

Universidade de São Paulo  
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas  
Departamento de Astronomia

Raphael Alves Silva

**Introdução à Teoria de Movimentos  
Ressonantes em Sistemas Planetários**

São Paulo



Raphael Alves Silva

# Introdução à Teoria de Movimentos Ressonantes em Sistemas Planetários

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia

Orientador(a): Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Tatiana Alexandrova Michtchenko.

**Versão corrigida. O original encontra-se disponível na Unidade.**

São Paulo



*Aos meus pais*



# Agradecimentos

A Deus, primeiramente, por me dar a força para continuar, e a sabedoria necessária para trilhar o caminho.

À minha família, por todo o apoio dedicado diante das escolhas que tomei em minha vida, desde o início de minha trajetória acadêmica, quando trilhei os primeiros passos da carreira científica. Por sempre terem acreditado em minha capacidade, e me estimulado a alcançar vãos maiores.

À professora Tatiana A. Michtchenko, por haver aceitado assumir o papel de ser minha orientadora e, ao longo desses dois anos, pela paciência, conselhos e auxílios durante o processo de desenvolvimento deste trabalho; por haver me indicado um caminho a tomar, nos momentos em que pensei haver chegado à becos sem-saída.

Aos professores Sylvio Ferraz-Mello e Ramachrisna Teixeira, por suas aulas, discussões e ensinamentos, vozes de sabedoria e experiência e verdadeiras inspirações para a minha carreira acadêmica.

Aos colegas do IAG: Ronaldo e Douglas, com quem dividi o espaço da sala E-307, e que compartilharam comigo os questionamentos e discussões que permeiam a cabeça do jovem pesquisador, seja no que tange os assuntos concernentes à pesquisa que desenvolvemos, seja quanto a assuntos muito mais profundos, perspectivas de carreira e vida profissional. Ao Paulo Jackson, que me acolheu e me deu muitas dicas sobre o Mestrado no IAG. Ao Hugo e ao Eduardo, membros mais experientes do grupo de Dinâmica Orbital, e que sempre se mostraram prontos a me auxiliar, no que fosse possível.

À minha segunda família, membros da República TFP (Tradição, Família e Propriedade), pelo ‘amor, carinho e dedicação’, e por haverem compartilhado de minhas angústias acerca de meu trabalho e das dificuldades inerentes, e diante disso, haverem me apoiado

e me aconselhado, ao longo de madrugadas regadas a cervejas e risadas. Minha gratidão aqui é dedicada a Alda, Gustavo, Guilherme, Felipe e Irapuan.

Ao IAG e seus funcionários, por contribuírem para o bom funcionamento da instituição, e para a manutenção de um ambiente de trabalho agradável.

*“O pensamento não passa de um clarão na noite; mas esse clarão representa tudo.”*

Henri Poincaré (1854-1912)

*“For it is the duty of an astronomer to compose the history of the celestial motions  
through careful and expert study.”*

Nicolaus Copernicus (1473-1543)



# Resumo

Neste trabalho, desenvolvemos um modelo analítico para o potencial perturbador de um problema de três corpos coplanar, utilizando o formalismo hamiltoniano expressado através das coordenadas canônicas de Jacobi. Consideramos um sistema de três massas pontuais, dentro de uma configuração de ressonância de movimentos médios generalizada do tipo  $n_1/n_2 = (p + q)/p$ .

Desenvolver um modelo analítico se mostra vantajoso no sentido de possibilitar o melhor entendimento da dinâmica dos fenômenos que caracterizam um determinado sistema, a identificação mais imediata das principais variáveis do problema, e a melhor caracterização dos comportamentos possíveis em função destas últimas.

Aplicamos a metodologia clássica de expansões em séries de potências das excentricidades e semi-eixos maiores. Usando expansões em séries de Taylor e Fourier, obtivemos a expressão completa para o potencial perturbador, em função dos elementos orbitais  $\lambda_i, \varpi_i, a_i, e_i, i = 1, 2$ . Os termos de curto período foram eliminados por simples inspeção visual, removendo as contribuições advindas de argumentos que continham os ângulos rápidos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , exceto aqueles nos quais estavam contidos as combinações críticas. Esse processo de média ‘manual’ reduziu o sistema a um problema de dois graus de liberdade.

O comportamento da função analítica desenvolvida foi testado para o caso específico de ressonância 3:1. Nossos resultados foram comparados com àqueles gerados através de um modelo semi-analítico outro, o qual também computa um Hamiltoniano médio para um sistema ressonante.



# Abstract

In this work we develop an analytical model for the disturbing potential of the planar Three-Body problem, using the Hamiltonian formalism expressed in canonical Jacobi coordinates. We consider a system of massive points in a general mean motion resonant configuration of the general type  $n_1/n_2 = (p + q)/p$ .

The development of an analytical model is very important once it allows us to better understand the dynamical phenomena of a system, identifying the main variables and the possible regimes of motion that the system may assume.

As a methodology, we apply the classical method of expansions in power series of eccentricities and semi-major axes. Through the application of Taylor and Fourier series expansions, we obtain the exact expression for the disturbing potential as a function of the orbital elements  $\lambda_i, \varpi_i, a_i, e_i, i = 1, 2$ . The short-period terms were eliminated by removing those terms whose arguments were depending at least on one of the fast angles  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ , except for those which contain the critical combination of the fast angles. This average process allows us to reduce the system to a two-degree-of-freedom problem.

The behavior of the obtained analytical function is tested for the specific case of a 3:1 MMR. We compare the results with a semi-analytical model, which also gives the averaged Hamiltonian of a resonant system - in Jacobi coordinates.



## Lista de Figuras

2.1	Sistema exemplificando 4 corpos, com os vetores posição dados dentro de um sistema de coordenadas inercial arbitrário com origem em $S$ . . . . .	29
2.2	Sistema de 4 corpos, com os vetores posição dados em coordenadas referenciadas ao baricentro $\mathbf{B}$ do sistema. . . . .	31
2.3	Sistema de 4 corpos, com os vetores posição dados em coordenadas referenciadas ao corpo de massa $m_0$ . . . . .	35
2.4	Sistema de 4 corpos, com os vetores posição dados para um sistema de coordenadas de Jacobi. O ponto $\mathbf{B}_1$ é o baricentro de $m_0$ e $m_1$ . $\mathbf{B}_2$ é o baricentro de $m_0$ , $m_1$ e $m_2$ . . . . .	38
3.1	Representação gráfica do Problema de Três Corpos, referenciado em um sistema inercial arbitrário de origem $S$ . . . . .	53
3.2	Representação gráfica do sistema utilizando as coordenadas de Jacobi. O ponto CM indica a posição do centro de massa de $m_0$ e $m_1$ ; $\psi$ é o ângulo entre formado entre os vetores posição no sistema de Jacobi, $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ ; $\mathbf{r}_{i,j}$ é o vetor de distância entre os respectivos corpos $i$ e $j$ . (Figura retirada da tese de Doutorado de Eduardo A. Ines.) . . . . .	55
5.1	(a) Comportamento da série dos coeficientes de Laplace $b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha})$ , $0 \leq j \leq 5$ , em termos do índice $i$ ; $\varepsilon_2 \sim 1$ e $\tilde{\alpha} = 0.48$ . Essas séries, que nada mais são que os somatórios nas fórmulas dos coeficientes $\sum_i B_i \alpha^{2i}$ , aparecem para a parte direta do potencial perturbador. (b) Comportamento da função analítica dos coef. Laplace, em termos do parâmetro $\alpha$ , para distintos valores do índice $j$ . . . . .	89

5.2	Curvas de $\langle \mathcal{R} \rangle$ vs $e_2$ , para os valores de $e_1$ conforme indicado. São tomados diferentes intervalos para os coeficientes $n$ , $j$ e $N$ . $\mathcal{K}$ e $AM$ são constantes de movimento, $\sigma_1 = 90^\circ$ , $\Delta\varpi = 0^\circ$ . Em linha contínua vermelha tem-se o comportamento do modelo semi-analítico usado como padrão. . . . .	91
5.3	Curvas de $\partial \langle \mathcal{R} \rangle / \partial e_2$ vs $e_2$ , tomadas para cada um dos casos de excentricidades $e_1$ indicados. O modelo analítico foi computado novamente para diferentes configurações de ordens em $n$ , $j$ e $N$ . A linha vermelha contínua novamente indica o comportamento utilizado como padrão, neste caso, a curva derivada numérica. . . . .	93
5.4	Curvas de $\langle \mathcal{R} \rangle$ vs $e_2$ , tomadas para $e_1 = 0.005$ . Os gráficos indicam os valores máximos de harmônicos considerados. A linha vermelha contínua apresenta o comportamento do modelo padrão semi-analítico. . . . .	95
5.5	Curvas de $\langle \mathcal{R} \rangle$ vs $e_2$ , tomadas para $e_1 = 0.4$ . Nesse caso, testamos diferentes configurações para as ordens de expansão. . . . .	96
5.6	Curvas de $\partial \langle \mathcal{R} \rangle / \partial e_2$ vs $e_2$ , para $e_1 = 0.005$ . . . . .	96
5.7	Curvas de $\partial \langle \mathcal{R} \rangle / \partial e_2$ vs $e_2$ , para $e_1 = 0.005$ . Aqui, mostramos as configurações de ordem máxima que podem ser adotadas, de maneira tal a obter-se a melhor correspondência possível com a curva padrão (vermelha contínua). . . . .	97
5.8	Curvas de $\partial \langle \mathcal{R} \rangle / \partial e_2$ vs $e_2$ , para $e_1 = 0.4$ . . . . .	97
5.9	Curvas para a razão entre os parâmetros externo e interno, $\gamma_{ext}/\gamma_{int}$ , seguindo a notação que denominamos no Capítulo 3, Seção (3.1.1). . . . .	98
5.10	Planos representativos $(e_1, e_2)$ tomados dentro da ressonância exata 3/1, para razões de massa $m_2/m_1$ : (a)0.1, (b)0.5 e (c)1. Os valores positivos (negativos) de $e_1$ indicam que $\sigma_1 = 0$ ( $\pi/2$ ), enquanto que valores positivos (negativos) de $e_2$ significam $\Delta\varpi = 0$ ( $\pi$ ). . . . .	100
5.11	Planos representativos $(e_1, e_2)$ tomados dentro da ressonância exata 3/1, para a razão de massa $m_2/m_1 = 5$ . Os valores positivos (negativos) de $e_1$ indicam que $\sigma_1 = 0$ ( $\pi/2$ ), enquanto que valores positivos (negativos) de $e_2$ significam $\Delta\varpi = 0$ ( $\pi$ ). . . . .	101

5.12	Distribuição dos pares planetários em termos das razões de movimentos médios $n_1/n_2$ e das maiores excetricidades entre os pares. Os símbolos azuis determinam sistemas classificados (segundo nossa metodologia) em ressonâncias interiores; símbolos pretos representam ressonâncias exteriores. Os números identificam cada sistema em acordo com a Tabela 5.1. . . . .	103
5.13	Distribuição dos pares planetários em termos das razões de massas $m_2/m_1$ e das maiores excetricidades entre os pares. Os símbolos azuis determinam sistemas classificados em ressonâncias interiores; símbolos pretos representam ressonâncias exteriores. Os números identificam cada sistema em acordo com a Tabela 5.1. . . . .	104
A.1	Problema de três corpos não-restrito. Os vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ indicam as posições astrocêntricas de $m_1$ e $m_2$ , respectivamente; $\boldsymbol{\rho}_2$ é o vetor posição de $m_2$ no sistema de Jacobi. . . . .	117



## Lista de Tabelas

- 5.1 Parâmetros físicos dos sistemas exoplanetários em quase-ressonância 3:1. **M** designa a massa da estrela central, em unidades de massas solares; **m** é a massa dos planetas, em unidade de massas de Júpiter. Os semi-eixos **a** são dados em unidades astronômicas au. Os valores de **a** e de **e** foram obtidos após a transformação dos elementos astrocêntricos para elementos de Jacobi. 102



# Sumário

1. <i>Introdução</i> . . . . .	23
1.1 A Função Perturbadora . . . . .	23
1.2 Ressonâncias de Movimentos Médios . . . . .	24
2. <i>Fundamentação Teórica do Problema de N-corpos</i> . . . . .	27
2.1 Integrais de Movimento . . . . .	27
2.1.1 Referencial inercial arbitrário . . . . .	28
2.1.2 Referencial baricêntrico . . . . .	31
2.1.3 Referencial astrocêntrico . . . . .	34
2.1.4 Coordenadas de Jacobi . . . . .	38
2.2 Formalismo Hamiltoniano . . . . .	41
2.2.1 Princípio de Hamilton . . . . .	42
2.2.2 Transformações Canônicas . . . . .	43
2.2.3 Teoria de Hamilton-Jacobi . . . . .	44
2.2.4 Movimentos Periódicos: Variáveis de Ângulo-Ação . . . . .	45
2.3 Equações de Hamilton para o problema de (N+1)-corpos . . . . .	47
2.3.1 Referencial Baricêntrico . . . . .	47
2.4 Variáveis Canônicas de Jacobi . . . . .	47
2.5 Variáveis Canônicas de Poincaré . . . . .	49
3. <i>O Problema de 3 Corpos - Expansão do potencial perturbador</i> . . . . .	53
3.1 Expansão do termo perturbador . . . . .	57
3.1.1 Condição de aproximação do par: <i>close approach</i> . . . . .	57
3.1.2 Primeira expansão em séries de Taylor: órbitas quase coplanares . . . . .	58

