algoritmo de Euler ou Runge-Kutta. A linearização das equações diferenciais parciais é feita transformando-la em sua forma variacional ou formulação débil, fundamento matemático no qual é baseado o método (Gockenbach, 2006).

O problema de transferência de calor com mudança de fase pode ser transformado na forma variacional para ser resolvida por o método de elementos finitos e discretizado no tempo com o método de diferenças finitas. O procedimento é descrito a continuação.

O modelo de transferencial de calor dependente do tempo pode ser formulado com condições de contorno de dirichlet ou mistas da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial T^k}{\partial t} = \nabla^2 T^k + f^k & \text{em } \Omega \\ T = T_0 & \text{sobre } \partial\Omega \text{ para } t > 0 \\ T = I & \text{em } t = 0. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

A função f é a fonte de calor interna do sistema que pode depender do espaço e do tempo, igualmente T_0 . A discretização do tempo é feita por o método das diferenças finitas, que leva á formulação de múltiplas problemas estacionários. A letra \mathbf{k} denota a temperatura no tempo t_k . A derivado da temperatura no tempo pode ser aproximada com diferenças regressivas

$$\frac{T^k - T^{k-1}}{\Delta t} = \nabla^2 T^k + f^k. \quad (\text{A.11})$$

Neste passo a equação é reorganizada em termos conhecidos (do passo $k - 1$) e desconhecidos (do passo k):

$$\underbrace{T^k - \nabla^2 T^k}_{\text{Desconhecido}} = \underbrace{\Delta t f^k + T^{k-1}}_{\text{Conhecido}} \quad (\text{A.12})$$

Agora a precisa se de transformar estas equações em suas formulações variacionais. Multiplicamos toda a equação por a função de prova v

$$T^k v - \Delta t \nabla^2 T^k v = \Delta t f^k v + T^{k-1} v, \quad (\text{A.13})$$

integramos no domínio Ω . A integração é desenvolvida por partes e aplicamos o teorema de Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{T^k v}{\Delta t} - \int_{\Omega} \nabla^2 T^k \cdot v &= \int_{\Omega} f^k v + \int_{\Omega} \frac{T^{k-1} v}{\Delta t} - \int_{\Omega} \nabla^2 T^k \cdot v \\ &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla T^k - \underbrace{\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial T}{\partial r}}_{\text{nulo}}. \end{aligned}$$

A integral sobre a fronteira se faz zero por que função de prova e a solução da formulação variacional pertencem ao espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ com las condições

$$\begin{cases} \hat{V} &= \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ em } \partial\Omega\}, \\ V &= \{v \in H^1(\Omega) : v = T_0 \text{ em } \partial\Omega\}. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

chegando finalmente ao problema discreto-variacional para solucionar

$$\int_{\Omega} \frac{T^k v}{\Delta t} + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla T^k = \int_{\Omega} f^k v + \int_{\Omega} \frac{T^{k-1}}{v} \Delta t. \quad (\text{A.15})$$

No caso de transferência de calor para magmas o termo de mudança de fase $\frac{\partial f}{\partial t}$ dependente da temperatura, pode ser escrito como a função fonte de calor f . A fração de fusão para magmas utilizada para os novos cálculos, é extrapolado de dados para a composição tonalítica dos magmas (Annen et al., 2008). A forma explícita é

$$f_{Rocha} = \begin{cases} f = \frac{f(876)}{876-T_s} (T - T_s) & 876^\circ C > T > T_s \\ f = -4.668 \times 10^{-5} T^2 + 8.636 \times 10^{-2} T - 39.244 & 930^\circ C \leq T \leq 876^\circ C \\ f = \frac{1-f(930)}{T_L-930} (T - T_L) + 1 & T_L > T > 930^\circ C. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

A implementação desta expressão na equação A.15 pode ser feita com uma função degrau da forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= K_1 \frac{\partial T}{\partial t} \delta(T - T_s) \delta(T_1 - T) \\ &+ \left(K_2 T \frac{\partial T}{\partial t} + K_2 \frac{\partial T}{\partial t} \right) \delta(T - T_s) \delta(T_1 - T) \\ &+ K_4 \frac{\partial T}{\partial t} \delta(T - T_2) \delta(T_s - T) \end{aligned}$$

As malhas geradas por FreeFem ++ têm uma boa adaptação à geometria dos problemas propostos nesta dissertação, por exemplo uma câmara magmática esférica com axissimétrica ao redor do eixo z como se mostra na Figura A.4.

A.2.1 Fluxograma para a construção de um corpo ígneo por meio de acréscimo de sils

A figura A.5 se mostra o fluxograma dos programas feitos nesta dissertação, tanto para o método das diferenças finitas como dos elementos finitos na construção de corpos ígneos por acréscimo de sils.