3.1.2.1	Termos de inclinação . . . . .	59
3.1.3	Segunda expansão em séries de Taylor e expansão em séries de Fourier: órbitas quase circulares . . . . .	61
3.1.4	Coeficientes de Laplace . . . . .	62
3.1.5	Aproximação de órbitas coplanares . . . . .	64
3.1.6	Coeficientes de Hansen . . . . .	66
3.1.6.1	Derivadas $dX_k^{n,m}/de$ . . . . .	68
3.1.7	Operadores de Newcomb . . . . .	69
3.2	Desenvolvimento do termo indireto . . . . .	70
3.3	Longitudes médias . . . . .	71
4.	<i>Dinâmica da Ressonância</i> . . . . .	73
4.1	Termos seculares . . . . .	75
4.2	Termos ressonantes . . . . .	76
4.2.1	Harmônicos ressonantes . . . . .	77
4.3	Estudo teórico da dinâmica . . . . .	78
4.3.1	Evolução temporal dos elementos . . . . .	80
4.4	Determinação do regime de ressonância: o ângulo ressonante ‘verdadeiro’ . . . . .	83
5.	<i>Testes de Convergência e Aplicações</i> . . . . .	87
5.1	Análise de convergência . . . . .	88
5.1.1	Modelo padrão de comparação . . . . .	88
5.1.2	Coeficientes de Laplace . . . . .	88
5.1.3	Comparação com o modelo semi-analítico . . . . .	90
5.1.3.1	Curvas $\mathcal{R}_{\text{médio}}$ vs $e_2$ e $\partial\mathcal{R}_{\text{médio}}/\partial e_2$ vs $e_2$ . . . . .	90
5.1.3.2	Planos representativos . . . . .	98
5.2	Sistemas exoplanetários em quase-ressonância 3:1 . . . . .	101
6.	<i>Conclusões e Perspectivas</i> . . . . .	105
	<i>Referências</i> . . . . .	109

A. Equações de Movimento em Coordenadas de Jacobi para o Problema de Três Corpos	117
B. Expressões Explícitas das Derivadas . . . . .	121
C. Transformação de Elementos Orbitais . . . . .	123
C.1 Equações para o sistema astrocêntrico . . . . .	123
C.2 Determinação das anomalias verdadeiras . . . . .	124
C.2.1 Expansões elípticas: funções de Bessel . . . . .	125
C.2.2 Soluções iterativas da equação de Kepler . . . . .	126
C.3 Equações para o sistema de Jacobi . . . . .	126
C.4 Transformação dos elementos orbitais: Astrocêntrico para Jacobi . . . . .	127
C.5 Equações para o sistema de Poincaré . . . . .	128
C.6 Transformação dos elementos orbitais: Astrocêntrico para Poincaré . . . . .	130



## Introdução

### 1.1 A Função Perturbadora

Embora as metodologias puramente numéricas mostrem-se de importância ímpar aos estudos de Mecânica Celeste, especialmente nesta era dos grandes *clusters*, capazes de executar extensas simulações e integrações de órbitas, é inegável o fato de que as abordagens analíticas e semi-analíticas sejam essenciais à análise de vários problemas dessa área. De fato, os métodos analíticos são necessários para o profundo entendimento de diversos problema, bem como para a interpretação correta de resultados obtidos. A posse de uma expansão analítica da função perturbadora permite compreender melhor a origem de fenômenos dinâmicos característicos de sistemas planetários, ao se ter em mãos a possibilidade de uma melhor compreensão da influência dos termos que compõem a função sobre a dinâmica do sistema em estudo.

Desde os trabalhos originais de Hansen, Le Verrier e Tisserand (Hansen, 1838; Le Verrier, 1855; Tisserand, 1885) no século XIX, distintas abordagens da expansão analítica da função perturbadora têm sido apresentadas na literatura, para os casos do problema de três corpos restrito e não-restrito (Andoyer, 1923; Newcomb, 1895; Brown, 1932; Ferraz-Mello, 1987; Kamel, 1988; Yokoyama, 1994; Beaugé, 1996).

Sobre a problemática das três massas que interagem devido à gravitação, encontramos na literatura duas metodologias clássicas de computação da função perturbadora. Tais metodologias diferem, sobretudo, na expansão da parte principal da função, a saber,  $\mathcal{G}m_1m_2/\Delta$  (onde  $m_i$  designa as massas dos corpos orbitantes,  $\Delta$  a distância mútua entre eles, e  $\mathcal{G}$  a constante universal de gravitação). Em uma dessas abordagens, utiliza-se expansões em séries de potências das excentricidades e inclinações, através das séries de

Taylor e séries periódicas de Fourier: formalmente, essa metodologia é conhecida como expansão de Laplace (Broucke e Smith, 1971; Ferraz-Mello, 1983; Laskar e Robutel, 1995; Klioner, 2000).

No segundo tipo de abordagem, a expansão é feita com relação à razão  $\alpha = a_1/a_2$  dos semi-eixos maiores (o subíndice 1 refere-se ao corpo de órbita interna, e 2 àquele de órbita externa), utilizando os polinômios de Legendre.

Na prática, essas metodologias se diferenciam quanto ao raio de convergência das séries de potências, bem como quanto a taxa na qual essa convergência é atingida. Devido a isso, os cenários de aplicabilidade são distintos: expansões utilizando os polinômios de Legendre apresentam uma convergência bastante lenta para valores moderados e altos de  $\alpha$ , sendo mais aplicadas aos estudos de sistemas hierárquicos, nos quais os corpos orbitantes apresentam semi-eixos bastante distantes. Em geral, tais sistemas ficam longe das principais ressonâncias de movimentos médios, casos em que se mostra mais adequado aplicar a expansão de Laplace.

As maiores contribuições à expansão da função perturbadora, utilizando os métodos citados, foram realizadas ao longo do século XIX (Hill, 1875; Tisserand, 1885). Trabalhos recentes que utilizam as expansões de Legendre são encontrados em (Ford et al., 2000; Lee e Peale, 2003; Laskar e Boué, 2010).

A descoberta de novos sistemas planetários, dentro de configurações dinâmicas que incluem fenômenos complexos como as ressonâncias, inspiraram a revisão das teorias de expansão das perturbações. Apresentamos neste trabalho um estudo teórico inserido nesse contexto. Revisitamos o problema de três corpos geral, e em seguida, adotamos a primeira simplificação possível, considerando o caso coplanar. Utilizando o formalismo hamiltoniano desenvolvido especificamente em coordenadas canônicas de Jacobi (e.g., (Ferraz-Mello et al., 2005)), realizamos a expansão do potencial perturbador utilizando o método de Laplace.

## 1.2 Ressonâncias de Movimentos Médios

A descoberta de um planeta orbitando uma estrela dentro da sequência principal revelou-se um dos maiores feitos da Astronomia no final de século passado (Mayor e Queloz, 1995), e impulsionou o desenvolvimento científico e tecnológico da área, através do

aperfeiçoamento de teorias e técnicas capazes de viabilizar a detecção de novos planetas extrasolares.

Diante dos vários questionamentos acerca dos fenômenos físicos que regem a dinâmica dos corpos celestes, é de grande importância a caracterização de diferentes sistemas planetários, quanto ao seu comportamento, mediante a obtenção e o estudo dos parâmetros que determinam suas propriedades físicas.

Sistemas planetários com mais de um planeta apresentam, em determinados casos, configurações orbitais ressonantes entre seus movimentos médios. Na literatura, tal fenômeno é formalmente conhecido como *Mean Motion Resonance* (MMR), literalmente, ressonância de movimentos médios. Nela, os períodos orbitais dos planetas são comensuráveis, i.e., obedecem uma relação de proporcionalidade do tipo  $T_2/T_1 = (p + q)/p$ , ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ), 1 e 2 referindo-se ao planeta de órbita interna e externa, respectivamente. Nesses casos, fala-se em uma relação de ressonância do tipo  $p + q : p$ , onde  $q$  denota a ordem da ressonância. No Sistema Solar, por exemplo, a maioria dos casos de MMR envolvem corpos menores, satélites naturais e asteróides. Nos caso dos planetas, é possível observar configurações quase-ressonantes: um exemplo é o sistema Júpiter-Saturno (Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001), que se encontra em quase-ressonância 5:2. Nesse caso, os dois planetas gigantes não estão envolvidos diretamente em uma interação ressonante, mas mostram um modo oscilatório conhecido como ‘Grande Desigualdade’.

A existência de sistemas exoplanetários caracterizados por comensurabilidades de movimentos médios abriu um novo cenário dentro do problema clássico de três corpos. Entre muitos aspectos, é interessante mencionarmos o estudo de soluções de equilíbrio e determinação de regiões de estabilidade e caoticidade no espaço de fases, para diferentes configurações de massas e condições iniciais (Callegari et al., 2004; Michtchenko et al., 2006, 2008a; Beaugé et al., 2007; Alves et al., 2016).

Ao longo da evolução de um sistema, a proximidade a uma ressonância pode tanto conduzir a cenários de estabilidades quanto de instabilidades. Deste ponto de vista, percebe-se a importância em se compreender melhor as características do fenômeno, a fim de explicar/prever as circunstâncias de (in)estabilidade.

Nos últimos anos, muitos estudos foram desenvolvidos quanto à questão da origem e estabilidade de sistemas ressonantes (Ferraz-Mello, 1987; Hadjidemetriou, 2002; Lee e Peale, 2003; Beaugé e Michtchenko, 2003). Em muitos deles, o foco manteve-se em encontrar

os domínios de condições iniciais e paramétricos que caracterizam configurações dinâmicas estáveis. Uma vez que as detecções indiretas, em geral, não apresentam os parâmetros físicos e orbitais precisos, tais estudos se mostram essenciais para a determinação dos limites desses parâmetros.

Embora a maioria dos trabalhos apresentados utilizem métodos numéricos, tem havido um esforço no intuito de desenvolver modelos analíticos para o estudo de sistemas ressonantes, no caso não-restrito (Holman e Murray, 1996; Murray et al., 2002; Lee e Peale, 2003; Beaugé e Michtchenko, 2003), aplicando-se, por exemplo, as expansões de Laplace da função perturbadora.

O objetivo principal do presente trabalho é desenvolver uma expansão analítica para o Hamiltoniano de um problema de três corpos coplanar, considerando uma configuração de ressonância de movimentos médios generalizada  $(p + q) : p$ . Em seguida, aplicamos o modelo para o caso específico da ressonância de segunda ordem 3:1.

Como um último comentário, atentemos para o seguinte fato: o tratamento teórico que aqui desenvolvemos pode ser formalmente aplicado considerando tanto órbitas planetárias ressonantes, em torno de estrelas, quanto órbitas ressonantes de satélites em torno de planetas. Assim, abre-se a possibilidade para, futuramente, utilizar nossos estudos para comparar as diferenças entre a dinâmica ressonante típica de sistemas planetários, e a dinâmica de satélites capturados - ou nas proximidades - de uma MMR.

## Fundamentação Teórica do Problema de N-corpos

O conceito fundamental da Mecânica é o de movimento: a variação da posição espacial de um objeto ou ponto material, em relação a um dado *referencial* e no decorrer de um certo intervalo de tempo. Investigar as causas desse movimento é a proposta da Dinâmica: fornecido um conjunto de corpos interagentes, descrever as forças que agem sobre cada um deles, relacionar a resultante à aceleração e então, determinar a lei de movimento para os corpos, correspondente àquele referencial.

Nesse sentido, fica clara a importância de se ter bem definida a ideia de referencial, ou sistema de referência. Debruçar-se sobre um problema dinâmico pressupõe escolher o melhor referencial para tal problema.

Nas seção a seguir, expomos o problema de (N+1)-corpos interagindo sob a ação do potencial gravitacional. A proposta é descrever, utilizando o formalismo newtoniano (princípio fundamental da dinâmica), as leis de movimento para três casos típicos de referencial: inercial arbitrário, inercial baricêntrico, e (não-inercial) astrocêntrico.

Em seguida, introduzimos o formalismo hamiltoniano, o qual será adotado no desenvolvimento metodológico do restante deste trabalho. Os conceitos fundamentais de variáveis canônicas são apresentados nas últimas seções do capítulo.

### 2.1 *Integrais de Movimento*

Não é possível trabalhar o movimento de um sistema de corpos, sem antes especificar um referencial, em relação ao qual tal sistema se move. Nas próximas subseções, tratamos de apresentar o problema de (N+1)-massas que interagem dentro do potencial gravitacional. Utilizamos o formalismo de força newtoniano, através da Lei da Gravitação Universal. O

problema é apresentado em três sistemas de referência. Em cada um deles, mostramos a conservação das importantes quantidades que caracterizam o sistema: as integrais de movimento.

Ao final, o conceito de um dos casos de referencial é utilizado para introduzir as coordenadas de Jacobi (Duboshin, 1969).

### 2.1.1 Referencial inercial arbitrário

A solução da equação de movimento de um corpo (princípio fundamental da dinâmica),

$$\vec{F} = M \frac{d\vec{x}}{dt}$$

somente é alcançável, com sentido físico adequado, quando se utiliza massas inerciais em um sistema de referência inercial. Por inercial entendemos um sistema isento de aceleração, i.e., que esteja imóvel ou em movimento retilíneo uniforme. Em relação a este referencial, qualquer massa pontual não estará sob efeito de forças inerciais (ou *pseudo-forças*) intrínsecas (por exemplo, a força centrífuga e a força de Coriolis). Nesta seção, fazemos menção a um referencial inercial arbitrário, sobre o qual localizamos um ponto qualquer  $S$ , e que será a origem do sistema de coordenadas.

Seja tomado, então, o referencial inercial com origem no ponto  $S$ , e  $(N+1)$ -partículas pontuais de massas  $m_i$  nesse espaço. Denotaremos por  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) os vetores de posição dos  $(N+1)$ -corpos em relação ao referencial, e  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$  serão os respectivos momentos lineares. A Fig. 2.1 ilustra tal sistema, para o caso de 4 corpos.

Da Lei de Gravitação Universal derivamos a equação de movimento do  $i$ -ésimo corpo:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{j=0; j \neq i}^N \frac{\mathcal{G} m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{G}$  vem a ser a constante de gravitação universal e  $\Delta_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  são as distâncias mútuas entre os corpos  $i$  e  $j$ .

Teoricamente, para uma solução completa da Eq. (2.1), são necessárias  $6(N+1)$  constantes de integração.

Se somarmos sobre os índices  $i$  em (2.1), teremos

$$\sum_{i=0}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\mathcal{G} m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 0. \quad (2.2)$$

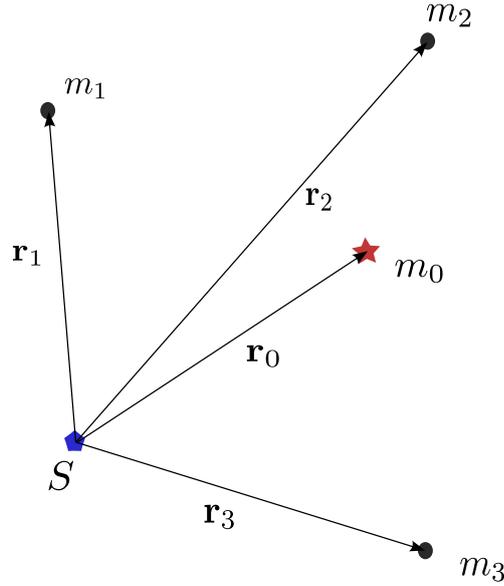


Figura 2.1: Sistema exemplificando 4 corpos, com os vetores posição dados dentro de um sistema de coordenadas inercial arbitrário com origem em  $S$ .

Integrando uma vez a equação anterior, vem que

$$\sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=0}^N \mathbf{p}_i = \vec{a}, \quad (2.3)$$

onde  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  é um vetor constante de integração. A Eq. (2.3) determina a conservação do momento linear total  $\mathbf{P}$  do sistema. Integrando novamente,

$$\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i = \vec{a}t + \vec{b}, \quad (2.4)$$

e  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  é também um vetor constante de integração. A Eq. (2.4) fornece a equação do movimento do baricentro  $\mathbf{R}_B$  do sistema. Do momento linear total  $\mathbf{P} = \text{const}$  têm-se três integrais primeiras de movimento.

Tomemos agora o seguinte produto vetorial:

$$\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} \mathbf{r}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 0,$$

pois  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = -\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i$ , e a somatória é tomada sobre todos os índices. Mas

$$\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = 0, \quad (2.5)$$

onde  $\mathcal{L}$  é o momento angular total do sistema.  $\mathcal{L}$  é uma constante de movimento, e a Eq. (2.5) fornece mais três integrais do momento angular  $\mathcal{L} = \vec{c}$ , através das três componentes

constantes desse vetor. Escrevendo as componentes vetoriais retangulares:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N m_i [y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i] &= c_1 = \mathcal{L}_x, \\ \sum_{i=0}^N m_i [z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i] &= c_2 = \mathcal{L}_y, \\ \sum_{i=0}^N m_i [x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i] &= c_3 = \mathcal{L}_z. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A energia potencial do sistema é definida por

$$U = - \sum_{i=0}^N \sum_{j>i}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad (2.7)$$

e pode-se escrever

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U, \quad (2.8)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{r}_i}$  é o operador gradiente dado por

$$\nabla_{\mathbf{r}_i} = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Tomamos o produto escalar  $\dot{\mathbf{r}}_i \cdot (2.8)$ , e somando sobre todos os índices

$$\sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{i=0}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i U = - \frac{dU}{dt}.$$

Notando que

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}},$$

então,

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = - \frac{dU}{dt}.$$

Integrando em  $t$ , ficamos com

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + U = E. \quad (2.9)$$

$E$  é uma constante de integração escalar, e define a energia total do sistema. A Eq. (2.9) é a integral de energia. O termo quadrático em  $\dot{\mathbf{r}}_i$  é a energia cinética  $T$  dos corpos ( $T$  é uma função homogênea das velocidades):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \quad (2.10)$$

A energia, o baricentro, o momento linear e o momento angular constituem as dez integrais clássicas do problemas de N-corpos (ou, neste caso, de (N+1)-corpos), dadas respectivamente pelas Eqs. (2.9), (2.4), (2.3) e (2.7).

Resolver a Eq. (2.1) significa resolver  $3(N+1)$  equações diferenciais de 2ª ordem. Esse número pode ser reduzido, com a escolha adequada de uma mudança de referencial, utilizando as integrais primeiras de movimento apresentadas.

### 2.1.2 Referencial baricêntrico

Como mostrado anteriormente, o baricentro de um sistema de (N+1)-corpos tem sua equação de movimento satisfeita por uma função linear (movimento retilíneo uniforme) (Eq. (2.4)). Um referencial centrado sobre este ponto específico é, portanto, inercial. Vejamos como ficam as integrais de movimento.

Introduzimos os vetores de posição relativos ao baricentro do sistema de (N+1)-corpos

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_B, \quad (2.11)$$

onde

$$\mathbf{R}_B = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (2.12)$$

e  $M = \sum_{j=0}^N m_j$  é a massa total do sistema. A Fig. 2.2 ilustra o sistema.

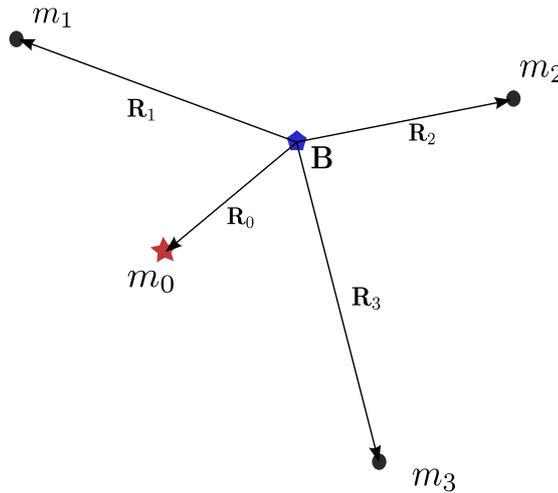


Figura 2.2: Sistema de 4 corpos, com os vetores posição dados em coordenadas referenciadas ao baricentro **B** do sistema.

Facilmente, verifica-se que  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$  (distâncias mútuas são conservadas, o que já era esperado, pois independem do referencial). Da Eq. (2.4), tiramos  $\ddot{\mathbf{R}}_B = 0$ . Uma vez

que tomamos o baricentro como origem do novo sistema de referência, é fácil perceber que  $\mathbf{R}_B = \mathbf{0}$  e  $\dot{\mathbf{R}}_B = \mathbf{0}$ , e tem-se

$$\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{R}_i = \mathbf{0}; \quad \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Separando o índice 0, reservado para o que se conhece por *corpo central*, ficaremos com a seguinte relação

$$\mathbf{R}_0 = - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m_0} \mathbf{R}_i. \quad (2.14)$$

A equação do movimento do  $i$ -ésimo corpo será dada então por

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = - \sum_{j=1; j \neq i}^N \frac{\mathcal{G} m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) - \frac{\mathcal{G} m_0 m_i}{\Delta_{0i}^3} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0). \quad (2.15)$$

Agora, usando Eq. (2.14), temos que

$$\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_i + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{m_0} \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_i + \frac{m_i}{m_0} \mathbf{R}_i + \sum_{j=1; j \neq i}^N \frac{m_j}{m_0} \mathbf{R}_j.$$

Multiplicando a igualdade por  $m_0 m_i$ , após algumas manipulações simples, obtém-se

$$m_0 m_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0) = m_i (m_0 + m_i) \mathbf{R}_i + \sum_{j=1; j \neq i}^N m_i m_j \mathbf{R}_j.$$

Substituindo o resultado anterior em (2.15), obtém a equação de movimento do  $i$ -ésimo corpo.

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = - \sum_{j=1; j \neq i}^N \frac{\mathcal{G} m_i m_j (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\mathcal{G} m_i}{\Delta_{i0}^3} \left[ (m_0 + m_i) \mathbf{R}_i + \sum_{j=1; j \neq i}^N m_j \mathbf{R}_j \right], \quad (2.16)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Facilmente, pode-se mostrar que

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}',$$

onde  $\mathcal{L}_B = M \mathbf{R}_B \times \dot{\mathbf{R}}_B$  é constante (verifica-se através de (2.4)), e  $\mathcal{L}'$  é dado pela seguinte expressão:

$$\mathcal{L}' = \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{R}_i \times (\dot{\mathbf{R}}_i + \dot{\mathbf{R}}_B) + \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{R}_B \times \dot{\mathbf{R}}_i = \text{cte}, \quad (2.17)$$

uma vez que a relação de conservação do momento angular total  $\mathcal{L}$  deve continuar sendo satisfeita.

Para o referencial centrado no baricentro do sistema, valem as relações (2.13), de maneira que pode-se, neste sistema, escrever:

$$\mathcal{L}' = \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i, \quad (2.18)$$

quantidade que vem a ser o momento angular total do sistema calculado em relação ao baricentro. A inercialidade do sistema nos garante a conservação do momento angular respectivo, i.e.,  $\mathcal{L}' = \vec{c}'$ , onde  $\vec{c}'$  é um vetor constante.

Usando Eq. (2.14) na equação anterior, obteremos

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{m_0} \left[ \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{R}_j \times \sum_{j'=1}^N m_{j'} \dot{\mathbf{R}}_{j'} \right] + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i. \quad (2.19)$$

As componentes retangulares serão dadas, portanto, pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_0} \left[ \sum_{j=1}^N m_j Y_j \sum_{j'=1}^N m_{j'} \dot{Z}_{j'} - \sum_{j=1}^N m_j Z_j \sum_{j'=1}^N m_{j'} \dot{Y}_{j'} \right] + \sum_{i=1}^N m_i (Y_i \dot{Z}_i - Z_i \dot{Y}_i) &= c'_1, \\ \frac{1}{m_0} \left[ \sum_{j=1}^N m_j Z_j \sum_{j'=1}^N m_{j'} \dot{X}_{j'} - \sum_{j=1}^N m_j X_j \sum_{j'=1}^N m_{j'} \dot{Z}_{j'} \right] + \sum_{i=1}^N m_i (Z_i \dot{X}_i - X_i \dot{Z}_i) &= c'_2, \\ \frac{1}{m_0} \left[ \sum_{j=1}^N m_j X_j \sum_{j'=1}^N m_{j'} \dot{Y}_{j'} - \sum_{j=1}^N m_j Y_j \sum_{j'=1}^N m_{j'} \dot{X}_{j'} \right] + \sum_{i=1}^N m_i (X_i \dot{Y}_i - Y_i \dot{X}_i) &= c'_3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

De maneira análoga à anterior, podemos abrir a equação para a energia cinética do sistema. Partindo da Eq.(2.10), temos

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i (\dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{R}}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i \left[ \dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}^2 + 2\dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \dot{\mathbf{R}}_i^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{R}}_i^2 + \dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}} \cdot \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{R}}_i = T_{\mathbf{B}} + T', \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde definimos  $T_{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}^2$ . No referencial baricêntrico, usamos novamente a Eq.(2.13),

e

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{R}}_i^2$$

nada mais é que a energia cinética dos (N+1)-corpos relativa à origem sobre o baricentro.

Da Eq.(2.14), temos que

$$\dot{\mathbf{R}}_0 = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{m_0} \dot{\mathbf{R}}_j \Rightarrow \dot{\mathbf{R}}_0^2 = \frac{1}{m_0^2} \left( \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{R}}_j \right)^2$$

Substituindo na expressão de  $T'$ , vem que

$$T' = \frac{1}{2m_0} \left( \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{R}}_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{R}}_i^2, \quad (2.22)$$

e a integral de energia  $T' + U = E'$  é válida, com  $U$  dada pela Eq.(2.7) e  $E'$  sendo uma constante que satisfaz  $E' = E - T_{\mathbf{B}}$ .

Vemos, de Eq.(2.15), que a escolha por tal sistema de referência não reduz o número de equações diferenciais a serem resolvidas: temos ainda  $6(N+1)$  equações, e continuamos com as dez integrais primeiras. As fórmulas apresentadas para este caso de referencial podem ser de grande utilidade para trabalhos de determinação de órbitas a partir dos dados de velocidade radial, por exemplo. Além disso, utilizar o centro de massa como referência é o fundamento por trás das *coordenadas de Jacobi*, conforme veremos mais adiante.

### 2.1.3 Referencial astrocêntrico

As equações do movimento podem ser facilmente reduzidas para  $6N$  equações se tomarmos como origem do referencial um dos próprios corpos do sistema, o qual será chamado *corpo central*. Em Astronomia, este é o referencial naturalmente escolhido, chamado astrocêntrico. Introduzimos, então, os vetores de posição em relação ao corpo central, ao se escolher a origem do sistema sobre  $m_0$ :

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0. \quad (2.23)$$

A Fig. 2.3 apresenta a ilustração do caso.

Nesse caso, perde-se o caráter inercial do sistema, uma vez que o movimento dos  $N$ -corpos estará referenciado ao corpo  $m_0$ , que também tem movimento acelerado, segundo a Eq. (2.1) dado por

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{G}m_j}{\Delta_{0j}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0) = \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{G}m_j}{\Delta_{0j}^3} \mathbf{r}'_j. \quad (2.24)$$

Agora, temos que

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = m_i (\ddot{\mathbf{r}}'_i + \ddot{\mathbf{r}}_0).$$

A equação de movimento do  $i$ -ésimo corpo ( $i \neq 0$ ) fica

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i &= - \sum_{j=0; j \neq i}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) - m_i \ddot{\mathbf{r}}_0 = \\ &= - \frac{\mathcal{G}m_i m_0}{r_i^3} \mathbf{r}'_i - \sum_{j=1; j \neq i}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) - \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{r_j^3} \mathbf{r}'_j, \end{aligned} \quad (2.25)$$

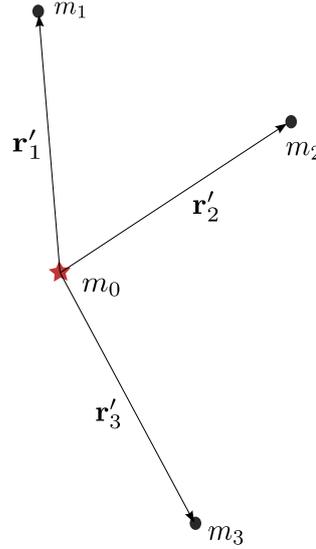


Figura 2.3: Sistema de 4 corpos, com os vetores posição dados em coordenadas referenciadas ao corpo de massa  $m_0$ .

onde introduzimos a distância astrocêntrica  $r_i = \Delta_{0i}$ . Na expressão anterior, o primeiro termo do lado direito representa a interação gravitacional entre a massa  $m_0$  e o  $i$ -ésimo corpo; o segundo termo determina as interações entre este último e os demais (N-1)-corpos, enquanto que o último termo está relacionado à aceleração da massa central  $m_0$ . Se separarmos a contribuição do corpo  $i$  deste último termo, podemos finalmente escrever

$$\ddot{\mathbf{r}}'_i = -\frac{\mathcal{G}(m_0 + m_i)}{r_i^3} \mathbf{r}'_i - \sum_{j=1; j \neq i}^N \mathcal{G} m_j \left( \frac{\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j}{\Delta_{ij}^3} + \frac{\mathbf{r}'_j}{r_j^3} \right). \quad (2.26)$$

O primeiro termo da expressão acima tem a forma da equação de movimento para o problema de dois corpos: denota a interação gravitacional entre a  $i$ -ésima partícula e o centro de força de massa  $m_0 + m_i$ . O segundo termo trata-se do termo perturbativo do movimento do corpo, e é dividido em duas partes: a primeira parte é a *perturbação direta*, devida à mútua interação gravitacional entre o  $i$ -ésimo corpo e os (N-1)-corpos restantes; a segunda parte, a *perturbação indireta*, é resultante da ação das (N-1)-massas acelerando o corpo central.