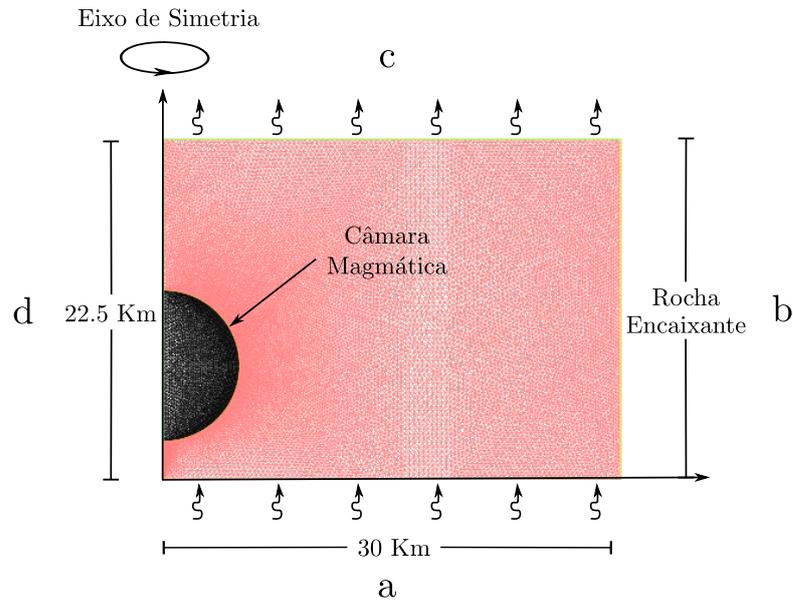


Figura A.4. Malha gerada por FreeFem++ para o problema axissimétrico da câmara magmática esférica.

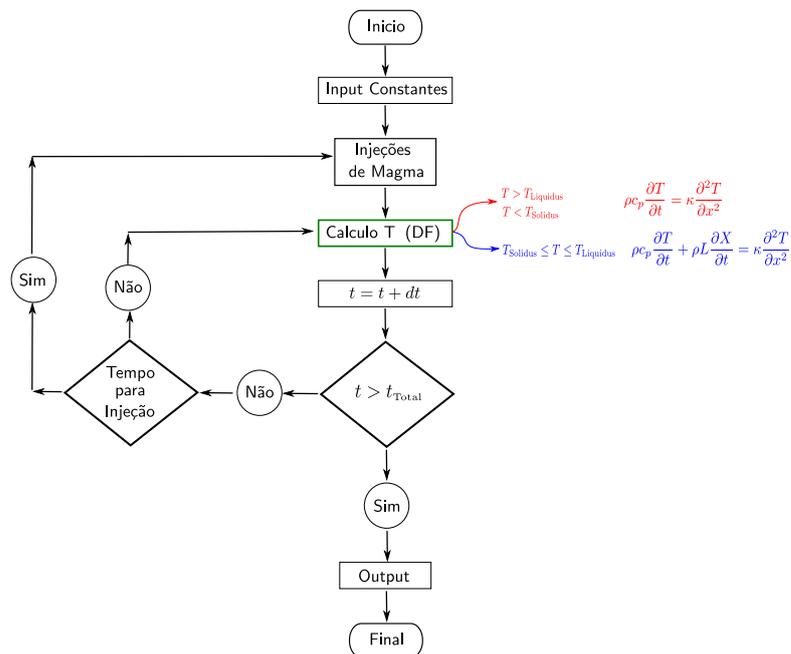


Figura A.5. Fluxograma para a construção de um corpo ígneo por meio de acréscimo de sils.

Apêndice B

O seguinte sistema de substituição de equações se reduzirá sequência de equações diferenciais ordinárias onde x_i é uma constante a ser determinada.

Para a solução da equação definimos a variável de similaridade

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}} \tag{B.1}$$

e procuramos uma solução da forma

$$T(x, t) = F(\xi) \tag{B.2}$$

Obtém-se suas derivadas no tempo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dF(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{B.3}$$

e

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{x}{t^{\frac{3}{2}}} \tag{B.4}$$

logo substituindo a equação B.4 e B.3:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dF(\xi)}{d\xi} \cdot -\frac{1}{2} \frac{x}{t^{\frac{3}{2}}} \tag{B.5}$$

Agora calculando suas derivadas no espaço são

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dF(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{B.6}$$

e

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.7})$$

Também a segunda derivada no espaço :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dF(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} \cdot \frac{1}{t} \quad (\text{B.9})$$

e substituindo na equação 2.9

$$\frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2\alpha_L} \cdot \frac{dF(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Nesta última equação se pode fazer de novo uma substituição de variáveis

$$P(\xi) = \frac{dF(\xi)}{d\xi} \quad P'(\xi) = \frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} \quad (\text{B.11})$$