Sejam definidas as funções

$$R_{ij} = -\mathcal{G} \left[ \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r}'_j}{r_j^3} \right]. \quad (2.27)$$

Tem-se que

$$m_j \nabla_i R_{ij} = -\mathcal{G} \nabla_i \left( \frac{m_j}{\Delta_{ij}} - m_j \frac{\mathbf{r}'_j}{r_j^3} \right)$$

e

$$\sum_{j=1;j \neq i}^N m_j \nabla_i R_{ij} = -\frac{\mathcal{G}}{m_i} \sum_{j=1;j \neq i}^N m_i m_j \nabla_i \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} \right) - \mathcal{G} \sum_{j=1;j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{r}'_j}{r_j^3}.$$

Combinando este último resultado com Eq.(2.26), vem que

$$\ddot{\mathbf{r}}'_i = -\frac{\mathcal{G}(m_0 + m_i)}{r_i^3} \mathbf{r}'_i + \sum_{j=1;j \neq i}^N m_j \nabla_i R_{ij}. \quad (2.28)$$

A Eq.(2.28) é fundamental. Se os  $R_{ij}$  forem nulos, fica-se com as equações de movimento típicas do problema de dois corpos. Os termos de  $R_{ij}$  causam as perturbações no movimento do  $i$ -ésimo corpo: definem, assim, a quantidade física denominada *função perturbadora*.

O momento angular total do sistema pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=0}^N m_i (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i) \times (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}'_i).$$

Da definição adotada para as coordenadas,  $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{0} = \dot{\mathbf{r}}'_0$ . Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= M \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i] \\ &= \mathbf{r}_0 \times [M \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i] + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}'_i). \end{aligned}$$

A expressão anterior fornece o momento angular do sistema em termos das coordenadas astrocêntricas e das respectivas velocidades astrocêntricas.

O primeiro termo em colchetes pode ser expandido, e encontraremos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 (m_0 + \sum_{i=1}^N m_i) + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i &= m_0 \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}'_i) = \\ &= m_0 \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i. \end{aligned}$$

Finalmente, ficamos com a seguinte expressão para o momento angular do sistema:

$$\mathcal{L} = \mathbf{r}_0 \times \sum_{j=0}^N m_j \dot{\mathbf{r}}_j + \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}'_j \times (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}'_j). \quad (2.29)$$

Agora, retomando o referencial baricêntrico, valem as relações dadas pela Eq.(2.13). O primeiro termo da expressão anterior é nulo, e podemos calcular o momento angular em coordenadas astrocêntricas utilizando a Eq.(2.19) para o momento angular no referencial baricêntrico.

Uma vez que  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0$ , usando Eq.(2.14), ficamos com

$$\begin{aligned} M\mathbf{R}_0 &= -\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{R}_j + \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{R}_0 = \\ &= -\sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_0) = -\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}'_j, \end{aligned}$$

e facilmente chega-se a

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r}'_i - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}'_j. \quad (2.30)$$

Multiplicando a equação anterior por  $m_i$ , e somando sobre o índice  $i$ , de 1 a  $N$ , vem que

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i = \frac{1}{M} \left[ M \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i - (M - m_0) \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}'_j \right] = \frac{m_0}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i.$$

Substituindo as relações obtidas anteriormente nos termos respectivos da Eq.(2.19), teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{m_0} \left[ \frac{m_0}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}'_j \times \frac{m_0}{M} \sum_{j'=1}^N m_{j'} \dot{\mathbf{r}}'_{j'} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^N \left\{ m_i \left[ \mathbf{r}'_i - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}'_j \right] \times \left[ \dot{\mathbf{r}}'_i - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{r}}'_j \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Se explicitarmos o produto vetorial, após algum algebrismo, teremos finalmente a expressão para o momento angular, utilizando somente as coordenadas astrocêntricas

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}'_j \times \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{r}}'_j + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i. \quad (2.32)$$

Em termos das componentes retangulares, ficaremos com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= -\frac{1}{M} \left[ \sum_{j=1}^N m_j y'_j \sum_{j=1}^N m_j \dot{z}'_j - \sum_{j=1}^N m_j z'_j \sum_{j=1}^N \dot{y}'_j \right] + \sum_{i=1}^N m_i [y'_i \dot{z}'_i - z'_i \dot{y}'_i] = c'_1, \\ \mathcal{L}'_y &= -\frac{1}{M} \left[ \sum_{j=1}^N m_j z'_j \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}'_j - \sum_{j=1}^N m_j x'_j \sum_{j=1}^N \dot{z}'_j \right] + \sum_{i=1}^N m_i [z'_i \dot{x}'_i - x'_i \dot{z}'_i] = c'_2, \\ \mathcal{L}'_z &= -\frac{1}{M} \left[ \sum_{j=1}^N m_j x'_j \sum_{j=1}^N m_j \dot{y}'_j - \sum_{j=1}^N m_j y'_j \sum_{j=1}^N \dot{x}'_j \right] + \sum_{i=1}^N m_i [x'_i \dot{y}'_i - y'_i \dot{x}'_i] = c'_3. \end{aligned} \quad (2.33)$$

A mesma consideração é feita para calcular a energia cinética, e aplicamos as mesmas substituições na Eq.(2.22). Após algum cálculo, encontra-se

$$T' = -\frac{1}{2M} \left( \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{r}}'_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'^2_i, \quad (2.34)$$

e a integral de energia é  $E' = T' + U$ .

### 2.1.4 Coordenadas de Jacobi

Na teoria de dinâmica de muitos corpos, as coordenadas de Jacobi são frequentemente utilizadas a fim de se obter uma formulação matemática mais simples (Duboshin, 1969), do ponto de vista da possibilidade de redução do número de graus de liberdade. Neste sistema, a posição e velocidade do corpo 1 estão referenciadas à uma origem fixa no corpo 0; a partir disso, o  $i$ -ésimo corpo tem seus vetores posição e velocidade tomados em relação ao centro de massa dos  $(i-1)$ -corpos anteriores. A figura abaixo ilustra a explicação, para o caso de 4 corpos.

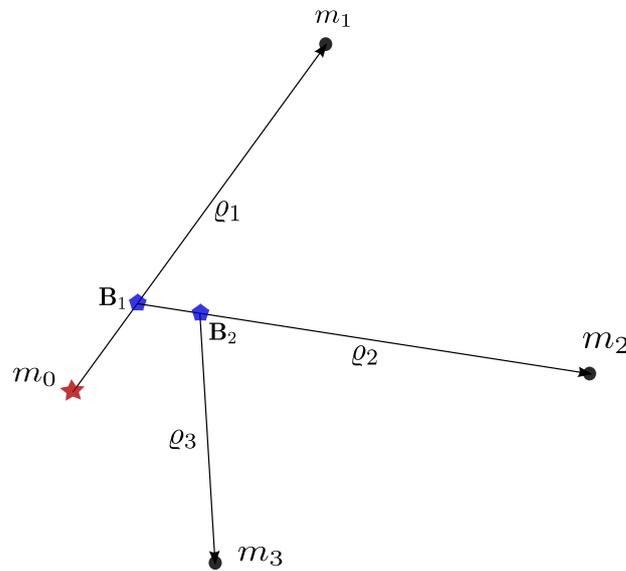


Figura 2.4: Sistema de 4 corpos, com os vetores posição dados para um sistema de coordenadas de Jacobi. O ponto  $B_1$  é o baricentro de  $m_0$  e  $m_1$ .  $B_2$  é o baricentro de  $m_0$ ,  $m_1$  e  $m_2$ .

Assim, partindo de um sistema de referência inercial arbitrário, tomamos  $\varrho_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) como o novo conjunto de vetores posição, definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \varrho_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \\
 \varrho_2 &= \mathbf{r}_2 - \frac{1}{\sigma_1}(m_0\mathbf{r}_0 + m_1\mathbf{r}_1), \\
 \varrho_3 &= \mathbf{r}_3 - \frac{1}{\sigma_2}(m_0\mathbf{r}_0 + m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2), \\
 &\dots \\
 \varrho_N &= \mathbf{r}_N - \frac{1}{\sigma_{N-1}}(m_0\mathbf{r}_0 + m_1\mathbf{r}_1 + \dots + m_{N-1}\mathbf{r}_{N-1}).
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde introduzimos

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^k m_j.$$

De forma mais geral, podemos escrever

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{g}_{k-1}, \quad (2.36)$$

onde  $\mathbf{g}_{k-1}$  é o baricentro dos  $(k-1)$ -corpos tomados anteriormente, de tal modo que

$$\sigma_k \mathbf{g}_k = \sum_{j=0}^k m_j \mathbf{r}_j. \quad (2.37)$$

Temos então que

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{r}_k - \frac{1}{\sigma_{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} m_j \mathbf{r}_j, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (2.38)$$

Algumas importantes relações entre as coordenadas podem ser obtidas, e são expostas a seguir (Duboshin, 1969).

Multiplicando a Eq.(2.38) por  $\sigma_{k-1}$ :

$$\boldsymbol{\rho}_k = \frac{1}{\sigma_{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} m_j (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j). \quad (2.39)$$

Da Eq.(2.37), vem que

$$\sigma_k \mathbf{g}_k - \sigma_{k-1} \mathbf{g}_{k-1} = \sum_{j=0}^k m_j \mathbf{r}_j - \sum_{j=0}^{k-1} m_j \mathbf{r}_j = m_k \mathbf{r}_k. \quad (2.40)$$

Usando que  $\mathbf{g}_k = \mathbf{r}_{k+1} - \boldsymbol{\rho}_{k+1}$ , e  $m_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$  na expressão anterior, após alguns cálculos, encontraremos a relação:

$$\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k = \boldsymbol{\rho}_{k+1} - \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} \boldsymbol{\rho}_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (2.41)$$

Somando sobre o índice  $k$ , de 0 a  $i-1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{r}_{k+1} - \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{r}_k &= \sum_{k=0}^{i-1} \boldsymbol{\rho}_{k+1} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} \boldsymbol{\rho}_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 &= (\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2 + \dots + \boldsymbol{\rho}_i) - \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \boldsymbol{\rho}_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \boldsymbol{\rho}_2 + \dots + \frac{\sigma_{i-2}}{\sigma_{i-1}} \boldsymbol{\rho}_{i-1} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 &= \boldsymbol{\rho}_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k}{\sigma_k} \boldsymbol{\rho}_k. \end{aligned} \quad (2.42)$$

É possível obter, da Eq.(2.42),

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{g}_N - \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\sigma_k} \boldsymbol{\rho}_k, \quad (2.43)$$

e desse resultado, seguem

$$\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{g}_N - \sum_{k=i}^N \frac{m_k}{\sigma_k} \boldsymbol{\rho}_k, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k}{\sigma_k} \boldsymbol{\rho}_k, \quad (j > i). \quad (2.45)$$

Particularmente, se estabelecermos o baricentro como nosso sistema de referência inercial, então  $\mathbf{g}_N = 0$  nas equações acima.

Agora, das Eqs.(2.36) e (2.40), vem que

$$m_i \boldsymbol{\rho}_i = \sigma_i \mathbf{g}_i - \sigma_i \mathbf{g}_{i-1}, \quad (2.46)$$

e ficamos com

$$m_i \mathbf{r}_i = \sigma_i \mathbf{g}_i - \sigma_{i-1} \mathbf{g}_{i-1}, \quad (2.47)$$

$$m_i \boldsymbol{\rho}_i = \sigma_i \mathbf{g}_i - \sigma_i \mathbf{g}_{i-1}. \quad (2.48)$$

Da Eq.(2.48), após exaustivo algebrismo, é possível chegar à expressão a seguir

$$\begin{aligned} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_{i-1}} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2 &= \sigma_i \dot{\mathbf{g}}_i^2 - \sigma_{i-1} \dot{\mathbf{g}}_{i-1}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{i=0}^N \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_{i-1}} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2 &= \sigma_N \dot{\mathbf{g}}_N^2 - \sigma_0 \dot{\mathbf{g}}_0^2. \end{aligned}$$

Novamente utilizando a ideia do referencial baricêntrico, vem que

$$\sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=0}^N \tilde{\mu}_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2, \quad (2.49)$$

onde definimos a massa reduzida da formulação de Jacobi:

$$\tilde{\mu}_i = \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i}. \quad (2.50)$$

Em termos das coordenadas jacobianas, mostra-se muito complicado escrever explicitamente a equação de movimento newtoniana para um corpo sob a ação gravitacional de N massas. No Apêndice A, apresentamos as formas analíticas dessas equações para o problema de três corpos. De maneira mais geral, temos que (Duboshin, 1969)

$$\tilde{\mu}_i \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i = -\nabla_{\boldsymbol{\rho}_i} U, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.51)$$

onde  $U$  é dada pela Eq.(2.7) e, para o cálculo do gradiente, usamos Eq.(2.45) para reescrever cada  $\Delta_{ij}$  em termos das quantidades  $\boldsymbol{\rho}_i$ . Se definimos, em termos de coordenadas retangulares, os vetores posição  $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = (\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i)$ , então o operador diferencial é dado por

$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}_i} = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial \eta_i} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}. \quad (2.52)$$

O momento angular total do sistema é expressado como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = m_0 \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \\ &= M \mathbf{g}_N \times \dot{\mathbf{g}}_N + m_0 \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\sigma_k} \boldsymbol{\rho}_k \times \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\sigma_k} \dot{\boldsymbol{\rho}}_k + \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i \left( \boldsymbol{\rho}_i - \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\sigma_k} \boldsymbol{\rho}_k \right) \times \left( \dot{\boldsymbol{\rho}}_i - \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\sigma_k} \dot{\boldsymbol{\rho}}_k \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

e é possível escrever (Duboshin, 1969)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i. \quad (2.54)$$

Em coordenadas retangulares  $(\xi, \eta, \zeta)$ , reduzimos novamente ao referencial baricêntrico, e ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) &= c'_1, \\ \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) &= c'_2, \\ \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) &= c'_3. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Usando a igualdade estabelecida pela Eq.(2.49), pode-se expressar a energia cinética do sistema.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}_B^2 + T' = \frac{1}{2M} \left( \sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{R}}_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2. \quad (2.56)$$

## 2.2 Formalismo Hamiltoniano

Na seção anterior, apresentamos as integrais de energia e momento angular e as respectivas equações de movimento para um problema de (N+1)-corpos, em diferentes sistemas de coordenadas, utilizando somente o formalismo newtoniano. Pode-se, também, optar

por outros tipos de formulações matemáticas, como Lagrange e Hamilton. Neste trabalho, optamos pela aplicação do formalismo hamiltoniano. Introduziremos, a seguir, alguns conceitos importantes a esse respeito.

### 2.2.1 Princípio de Hamilton

Seja tomado um sistema definido por  $n$  coordenadas generalizadas  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Tem-se, em outras palavras, um sistema de  $n$  graus de liberdade.

Seja  $T(q, \dot{q})$  a energia cinética desse sistema, definida como uma função das velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); e  $U(q, t)$  a energia potencial do sistema, independente das velocidades. Portanto, o sistema é conservativo. O momento generalizado conjugado a coordenada  $q_i$  é definido como

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.57)$$

e o Hamiltoniano do sistema é dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - T(q, \dot{q}) + U(q, t). \quad (2.58)$$

Segundo o princípio de Hamilton (Hamilton, 1834), a ação do sistema entre os instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$ , definida pela integral

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right] dt, \quad (2.59)$$

é estacionária perante variações arbitrárias das soluções entre os estados inicial e final. Equivalentemente, escreve-se  $\delta \mathcal{A} = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ , onde  $L = L(q, \dot{q}, t)$  é a função Lagrangeana do sistema:

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}. \quad (2.60)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange (Lemos, 2007; Thornton e Marion, 2004) para resolver o problema variacional de (2.59), obtêm-se as seguintes relações:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (2.61)$$

Essas equações são conhecidas como *equações de Hamilton*, ou equações canônicas de movimento, e formam um conjunto de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem. As variáveis  $q_i$  e  $p_i$  são denominadas *variáveis canônicas*, e qualquer sistema dinâmico capaz de ser caracterizado pela Eq.(2.61) é chamado sistema hamiltoniano.

Se o sistema for autônomo, i.e.,  $\mathcal{H}$  não depende de  $t$ , e o potencial é tal que as forças generalizadas podem ser derivadas segundo  $\mathbf{f}_i = \nabla_i U(q)$ , então o Hamiltoniano equivale à energia total do sistema.

### 2.2.2 Transformações Canônicas

Quando o Hamiltoniano é independente de uma ou mais variáveis canônicas, diz-se então que tais variáveis são *cíclicas*, e a Eq.(2.61) implica que as respectivas variáveis conjugadas são constantes de movimento. Pode-se, então, pensar em alguma maneira de se construir um Hamiltoniano segundo tais características, de forma a simplificar as equações do sistema e facilitar a obtenção de uma solução completa.

Tal procedimento é possível através da aplicação de uma *transformação canônica*: trata-se de uma transformação do conjunto de coordenadas, de maneira tal que se preserve a forma canônica das equações, i.e., as equações de Hamilton continuam válidas para as novas coordenadas.

Se considerarmos uma mudança das variáveis canônicas originais  $(q_i, p_i)$  para um novo conjunto  $(Q_i, P_i)$ , dado em função do primeiro conjunto,

$$Q_j = Q_j(q, p, t), \quad (2.62)$$

$$P_j = P_j(q, p, t), \quad (2.63)$$

tal transformação será dita canônica se

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.64)$$

para alguma nova função  $\mathcal{K}(Q, P)$ .

Uma das importantes aplicações deste conceito consiste em buscar uma transformação na qual o novo Hamiltoniano dependa explicitamente apenas dos novos momentos  $P_i$ . Dessa forma, as equações de Hamilton podem ser imediatamente integradas, uma vez que os novos momentos serão constantes:

$$\begin{aligned} \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_j} = 0 &\Rightarrow P_j = \text{const.} \\ \dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_j} \equiv \Omega_j(P) = \text{const} &\Rightarrow Q_j(t) = Q_{j0} + \Omega_j(P)t. \end{aligned}$$

Equivalentemente, pode-se dizer que a transformação canônica preserva o Princípio de Hamilton. Assim, nas novas variáveis,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K}(Q, P, t) \right] dt = 0.$$

Comparando com (2.59), tem-se

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - (\mathcal{H} - \mathcal{K}) \right] dt = 0. \quad (2.65)$$

Resolvendo a última equação, encontra-se a solução para a transformação.

Pode-se inserir, de fato, uma diferencial exata de uma função arbitrária  $\mathcal{S}$  das variáveis consideradas, dentro do sinal de integração, sem alterar-se o resultado. Uma vez que as  $4n$  variáveis  $q_i, p_i, Q_i, P_i$  não são independentes, toma-se arbitrariamente  $2n$  variáveis independentes para a função  $\mathcal{S}$ . A partir de (2.65), obtém-se:

$$d\mathcal{S} = \left[ \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - (\mathcal{H} - \mathcal{K}) \right] dt. \quad (2.66)$$

A função  $\mathcal{S}$  é denominada *função geratriz* da transformação canônica. Escolhendo  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(q, P)$ , da Eq.(2.66) obtêm-se as equações da transformação canônica das variáveis:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_i}. \quad (2.67)$$

A relação entre os Hamiltonianos antes e depois da transformação é dada por

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}.$$

Quando  $\mathcal{S}$  independe do tempo, então  $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ , e a transformação é dita conservativa.

### 2.2.3 Teoria de Hamilton-Jacobi

A idéia principal da teoria hamiltoniana é, dado um sistema dinâmico, descrito por um Hamiltoniano específico, por intermédio de transformações canônicas operadas sobre as variáveis de estado desse sistema, obter um novo Hamiltoniano, mais simples que o primeiro. De maneira ideal, espera-se que a transformação canônica empregada seja capaz de fornecer um novo Hamiltoniano dependente somente um dos momentos, i.e, possuindo apenas um grau de liberdade.

Tomemos um sistema conservativo de  $n$  graus de liberdade. Seja o Hamiltoniano  $\mathcal{H}(q, p)$  independente do tempo, e  $\phi$  a transformação canônica definida por (2.67), i.e.  $\phi : (q, p) \Rightarrow (Q, P)$ . Busca-se um Hamiltoniano transformado  $\mathcal{K}$  dependente somente de uma das novas variáveis canônicas. Assim:

$$\mathcal{K}(Q, P) = P_1. \quad (2.68)$$

Tem-se, então, um novo sistema hamiltoniano trivial. A energia desse sistema é dada por  $E = P_1$ , e a solução geral é:

$$\begin{aligned} Q_1 &= t + \alpha_1, & P_1 &= \beta_1 = E, \\ Q_\mu &= \alpha_\mu, & P_\mu &= \beta_\mu \quad (\mu = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) são constantes de integração.

Arbitrariamente, impomos que  $\phi$  define uma transformação conservativa, e portanto

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{K}(Q, P). \quad (2.70)$$

Seja  $\mathcal{S}(q, P)$  a função geratriz da transformação. Introduzindo (2.67) em (2.70), obtém-se a equação de Hamilton-Jacobi

$$\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i}\right) = P_1 = E \quad (2.71)$$

A equação acima é uma equação diferencial parcial de primeiro grau nas  $n$  variáveis independentes  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , e  $E$  é somente um parâmetro. A solução de (2.71),  $\mathcal{S}$ , deve ser uma função de  $2n$  variáveis. Nesse caso, os valores dos  $P_i$  são tomados das respectivas constantes de integração  $\beta_i$ .

Conhecida a solução completa  $\mathcal{S}(q, P)$ , a solução para o sistema dinâmico é dada por

$$\begin{aligned} t + \alpha_1 &= Q_1 = \frac{\partial \mathcal{S}(q, \beta)}{\partial \beta_1}, \\ \alpha_\mu &= Q_\mu = \frac{\partial \mathcal{S}(q, \beta)}{\partial \beta_\mu}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

#### 2.2.4 Movimentos Periódicos: Variáveis de Ângulo-Ação

Sistemas periódicos se mostram de grande importância em praticamente todos os ramos da Física, e entre estes, destacamos a Mecânica Celeste. Problemas de dinâmica envolvendo fenômenos de ressonância são modelados por meio de tais sistemas.

Um sistema cujo Hamiltoniano não depende explicitamente do tempo é chamado *separável* se, para o conjunto de coordenadas generalizadas  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , existe uma integral completa da equação 2.71 independente do tempo, tal que

$$\mathcal{S}(q_1, q_2, \dots, q_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \mathcal{S}_1(q_1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) + \dots + \mathcal{S}_n(q_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \quad (2.73)$$

No caso de um sistema separável, temos que:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} = f_i(q_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \quad (2.74)$$

A equação anterior vem a ser projeção sobre o plano  $(q_i, p_i)$  do movimento que o sistema realiza no espaço de fase.

Um sistema separável é dito *multiperiódico* se a projeção do movimento sobre cada plano  $(q_i, p_i)$  é tal que satisfaça uma das seguintes condições:

- a curva  $p_i(q_i, \beta)$  é fechada, e  $q_i$  oscila periodicamente entre dois limites definidos  $q_{i,1} = a_i$  e  $q_{i,2} = b_i$ . A variável  $q_i$  pode ser tanto um ângulo ou uma distância linear, e seu movimento característico é denominado *libração*;
- $p_i$  é uma função periódica de  $q_i$ , com período  $q_{i,0}$ , mas  $q_i$  não é função periódica do tempo. Refere-se a este caso usualmente como *rotação* ou *circulação*.

A dinâmica de sistemas multiperiódicos pode ser abordada através das variáveis de ação e ângulo, com as quais é possível calcular as frequências típicas do movimento. Tal advento foi introduzido originalmente por Delaunay na Astronomia.

No caso de  $n$  graus de liberdade, as variáveis de ação são definidas da seguinte forma

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad (2.75)$$

com as integrais estendendo-se por um período de libração ou de circulação. As ações  $J_i$  são identificadas como os novos momentos  $P_i$  de uma dada transformação canônica.

As variáveis canônicas conjugadas a  $J_i$ , chamadas de variáveis angulares  $\varphi_i$ , são dadas por

$$\varphi_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial J_i}. \quad (2.76)$$

## 2.3 Equações de Hamilton para o problema de (N+1)-corpos

Nas duas subseções a seguir, apresentamos o problema de (N+1)-corpos na perspectiva do formalismo de Hamilton da Mecânica. Definimos as equações de movimento somente para o referencial baricêntrico.

### 2.3.1 Referencial Baricêntrico

Denotemos por  $\mathbf{X}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) os vetores de posição com respeito a um referencial inercial (baricêntrico), sendo  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{X}}_i$  os respectivos momentos (lineares) conjugados. O Hamiltoniano do sistema fornece a energia total (2.9), e é escrito como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{m_i} - \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (2.77)$$

Notamos, novamente, que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{X}, \mathbf{p})$  é um sistema de ordem  $6(N+1)$ , ou, equivalentemente, de  $3(N+1)$  graus de liberdade.

As variáveis  $\mathbf{X}_i$  e  $\mathbf{p}_i$  são canônicas, e portanto satisfazem (2.61):

$$\frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \nabla_{\mathbf{p}_i} \mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}, \quad (2.78)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\nabla_{\mathbf{X}_i} \mathcal{H} = - \sum_{j=0, j \neq i}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j). \quad (2.79)$$

Através de (2.78) e (2.79), no lugar de  $3(N+1)$  equações diferenciais de segunda ordem em  $\mathbf{X}_i$ , como em (2.4), têm-se  $6(N+1)$  equações diferenciais de primeira ordem, nas variáveis  $\mathbf{X}_i$  e  $\mathbf{p}_i$ .

É possível reduzir o sistema para  $3N$  graus de liberdade, utilizando as integrais de movimento clássicas (leis de conservação dos momentos, centro de massa e energia). De outro modo, ainda pode-se reduzir o número de graus de liberdade para  $3N$  adotando novas variáveis canônicas. Explicitamos abaixo duas abordagens clássicas para o tratamento do problema de (N+1)-corpos.

## 2.4 Variáveis Canônicas de Jacobi

Em Mecânica Celeste, há dois conjuntos especiais de variáveis, que são canônicas e que, além disso, permitem que o Hamiltoniano de um sistema de (N+1)-corpos seja reduzido a  $3N$  graus de liberdade.

O primeiro conjunto é obtido através do conceito de transformações canônicas, utilizando as coordenadas de Jacobi.

O segundo é gerado por uma transformação canônica definida por Poincaré (Laskar, 1991).