Para chegar à seguinte equação diferencial ordinária :

$$P'(\xi) + \frac{\xi}{2\alpha_L} P(\xi) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Cuja solução se pode encontrar facilmente por separação de variáveis

$$P(\xi) = - \int_0^\xi \frac{\xi}{2\alpha_L} P(\xi) d(\xi) \quad (\text{B.13})$$

A solução para esta integral é a função exponencial

$$P(\xi) = - \exp^{\frac{-\xi^2}{4\alpha_L}} \quad \frac{dF(\xi)}{d\xi} = - \exp^{\frac{-\xi^2}{4\alpha_L}} \quad (\text{B.14})$$

e se define a função erro :

$$F(\xi) = B \int_0^\xi \exp^{\frac{-s^2}{4\alpha_L}} ds + C \quad (\text{B.15})$$

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp^{-s^2} ds \quad (\text{B.16})$$

Referências Bibliográficas

- D. S. Coleman W. Gray R. Z. Taylor A. F. Glazner, J. M. Bartley.
Are plutons assembled over millions of years by amalgamation from small magma chambers?
GSA Today, 2004.
- V. Alexiades and A. D. Solomon.
Mathematical modeling of melting and freezing processes.
Hemisphere Publishing Corporation, 1993.
- Catherine Annen.
From plutons to magma chambers: Thermal constraints on the accumulation of eruptible silicic magma in the upper crust.
Earth and Planetary Science Letters, 284(3):409–416, 2009.
- Catherine Annen and Robert Stephen John Sparks.
Effects of repetitive emplacement of basaltic intrusions on thermal evolution and melt generation in the crust.
Earth and Planetary Science Letters, 203(3):937–955, 2002.
- Catherine Annen, JD Blundy, and RSJ Sparks.
The genesis of intermediate and silicic magmas in deep crustal hot zones.
Journal of Petrology, 47(3):505–539, 2006.
- Catherine Annen, Michel Pichavant, Olivier Bachmann, and Alain Burgisser.
Conditions for the growth of a long-lived shallow crustal magma chamber below mount pelee volcano (martinique, lesser antilles arc).
Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 113(B7), 2008.
- Catherine Annen, Jonathan D Blundy, Julien Leuthold, and R Stephen J Sparks.
Construction and evolution of igneous bodies: Towards an integrated perspective of crustal magmatism.
Lithos, 230:206–221, 2015.
- F Bea.

Crystallization dynamics of granite magma chambers in the absence of regional stress: multiphysics modeling with natural examples.

Journal of Petrology, page egq028, 2010.

George W Bergantz.

Underplating and partial melting: implications for melt generation and extraction.

Science, 245(4922):1093–1095, 1989.

DS Chapman.

Thermal gradients in the continental crust.

Geological Society, London, Special Publications, 24(1):63–70, 1986.

Ciro Del Negro, Gilda Currenti, and Danila Scandura.

Temperature-dependent viscoelastic modeling of ground deformation: application to etna volcano during the 1993–1997 inflation period.

Physics of the Earth and Planetary Interiors, 172(3):299–309, 2009.

Madison M Douglas, Adelina Geyer, Antonio M Álvarez-Valero, and Joan Martí.

Modeling magmatic accumulations in the upper crust: Metamorphic implications for the country rock.

Journal of Volcanology and Geothermal Research, 319:78–92, 2016.

Bergantz G. W. Dufek, J.

Lower crustal magma genesis and preservation: a stochastic framework for the evaluation of basalt–crust interaction.

Journal of Petrology, 46(11):2167, 2005.

doi: 10.1093/petrology/egi049.

URL +<http://dx.doi.org/10.1093/petrology/egi049>.

Sarah E Gelman, Francisco J Gutiérrez, and Olivier Bachmann.

On the longevity of large upper crustal silicic magma reservoirs.

Geology, 41(7):759–762, 2013.

Mark S Gockenbach.

Understanding and implementing the finite element method.

Siam, 2006.

PM Gregg, SL De Silva, EB Grosfils, and JP Parmigiani.

Catastrophic caldera-forming eruptions: Thermomechanics and implications for eruption triggering and maximum caldera dimensions on earth.

Journal of Volcanology and Geothermal Research, 241:1–12, 2012.

PM Gregg, SL De Silva, and EB Grosfils.

Thermomechanics of shallow magma chamber pressurization: Implications for the assessment of ground deformation data at active volcanoes.

Earth and Planetary Science Letters, 384:100–108, 2013.

Guilherme AR Gualda, Mark S Ghiorso, Robin V Lemons, and Tamara L Carley.

Rhyolite-melts: a modified calibration of melts optimized for silica-rich, fluid-bearing magmatic systems.

Journal of Petrology, 53(5):875–890, 2012.

Agust Gudmundson.