Já conhecemos a definição das variáveis de Jacobi. Usando a notação estabelecida anteriormente para as coordenadas do sistema inercial, de forma mais geral, tem-se:

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{X}_k - \frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=0}^{k-1} m_j \mathbf{X}_j \quad (2.80)$$

( $k = 1, 2, \dots, N$ ), onde

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^k m_j.$$

A fim de completar o conjunto de vetores que descrevem a posição dos (N+1)-corpos, definimos:

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \frac{1}{\sigma_N} \sum_{j=0}^N m_j \mathbf{X}_j \quad (= \mathbf{0}). \quad (2.81)$$

Agora, há que se definir os novos momentos, conjugados às coordenadas  $\boldsymbol{\rho}_k$ . O conjunto de novos momentos é determinado de maneira tal que a condição de canonicidade (2.66) seja obedecida, i.e.,  $\sum_{j=0}^N (\mathbf{p}_j d\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\pi}_j d\boldsymbol{\rho}_j) = 0$ , onde  $\boldsymbol{\pi}_j$  designa os novos momentos. Pode-se também partir da função geratriz  $\mathcal{S}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\pi}) = \sum_{i=0}^N \int \boldsymbol{\rho}_i d\pi_i$ . Os momentos originais podem ser obtidos da relação  $\mathbf{p}_i = \nabla_{\mathbf{X}_i} \mathcal{S}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\pi})$  (Ferraz-Mello et al., 2005). Calculando os N+1 momentos, teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \boldsymbol{\pi}_1 - \frac{m_1 \boldsymbol{\pi}_2}{\sigma_1} - \frac{m_1 \boldsymbol{\pi}_3}{\sigma_2} - \dots - \frac{m_1 \boldsymbol{\pi}_N}{\sigma_{N-1}} + \frac{m_1 \boldsymbol{\pi}_0}{\sigma_N} \\ \mathbf{p}_2 &= \boldsymbol{\pi}_2 - \frac{m_2 \boldsymbol{\pi}_3}{\sigma_2} - \dots - \frac{m_2 \boldsymbol{\pi}_N}{\sigma_{N-1}} + \frac{m_2 \boldsymbol{\pi}_0}{\sigma_N} \\ &\dots \\ \mathbf{p}_0 &= \frac{m_0 \boldsymbol{\pi}_0}{\sigma_N} - \boldsymbol{\pi}_1 - \frac{m_0 \boldsymbol{\pi}_2}{\sigma_1} - \frac{m_0 \boldsymbol{\pi}_3}{\sigma_2} - \dots - \frac{m_0 \boldsymbol{\pi}_N}{\sigma_{N-1}} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Aplicando o resultado anterior na expressão para a energia cinética  $T$ , após algum exaustivo algebrismo, chega-se a

$$T = \frac{\pi_0^2}{2\sigma_N} + \sum_{k=1}^N \frac{\pi_k^2}{2\tilde{\mu}_k}, \quad (2.83)$$

onde  $\tilde{\mu}_k$  é a massa reduzida da formulação de Jacobi definida em (2.50). O Hamiltoniano do sistema é dado então por

$$\mathcal{H} = \frac{\pi_0^2}{2\sigma_N} + \sum_{k=1}^N \frac{\pi_k^2}{2\tilde{\mu}_k} - \sum_{i=0}^N \sum_{j>i}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \quad (2.84)$$

Sabemos de antemão que  $\Delta_{ij} = |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|$ . Mas, de (2.45), percebe-se que  $\Delta_{ij}$  depende somente dos vetores  $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \dots, \boldsymbol{\rho}_N$ , isto é,  $\boldsymbol{\rho}_0$  é uma coordenada ignorável no Hamiltoniano (portanto, cíclica). Sendo assim,  $\boldsymbol{\pi}_0$  é constante. Temos então:

(i) pelas equações de Hamilton

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}_0 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\rho}_0} = 0; \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 = \nabla_{\boldsymbol{\pi}_0} \mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{\pi}_0}{\sigma_N} (= \text{const}); \quad (2.85)$$

(ii) assumindo  $\boldsymbol{\pi}_0 = 0$  (podemos fazê-lo, pois  $\boldsymbol{\pi}_0$  é constante), a redução do Hamiltoniano é imediata

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^N \frac{\pi_k^2}{2\tilde{\beta}_k} + U. \quad (2.86)$$

Escrevemos agora o Hamiltoniano na forma  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ , onde

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\pi_k^2}{2\tilde{\beta}_k} - \frac{\mathcal{G}\sigma_k \tilde{\beta}_k}{\rho_k} \right), \quad (2.87)$$

$$\mathcal{H}_1 = - \sum_{k=1}^N \sum_{j=k+1}^N \mathcal{G} \frac{m_k m_j}{\Delta_{kj}} - \sum_{k=1}^N \mathcal{G} m_k \left( \frac{m_0}{\Delta_{0k}} - \frac{\sigma_{k-1}}{\rho_k} \right), \quad (2.88)$$

onde  $\rho_k = |\boldsymbol{\rho}_k|$ .

As funções  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$  definem um sistema de  $3N$  graus de liberdade nas variáveis canônicas  $(\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\pi}_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Nas equações anteriores,  $\mathcal{H}_0$  define a parte não perturbada do Hamiltoniano, enquanto que  $\mathcal{H}_1$  é o termo devido às perturbações íntinsecas do sistema.

## 2.5 Variáveis Canônicas de Poincaré

Na formulação de Poincaré, as variáveis de posição são dadas pelas coordenadas astrocêntricas do respectivo corpo, enquanto que os momentos conjugados são os mesmos da formulação baricêntrica. Assim,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_0, \quad \boldsymbol{\Pi}_i = \mathbf{p}_i, \quad (2.89)$$

( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Uma vez que o sistema possui  $(N+1)$ -corpos, definimos o par de variáveis

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{X}_0, \quad \mathbf{\Pi}_0 = \sum_{i=0}^N \mathbf{p}_i. \quad (2.90)$$

Partindo da condição  $\sum_{i=0}^N \mathbf{p}_i d\mathbf{X}_i = \sum_{j=0}^N \mathbf{\Pi}_j d\mathbf{r}_j$ , verifica-se a canonicidade das variáveis  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{\Pi}_j)$ .

Escrevendo o Hamiltoniano do sistema em termos das novas variáveis, teremos, para a energia cinética  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \frac{p_i^2}{m_i} = \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_0}{2m_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\Pi_i^2}{m_i} \quad (2.91)$$

Mas  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{\Pi}_0 - \sum_{i=1}^N \mathbf{\Pi}_i$ , e

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_0 &= \left( \mathbf{\Pi}_0 - \sum_{i=1}^N \mathbf{\Pi}_i \right) \cdot \left( \mathbf{\Pi}_0 - \sum_{i=1}^N \mathbf{\Pi}_i \right) = \\ &= \Pi_0^2 - 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{\Pi}_0 \cdot \mathbf{\Pi}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{\Pi}_i \cdot \sum_{j=1}^N \mathbf{\Pi}_j = \\ &= \Pi_0^2 - 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{\Pi}_0 \cdot \mathbf{\Pi}_i + \sum_{i=1}^N \Pi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \mathbf{\Pi}_i \cdot \mathbf{\Pi}_j \end{aligned}$$

Finalmente, obtém-se

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\Pi_i^2}{m_i} + \frac{\Pi_0^2}{2m_0} + \sum_{i=1}^N \frac{\Pi_i^2}{2m_0} - \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{\Pi}_0 \cdot \mathbf{\Pi}_i}{m_0} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\mathbf{\Pi}_i \cdot \mathbf{\Pi}_j}{m_0} \quad (2.92)$$

A energia potencial:

$$U = - \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}} = - \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{G}m_0 m_j}{\Delta_{0j}} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad (2.93)$$

onde  $\Delta_{0j} = |\mathbf{r}_j| = r_j$

Observando as equações anteriores, facilmente é possível observar a redução do número de graus de liberdade. Verifica-se, principalmente, a ausência da variável  $\mathbf{r}_0$ , fato que implica  $\mathbf{\Pi}_0$  constante, de (2.79). Das equações canônicas de Hamilton:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_0 = 0; \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \frac{\mathbf{\Pi}_0}{m_0} - \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{\Pi}_i}{m_0} \quad (2.94)$$

Como temos  $\mathbf{\Pi}_0$  constante, arbitrariamente definimos o mesmo como nulo. Assim, o Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  passa a ser uma função somente das  $2N$  variáveis  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_2, \dots, \mathbf{\Pi}_N)$ .

De fato, uma redução para  $3N$  graus de liberdade. (Por questão de simplicidade, voltamos à notação  $\mathbf{p}_i$ , uma vez que, excluindo o índice 0, é equivalente à  $\mathbf{\Pi}_i$ )

Escrevemos o Hamiltoniano do sistema como  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{R}$ , tal que

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{p_i^2}{2m_0} - \frac{\mathcal{G}m_i m_0}{r_i} \right] = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2\beta_i} - \frac{\mu_i \beta_i}{r_i} \right]; \quad (2.95)$$

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \left[ -\frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}} + \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{m_0} \right], \quad (2.96)$$

onde

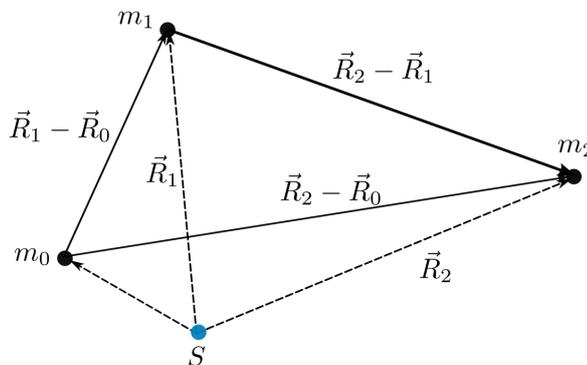
$$\mu_i = \mathcal{G}(m_0 + m_i); \quad \beta_i = \frac{m_0 m_i}{m_0 + m_i} \quad (2.97)$$

Na denominação adotada,  $\mathcal{H}_0$  vem a denotar a parte do Hamiltoniano livre de perturbações, enquanto que  $\mathcal{R}$  se mostra como o potencial que advém das interações entre os  $N$  corpos, ou seja, a parte perturbativa: o primeiro termo é referente à perturbação direta, e o segunda, à parte indireta.



## O Problema de 3 Corpos - Expansão do potencial perturbador

O problema geral de 3 corpos da Mecânica Celeste consiste em determinar as posições e velocidades ao longo do tempo de três massas pontuais interagindo gravitacionalmente. Seja tomada, então, a seguinte configuração: considere um sistema de massas pontuais  $m_0$ ,  $m_1$  e  $m_2$ , cujas posições são definidas pelos respectivos vetores  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$ , relativos a um referencial inercial com origem em um ponto  $S$  arbitrário, conforme apresentado na Fig. 3.1.



*Figura 3.1:* Representação gráfica do Problema de Três Corpos, referenciado em um sistema inercial arbitrário de origem  $S$ .

Da Lei de Gravitação de Newton, temos as acelerações de cada corpo, no referencial

dado:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}}_0 &= \mathcal{G} \left[ m_1 \frac{\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0|^3} + m_2 \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0|^3} \right], \\ \ddot{\mathbf{R}}_1 &= \mathcal{G} \left[ m_0 \frac{\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0|^3} + m_2 \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} \right], \\ \ddot{\mathbf{R}}_2 &= \mathcal{G} \left[ m_0 \frac{\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0|^3} + m_1 \frac{\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} \right].\end{aligned}\quad (3.1)$$

Em nosso estudo, utilizaremos do formalismo hamiltoniano apresentado no capítulo anterior. Assim, o Hamiltoniano desse sistema é escrito como:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{P}_0^2}{2m_0} + \frac{\mathbf{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{P}_2^2}{2m_2} - \sum_{i=0}^2 \sum_{j>i}^2 \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad (3.2)$$

onde  $\Delta_{ij} = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|$ , e  $\mathbf{P}_i = m_i \dot{\mathbf{R}}_i$  são os momentos lineares conjugados aos vetores  $\mathbf{R}_i$ . O Hamiltoniano (3.2) possui 9 graus de liberdade (em coordenadas retangulares,  $X_i, Y_i, Z_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ ). Sabemos que é possível reduzir o número de graus de liberdade para  $3(N - 1) = 6$ , se introduzirmos uma mudança de referencial. Considere-se, então, um sistema de referência astrocêntrico, fixado sobre o corpo de massa  $m_0$ . Nesse caso:

$$\mathbf{R}'_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{P}'_1 = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{R}'_2 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{P}'_2 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0 \quad (3.4)$$

No entanto,  $(\mathbf{R}'_i, \mathbf{P}'_i)$  como definidos anteriormente não constituem um conjunto de variáveis canônicas. Se computarmos os colchetes de Poisson  $[X'_i, \dot{X}'_j]$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ , facilmente veremos que são diferentes de zero (analogamente para  $[Y'_i, \dot{Y}'_j]$  e  $[Z'_i, \dot{Z}'_j]$ ) (Lemos, 2007; Ferraz-Mello, 2007).

Dois sistemas de coordenadas canônicas aparecem como alternativas (conforme já discutiu-se no capítulo 2): o sistema de coordenadas astrocêntricas de Poicaré, e o sistema de coordenadas de Jacobi. O estudo a seguir é desenvolvido utilizando a abordagem de Jacobi.

As relações que definem as novas coordenadas são dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}_2 - \frac{m_0 \mathbf{R}_0 + m_1 \mathbf{R}_1}{m_0 + m_1},\end{aligned}\quad (3.5)$$

conforme esquematizado na Fig. 3.2

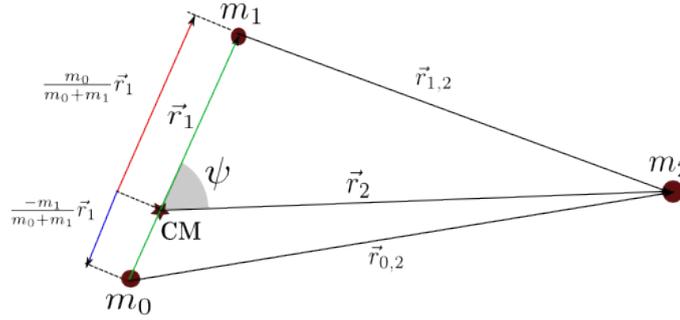


Figura 3.2: Representação gráfica do sistema utilizando as coordenadas de Jacobi. O ponto CM indica a posição do centro de massa de  $m_0$  e  $m_1$ ;  $\psi$  é o ângulo entre formado entre os vetores posição no sistema de Jacobi,  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ ;  $\mathbf{r}_{i,j}$  é o vetor de distância entre os respectivos corpos  $i$  e  $j$ . (Figura retirada da tese de Doutorado de Eduardo A. Ines.)

Os respectivos momentos conjugados são obtidos através da aplicação da condição canônica:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{P}_i d\mathbf{R}_i &= \sum_i \mathbf{p}_i d\mathbf{r}_i \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{P}_0 d\mathbf{R}_0 + \mathbf{P}_1 d\mathbf{R}_1 + \mathbf{P}_2 d\mathbf{R}_2 &= \mathbf{p}_1 d\mathbf{R}_1 - \mathbf{p}_1 d\mathbf{R}_0 + \mathbf{p}_2 d\mathbf{R}_2 \\ &- \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{p}_2 d\mathbf{R}_0 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \mathbf{p}_2 d\mathbf{R}_1 \end{aligned}$$

Fazendo a correspondência entre os termos que carregam os mesmos diferenciais de posição, encontraremos as expressões finais para os momentos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{p}_1 &= -\mathbf{P}_0 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \mathbf{P}_2, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{P}_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aplicando as transformações para as coordenadas de Jacobi dadas por (3.6) e (3.7) sobre o Hamiltoniano (3.2), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m_0} \left( \mathbf{p}_1 + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{p}_2 \right)^2 + \frac{1}{2m_1} \left( \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \mathbf{p}_2 \right)^2 + \frac{1}{2m_2} \mathbf{p}_2^2 \\ &- \frac{\mathcal{G}m_0m_1}{r_1} - \frac{\mathcal{G}m_0m_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0|} - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Analisando a Fig.3.2, vemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1, \end{aligned}$$

onde definiu-se  $\mathbf{x}_0 = -\frac{m_1}{m_0+m_1}\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{x}_1 = \frac{m_0}{m_0+m_1}\mathbf{r}_1$

Podemos, assim, reescrever o termo de energia potencial do hamiltoniano em termos das variáveis de Jacobi.

É possível encarar esse problema como a superposição de dois sistemas dinâmicos de dois corpos. O primeiro é dado pela interação gravitacional entre as massas  $m_0$  e  $m_1$ , e o segundo pela interação entre a massa  $m_2$  e o centro de massa do sistema  $m_0 + m_1$ . Reescrevemos o Hamiltoniano (3.2) como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{Kep} + \mathcal{R}, \quad (3.8)$$

onde  $\mathcal{H}_{Kep}$  denota a parte kepleriana de nosso problema, i.e., a parte não-perturbada. Trata-se, exatamente, da superposição dos dois problemas de dois corpos.  $\mathcal{R}$  vem a ser o termo originado pela perturbação mútua entre os sistemas. Temos que:

$$\mathcal{H}_{Kep} = \underbrace{\left[ \frac{(m_0 + m_1) \mathbf{p}_1^2}{m_0 m_1} - \frac{\mathcal{G} m_0 m_1}{r_1} \right]}_{\mathcal{H}_1} + \underbrace{\left[ \frac{(m_0 + m_1 + m_2) \mathbf{p}_2^2}{m_2 (m_0 + m_1)} - \frac{\mathcal{G} m_2 (m_0 + m_1)}{r_2} \right]}_{\mathcal{H}_2}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  denotam os Hamiltonianos respectivos de cada ‘sistema’ de dois corpos. Utilizando os elementos osculadores que surgem da análise do problema de dois corpos, escrevemos

$$\mathcal{H}_{Kep} = -\frac{\mathcal{G} m_0 m_1}{2a_1} - \frac{\mathcal{G} m_2 (m_0 + m_1)}{2a_2}. \quad (3.10)$$

Aqui,  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ) é o semi-eixo maior descrito pela órbita elíptica do  $i$ -ésimo corpo, em relação ao centro de força respectivo ( $m_0$  para o corpo  $m_1$ ; e o centro de massa de  $m_0$  e  $m_1$  para a massa  $m_2$ ).

A parte da perturbação é dada por:

$$\mathcal{R} = \underbrace{\frac{\mathcal{G} m_2 (m_0 + m_1)}{|\mathbf{r}_2|}}_{\text{(I)}} - \underbrace{\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \frac{m_0}{m_0+m_1}\mathbf{r}_1|}}_{\text{(I)}} - \underbrace{\frac{\mathcal{G} m_0 m_2}{|\mathbf{r}_2 + \frac{m_1}{m_0+m_1}\mathbf{r}_1|}}_{\text{(II)}} \quad (3.11)$$

Atendo-nos ao senso de posicionamento adotado (Jacobi), identificamos as partes do potencial perturbador da seguinte maneira: (I) designa a parte direta, enquanto que (II) vem a ser a parte indireta da perturbação. Definimos, respectivamente,  $\mathcal{R}_D$  e  $\mathcal{R}_I$  tais que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D + \mathcal{R}_I$ .

### 3.1 Expansão do termo perturbador

O potencial perturbador é uma função extremamente complicada. Ele não apresenta uma forma concisa quando o expressamos em termos de elementos orbitais, o que nos obriga a escrevê-lo em séries de potências. Tais séries podem vir a apresentar problemas quanto à convergência para os pontos do espaço de fase. Um dos principais entraves reside no fato de que o potencial gravitacional diverge no caso em que a distância entre o corpo considerado e o corpo perturbador tende a zero: neste caso, ocorre a intersecção das órbitas, e não há convergência das séries. É bem verdade que o conceito de convergência para as séries de potência, especialmente no caso das expansões de Laplace, se trata de uma questão muito mais estrita do que a ‘simples’ não intersecção das órbitas (Ferraz-Mello, 1994).

Já mencionamos, na introdução, diversas referências que aparecem na literatura, apresentando metodologias de expansão do termo perturbador. No prosseguimento deste trabalho, nos propomos a desenvolver um resultado clássico do método de Laplace, através de expansões em séries de Fourier.

#### 3.1.1 Condição de aproximação do par: *close approach*

Apresentamos, rapidamente, o critério que aplicamos para garantir que os valores tomados para os elementos orbitais de  $m_1$  e  $m_2$  não conduzissem a configurações tais que  $\Delta = 0$ , atingindo a singularidade do potencial perturbador.

Analisando a Fig. (3.2) e a expressão (3.11), percebe-se que estabelecer  $\Delta > 0$  implica em se ter

$$|\mathbf{r}_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1| > 0 \quad (3.12)$$

Precisamente, a equação acima equivale a

$$r_2^2 + \left( \frac{m_0}{m_0 + m_1} r_1 \right)^2 - \frac{2m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$$

Simplificamos a nossa condição de não-singularidade para

$$|\mathbf{r}_2| > \frac{m_0}{m_0 + m_1} |\mathbf{r}_1|$$

O fator  $m_0/(m_0 + m_1) \leq 1$ , de forma que

$$\frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1 \leq \mathbf{r}_1 < \mathbf{r}_2 \quad (3.13)$$

Em termos dos valores absolutos dos vetores, queremos garantir que  $r_2 > r_1$ . Das leis clássicas de Kepler, sabemos que podemos escrever o módulo do vetor posição de uma órbita planetária como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad (3.14)$$

onde  $f$  é a anomalia verdadeira dessa órbita.

É fácil perceber que o denominador da equação acima varia dentro do intervalo  $1 - e \leq 1 + e \cos f \leq 1 + e$ . Para garantir que o domínio considerado não inclua pontos que resultem em  $\Delta \rightarrow 0$ , estabelecemos como *critério de verificação*:

$$\gamma_{ext} = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2} > \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 - e_1} = \gamma_{int}, \quad (3.15)$$

no qual  $\gamma_{int}$  e  $\gamma_{ext}$  designam quantidades que aqui denominamos de parâmetros interno e externo, respectivamente. A relação (3.15) nada mais é que uma forma de garantir, matematicamente, que o periastro característico da órbita externa seja maior que o apoastro da órbita interna.

A equação (3.15) foi estabelecida como um critério simples de verificação de possíveis cenários físicos capazes de conduzir o problema ao caso (específico) de singularidade  $\Delta = 0$  (ou  $\simeq 0$ ). Esclarecemos que os parâmetros  $\gamma_{int}$  e  $\gamma_{ext}$  são quantidades cinemáticas, e os argumentos utilizados para chegar à relação (3.15) foram puramente geométricos. Na literatura, encontram-se textos que esclarecem, de maneira muito mais profunda, as condições dinâmicas de aproximação de órbitas, utilizando, entre outras ideias, o conceito das *esferas de influência de Hill* (Chebotarev, 1967).

Em (Ferraz-Mello, 1994), encontra-se um estudo mais elaborado e aprofundado acerca dos critérios de convergência para a expansão de Laplace e da questão da singularidade da parte principal  $\Delta^{-1}$  do potencial perturbador, problema que necessita tratar não somente o espaço vetorial real, mas também o domínio dos complexo  $\mathbb{C}$ .

### 3.1.2 Primeira expansão em séries de Taylor: órbitas quase coplanares

Consideremos, a princípio, o termo principal da parte direta do potencial perturbador,  $\Delta^{-1}$ :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \frac{m_0}{m_0+m_1}\mathbf{r}_1|}. \quad (3.16)$$

Neste primeiro passo, tratamos de expandir o potencial perturbador em torno de órbitas aproximadamente coplanares.

Nas considerações abaixo, assumimos que  $r_2 > r_1$ : significa dizer que o corpo de massa  $m_1$  encontra-se numa órbita interna, enquanto que  $m_2$  está em uma órbita externa.

Temos que

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{r}_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1 \right| &= \left[ \left( \mathbf{r}_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1 \right) \cdot \left( \mathbf{r}_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1 \right) \right]^{1/2} \\ &= \left[ \mathbf{r}_2^2 + \left( \frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^2 \mathbf{r}_1^2 - \frac{2m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Tomamos  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = r_1 r_2 \cos \psi$ , onde  $\psi$  é o ângulo entre os dois vetores, conforme mostrado na Fig. 3.2. Definimos uma quantidade

$$\Theta = \cos \psi - \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (3.17)$$

onde  $\theta_1 = f_1 + \varpi_1$  e  $\theta_2 = f_2 + \varpi_2$  são as longitudes verdadeiras das massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente;  $f_i$  e  $\varpi_i$ , ( $i = 1, 2$ ), designam a anomalia verdadeira e a longitude do pericentro. Reescrevemos

$$\frac{1}{\Delta} = \left\{ r_2^2 + \left( \frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^2 r_1^2 - \frac{2m_0}{m_0 + m_1} r_1 r_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) + \Theta] \right\}^{-1/2} \quad (3.18)$$

Para o prosseguimento desse desenvolvimento teórico, definimos as seguintes quantidades:  $\frac{m_1}{m_0 + m_1} = \varepsilon_1$ ,  $\frac{m_0}{m_0 + m_1} = \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1 r_1 = r_1'$  e  $\varepsilon_2 r_1 = \tilde{r}_1$ . Agora, expandimos a função  $\Delta^{-1}$  em uma série de Taylor em torno de  $\Theta = 0$  (isto equivale a expandir em torno de órbitas coplanares).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{\Delta_0^3} \tilde{r}_1 r_2 \Theta + \frac{3}{2!} \frac{1}{\Delta_0^5} (\tilde{r}_1 r_2 \Theta)^2 - \frac{15}{3!} \frac{1}{\Delta_0^7} (\tilde{r}_1 r_2 \Theta)^3 + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left( \frac{\tilde{r}_1 r_2 \Theta}{2} \right)^i \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde

$$\frac{1}{\Delta_0} = [\tilde{r}_1^2 + r_2 - 2\tilde{r}_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]^{-1/2} \quad (3.20)$$

### 3.1.2.1 Termos de inclinação

No desenvolvimento anterior, obtivemos uma expansão em Taylor em torno de  $\Theta = 0$ , admitindo que a inclinação entre os corpos é suficientemente baixa. Retornemos à (3.17):

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1 r_2}$$

Tomemos o vetor  $\mathbf{r}_1$ . Temos que  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , onde  $x_1, y_1$  e  $z_1$  são as coordenadas cartesianas do corpo  $m_1$  com relação a origem tomada em  $m_0$ . De maneira análoga,  $x_2, y_2$  e  $z_2$  são as coordenadas cartesianas de  $m_2$ , agora com respeito ao centro de massa do binário  $m_0 + m_1$ . Então

$$\cos \psi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}.$$

Em termos de elementos orbitais:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{r_1} &= \cos \Omega_1 \cos(\omega_1 + f_1) - \sin \Omega_1 \sin(\omega_1 + f_1) \cos I_1, \\ \frac{y_1}{r_1} &= \sin \Omega_1 \cos(\omega_1 + f_1) + \cos \Omega_1 \sin(\omega_1 + f_1) \cos I_1, \\ \frac{z_1}{r_1} &= \sin(\omega_1 + f_1) \sin I_1, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $\omega_1$  é o argumento do pericentro,  $\Omega_1$  é a longitude do nodo ascendente e  $I_1$  é a inclinação do plano orbital do corpo  $m_1$  relativo a um plano de referência (arbitrariamente) definido. Analogamente, obtém-se as mesmas expressões para  $x_2/r_2, y_2/r_2$  e  $z_2/r_2$ , com a devida modificação de identificação das grandezas, com respeito à órbita externa.

Se assumimos que as inclinações  $I_1, I_2$  das órbitas são consideravelmente pequenas, tomando  $\sin I_i \simeq 0, i = 1, 2$ , vem que

$$\begin{aligned} \cos \psi &= [\cos \Omega_1 \cos(f_1 + \omega_1) - \sin \Omega_1 \sin(f_1 + \omega_1)][\cos \Omega_2 \cos(f_2 + \omega_2) - \sin \Omega_2 \sin(f_2 + \omega_2)] \\ &+ [\sin \Omega_1 \cos(f_1 + \omega_1) + \cos \Omega_1 \sin(f_1 + \omega_1)][\sin \Omega_2 \cos(f_2 + \omega_2) + \cos \Omega_2 \sin(f_2 + \omega_2)] \\ &= \cos(f_1 + \varpi_1) \cos(f_2 + \varpi_2) + \sin(f_1 + \varpi_1) \sin(f_2 + \varpi_2) \end{aligned}$$

Usando as definições de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , segue o resultado abaixo:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 - \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(f_1 + \varpi_1) \cos(f_2 + \varpi_2) \\ &+ \sin(f_1 + \varpi_1) \sin(f_2 + \varpi_2). \end{aligned}$$

Ao constatarmos a igualdade entre as duas últimas expressões, percebemos como, ao decidirmos expandir a função perturbadora em potências de  $\Theta = \cos \psi - \cos(\theta_1 - \theta_2)$ , estamos de fato aproximando o problema do caso coplanar ( $I_1, I_2 \simeq 0$ ).