Magma chambers: formation, local stresses excess pressures, and compartments.

J. Volcanol. Geotherm. Res., 2012.

Bradley R Hacker, Peter B Kelemen, and Mark D Behn.

Continental lower crust.

Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 43:167–205, 2015.

F. Hecht.

New development in freefem++.

J. Numer. Math., 20(3-4):251–265, 2012.

ISSN 1570-2820.

M Hort.

Cooling and crystallization in sheet-like magma bodies revisited.

Journal of Volcanology and Geothermal Research, 76(3):297–317, 1997.

Sparks R Stephen J Huppert, Herbert E.

The generation of granitic magmas by intrusion of basalt into continental crust.

Journal of Petrology, 29(3):599–624, 1988.

M. Jackson, J. Blundy, and S. Sparks.

Making mushy magma chambers in the lower continental crust: Cold storage and compositional bimodality.

In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, volume 19 of *EGU General Assembly Conference Abstracts*, page 10411, April 2017.

JC Jaeger.

The temperature in the neighborhood of a cooling intrusive sheet.

American Journal of Science, 255(4):306–318, 1957.

Claude Jaupart and Jean-Claude Mareschal.

Heat generation and transport in the Earth.

Cambridge university press, 2010.

Ozge Karakas, Wim Degruyter, Olivier Bachmann, and Josef Dufek.

Lifetime and size of shallow magma bodies controlled by crustal-scale magmatism.
Nature Geoscience, 10(6):446–450, 2017.

ESPER S Larsen.

Time required for the crystallization of the great batholith of southern and lower california.
1945.

Craig C Lundstrom and Allen F Glazner.

Silicic magmatism and the volcanic–plutonic connection.
Elements, 12(2):91–96, 2016.

BD Marsh.

On the crystallinity, probability of occurrence, and rheology of lava and magma.
Contributions to Mineralogy and Petrology, 78(1):85–98, 1981.

Bruce D Marsh.

Magma chambers.
Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 17(1):439–472, 1989.

Nokes Roger Martin, Daniel.

Crystal settling in a vigorously converting magma chamber.
Nature, 332(6164):534–536, 1988.

Othmar Muëntener, Peter B Kelemen, and Timothy L Grove.

The role of h₂o during crystallization of primitive arc magmas under uppermost mantle conditions and genesis of igneous pyroxenites: an experimental study.
Contributions to Mineralogy and Petrology, 141(6):643–658, 2001.

Kerry Petford, Nick e Gallagher.

Partial melting of mafic (amphibolitic) lower crust by periodic influx of basaltic magma.
Earth and Planetary Science Letters, 193(3):483–499, 2001.

Keith D. Putirka.

Down the crater: Where magmas are stored and why they erupt.
Elements, 13(1):11–16, 2017.

Spera Frank J. Raia, Federica.

Simulations of crustal anatexis: Implications for the growth and differentiation of continental crust.
Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 102(B10):22629–22648, 1997.

ISSN 2156-2202.

doi: 10.1029/97JB01589.

URL <http://dx.doi.org/10.1029/97JB01589>.

Carmen Rodríguez, Adelina Geyer, Antonio Castro, and Antonio Villaseñor.

Natural equivalents of thermal gradient experiments.

Journal of Volcanology and Geothermal Research, 298:47–58, 2015.

TW Sisson, K Ratajeski, WB Hankins, and Allen F Glazner.

Voluminous granitic magmas from common basaltic sources.

Contributions to Mineralogy and Petrology, 148(6):635–661, 2005.

JMS Solano, MD Jackson, RSJ Sparks, JD Blundy, and C Annen.

Melt segregation in deep crustal hot zones: a mechanism for chemical differentiation, crustal assimilation and the formation of evolved magmas.

Journal of Petrology, 53(10):1999–2026, 2012.

R Stephen J Sparks and Katharine V Cashman.

Dynamic magma systems: Implications for forecasting volcanic activity.

Elements, 13(1):35–40, 2017.

Donald L Turcotte and Gerald Schubert.

Geodynamics.

Cambridge University Press, 2014.

Labrosse Stéphane Coltice Nicolas Råback P Tackley PJ Ulvrová, Martina.

Numerical modelling of convection interacting with a melting and solidification front: Application to the thermal evolution of the basal magma ocean.

Physics of the Earth and Planetary Interiors, 206:51–66, 2012.

Alan G Whittington, Anne M Hofmeister, and Peter I Nabelek.

Temperature-dependent thermal diffusivity of the earth's crust and implications for magmatism.

Nature, 458(7236):319–321, 2009.

RA Wiebe and WJ Collins.

Depositional features and stratigraphic sections in granitic plutons: implications for the emplacement and crystallization of granitic magma.

Journal of Structural Geology, 20(9):1273–1289, 1998.