Se, por outro lado, ignoramos tal aproximação, e definimos as seguintes quantidades

$$s_j = \sin \frac{I_j}{2}, \quad (3.22)$$

$$c_j = \cos \frac{I_j}{2}, \quad (3.23)$$

após longo algebrismo, chegaremos à expressão definitiva para a quantidade  $\Theta$

$$\begin{aligned} \Theta = & 2s_1s_2c_1c_2 \cos(f_1 + \varpi_1 - f_2 - \varpi_2 - \Omega_1 + \Omega_2) + (c_1^2c_2^2 - 1) \cos(f_1 + \varpi_1 - f_2 - \varpi_2) \\ & + s_1^2s_2^2 \cos(f_1 + \varpi_1 - f_2 - \varpi_2 - 2\Omega_1 + 2\Omega_2) - 2s_1s_2c_1c_2 \cos(f_1 + \varpi_1 + f_2 + \varpi_2 - \Omega_1 - \Omega_2) \\ & + c_1^2s_2^2 \cos(f_1 + \varpi_1 + f_2 + \varpi_2 - 2\Omega_2) + c_2^2s_1^2 \cos(f_1 + \varpi_1 + f_2 - 2\Omega_1) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Expandir a função perturbadora em potências de  $\Theta$  significa expandir a mesma em potências das inclinações. Não é o foco deste trabalho prosseguir tal análise. A expressão (3.24) pode ser aproveitada para estudos em três dimensões.

### 3.1.3 Segunda expansão em séries de Taylor e expansão em séries de Fourier: órbitas quase circulares

Agora, expandimos  $\Delta_0^{-2i-1}$ , definido em (3.20), em torno dos valores  $a_1$  e  $a_2$  definidos para os semi-eixos maiores das órbitas. Nesse caso, equivale a formalmente expandir  $\Delta_0$  em torno de órbitas quase-circulares de raios  $a_1$  (ao redor da massa  $m_0$ ) e  $a_2$  (ao redor do baricentro de  $m_0$  e  $m_1$ ). Seja definida a quantidade

$$\Gamma = \left[ 1 + \varepsilon_2^2 \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 2\varepsilon_2 \frac{r_1}{r_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]^{1/2} = (1 + x^2 - 2x \cos(\theta_1 - \theta_2))^{1/2}, \quad (3.25)$$

tal que  $\Delta_0 = r_2\Gamma$ . Expandindo a função  $\Gamma^{-2i-1}$  em uma série de Taylor em torno da quantidade  $x_0 = \varepsilon_2\alpha = \tilde{\alpha}$ , onde  $\alpha = a_1/a_2$ ,

$$\frac{1}{\Gamma^{2i+1}} = \frac{1}{\Gamma_0^{2i+1}} + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Gamma^{2i+1}} \right) \Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\Gamma^{2i+1}} \right) \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

e aqui definimos  $\Gamma_0 = \Gamma \Big|_{x=x_0} = \sqrt{1 + \varepsilon_2^2\alpha^2 - 2\varepsilon_2\alpha \cos(\theta_1 - \theta_2)}$ .

Seja o operador diferencial

$$\tilde{D} = \frac{d}{dx_0} = \frac{d}{d\tilde{\alpha}} \quad (3.26)$$

e a diferença

$$x - x_0 = \varepsilon_2 \left( \frac{r_1}{r_2} - \frac{a_1}{a_2} \right) = \varepsilon_2 \frac{a_1}{a_2} \left( \frac{r_1}{a_1} \frac{a_2}{r_2} - 1 \right) = \varepsilon_2\alpha\delta$$

Temos então que:

$$\frac{1}{\Gamma^{2i+1}} = \left[ 1 + \varepsilon_2\alpha\delta\tilde{D} + \frac{1}{2!}(\varepsilon_2\alpha\delta)^2\tilde{D}^2 + \frac{1}{3!}(\varepsilon_2\alpha\delta)^3\tilde{D}^3 + \dots \right] \frac{1}{\Gamma_0^{2i+1}} \quad (3.27)$$

Vemos que a quantidade  $\Gamma_0$  é uma função periódica nas variáveis  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Assim, a mesma pode ser expandida em séries de senos e cossenos por meio do desenvolvimento de Fourier. Em geral, para um dado  $\gamma$ , tal que  $0 < \gamma < 1$ , tem-se que (Laskar, 2005)

$$(1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos S)^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_s^{(k)} \cos kS = \frac{1}{2} b_s^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_s^{(k)} \cos kS, \quad (3.28)$$

onde  $b_s^{(k)}$  são os *coeficientes de Laplace* (Brouwer e Clemence, 1961; Ferraz-Mello, 1983; Laskar e Robutel, 1995), dados pela expansão da função periódica em uma série de Fourier de cossenos:

$$b_s^{(0)}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos S)^{-s} dS, \quad (3.29)$$

$$b_s^{(k)}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos kS}{(1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos S)^s} \right) dS \quad (3.30)$$

Assim, ficamos com

$$\frac{1}{\Gamma_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} b_{(2i+1)/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{(2i+1)/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \cos(j(\theta_1 - \theta_2)), \quad (3.31)$$

e a expansão resultante completa é dada por

$$\frac{1}{\Gamma_0^{2i+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon_2 \alpha \delta)^n}{n!} \tilde{D}^n \left( \frac{1}{2} b_{(2i+1)/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{(2i+1)/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \cos(j(\theta_1 - \theta_2)) \right) \quad (3.32)$$

Aplicando a expansão binomial sobre a quantidade  $\delta$ , vem que

$$\delta^n = \left( \frac{r_1 a_2}{a_1 r_2} - 1 \right)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left( \frac{r_1}{a_1} \right)^{n-k} \left( \frac{a_2}{r_2} \right)^{n-k} \quad (3.33)$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

é o coeficiente binomial.

### 3.1.4 Coeficientes de Laplace

Os coeficientes de Laplace  $b_s^{(k)}(\alpha)$  são introduzidos naturalmente como os coeficientes da série de Laurent (Laskar e Robutel, 1995)

$$(1 - \alpha z)^{-s} (1 - \alpha z^{-1})^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_s^{(k)}(\alpha) z^k \quad (3.34)$$

Anteriormente, os mesmos foram definidos como os coeficientes resultantes de uma expansão em séries de Fourier de uma função geratriz específica (equações (3.29) e (3.30)). Além dessas expressões, os coeficientes de Laplace também podem ser relacionados à função hipergeométrica de Gauss (Laskar e Robutel, 1995; Süli et al., 2004):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_s^{(k)}(\alpha) &= \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!}\alpha^k \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{s(s+k)}{1(k+1)}\alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+k)(s+k+1)}{1 \times 2(k+1)(k+2)}\alpha^4 + \dots \right] = \\ &= \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!}\alpha^k F(s, s+k, k+1; \alpha^2), \end{aligned}$$

$F(a, b, c; z)$  designa a função hipergeométrica de argumento  $z$ . Para  $|z| < 1$ , ela é definida pela série de potências

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (3.35)$$

onde  $(q)_n$  é o *símbolo de Pochhammer*, dado por

$$(q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ q(q+1)\dots(q+n-1) & n > 0 \end{cases}$$

Em (Laskar, 2005), é possível encontrar expressões para os coeficientes generalizados de Laplace  $b_{s,r}^{(k)}(\alpha)$ , dados, em termos da função hipergeométrica, por

$$\frac{1}{2}b_{s,r}^{(k)}(\alpha) = \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!}\alpha^k F(r, s+k, k+1; \alpha^2) \text{ para } k \geq 0, \quad (3.36)$$

$$\text{e } b_{s,r}^{(k)}(\alpha) = b_{r,s}^{(-k)}(\alpha) \text{ para } k < 0. \quad (3.37)$$

Destacamos ainda uma importante propriedade desses coeficientes:  $b_s^{(k)}(-\alpha) = (-1)^k b_s^{(k)}(\alpha)$  (Laskar, 2005).

(Süli et al., 2004) mostra que é possível encontrar uma fórmula explícita para os coeficientes de Laplace e suas derivadas. Sejam  $A_j$  e  $B_i$  as seguintes quantidades:

$$A_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ \frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{j!}, & j > 0; \end{cases} \quad (3.38)$$

$$B_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (s+k)(s+j+k)}{i! \prod_{l=1}^i (j+l)}, & i > 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

Então, pode-se escrever:

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = A_j\alpha^j \sum_{i=0}^{\infty} B_i\alpha^{2i} \quad (3.40)$$

Derivando a equação anterior em relação a  $\alpha$ , obtém-se a expressão analítica para a  $n$ -ésima derivada dos coeficientes de Laplace:

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = A_j\alpha^{j-n} \sum_{i=0}^{\infty} C_i^{(j,n)} B_i\alpha^{2i}, \quad (3.41)$$

onde

$$C_i^{(j,l)} = \prod_{k=0}^{l-1} (2i + j - k) \quad (3.42)$$

Abaixo, algumas relações úteis entre os coeficientes de Laplace e suas derivadas (Laskar e Robutel, 1995; Murray e Dermott, 2000):

$$b_s^{(-j)} = b_s^j, \quad (3.43)$$

$$Db_s^{(j)} = s(b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)}), \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} D^n b_s^{(j)} &= s(D^{n-1}b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha D^{n-1}b_{s+1}^{(j)} \\ &+ D^{n-1}b_{s+1}^{(j+1)} - 2(n-1)D^{n-2}b_{s+1}^j), \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde  $n \geq 2$  na última expressão, e  $D = d/d\alpha$  é um operador diferencial.

### 3.1.5 Aproximação de órbitas coplanares

Até aqui, em nosso estudo, realizamos a primeira expansão de  $\Delta^{-1}$  em séries de Taylor na variável  $\Theta$ , considerando uma relação entre esta variável e as pequenas inclinações dos planos orbitais das massas  $m_1$  e  $m_2$ . Essa dependência em  $\Theta$  está explícita no termo da somatória de (3.19).

Partiremos para uma particularização no tratamento do problema, assumindo a configuração na qual os corpos encontram-se em órbitas coplanares:  $\Theta = 0$ , e portanto  $\psi = \theta_1 - \theta_2 = f_1 - f_2 + \Delta\varpi$ ,  $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$ .

Neste sentido, facilmente verifica-se que os termos para os quais  $i > 0$  anulam-se em (3.19), restando somente o termo  $i = 0$ . Aplicando (3.32), considerando agora as órbitas coplanares, a expansão do termo de distância mútua entre as massas  $m_1$  e  $m_2$  fica dada

por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r_2 \Gamma} = \frac{1}{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} (\varepsilon_2 \alpha)^n \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^{n-k} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^{k-n-1} \tilde{D}^n \left[ \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^{\infty} b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \cos j\psi \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Agora, reescrevemos

$$\cos j\psi = \frac{1}{2} [e^{ij\psi} + e^{-ij\psi}],$$

onde  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária.

Lançamos mão das expansão clássica de Fourier para o problema de dois corpos (Ferraz-Mello et al., 2006):

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\gamma e^{imf} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{\gamma,m} e^{ikM}. \quad (3.47)$$

As quantidades  $X_k^{\gamma,m}$  são os *coeficientes de Hansen*, funções da excentricidade do corpo orbitante. Na equação acima,  $M$  designa a anomalia média. A mudança  $f \rightarrow -f$  transforma  $M \rightarrow -M$ , de maneira tal que vale a relação  $X_{-k}^{\gamma,-m} = X_k^{\gamma,m}$ .

Facilmente é possível chegar às seguintes igualdades:

$$\left(\frac{r_1}{a_1}\right)^{n-k} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^{k-n-1} e^{ij(f_1-f_2+\Delta\varpi)} = \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} X_{q_1}^{n-k,j}(e_1) X_{q_2}^{k-n-1,-j}(e_2) \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} &\times e^{i(q_1 M_1 + q_2 M_2 + j\Delta\varpi)} \\ \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^{n-k} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^{k-n-1} e^{-ij(f_1-f_2+\Delta\varpi)} &= \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} X_{q_1}^{n-k,-j}(e_1) X_{q_2}^{k-n-1,j}(e_2) \quad (3.49) \\ &\times e^{i(q_1 M_1 + q_2 M_2 - j\Delta\varpi)} \end{aligned}$$

Considerando somente o somatório em  $j$  na expansão de (3.46), e tomando a parte real, tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \left[ \sum_{q_1} \sum_{q_2} X_{q_1}^{n-k,j}(e_1) X_{q_2}^{k-n-1,-j}(e_2) \cos(q_1 M_1 + q_2 M_2 + j\Delta\varpi) \right. \\ &+ \left. \sum_{q_3} \sum_{q_4} X_{q_3}^{n-k,-j}(e_1) X_{q_4}^{k-n-1,j}(e_2) \cos(q_3 M_3 + q_4 M_4 - j\Delta\varpi) \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Agora, a primeira parcela da parte direta do potencial perturbador é proporcional a  $r_2^{-1}$  (verifique (3.11)), a qual, em termos dos coeficientes de Hansen, pode ser escrita como:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{a_2} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^{-1} = \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} X_{q_2}^{-1,0}(e_2) e^{iq_2 M_2} = \frac{1}{a_2} \left[ 1 + \sum_{q_2=1}^{\infty} X_{q_2}^{-1,0}(e_2) \cos q_2 M_2 \right] \quad (3.51)$$

Finalmente, temos a expansão completa para a parte direta:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D = & \frac{\mathcal{G}m_2}{a_2} \left[ (m_0 + m_1) \left( 1 + \sum_{q'_2=1}^{\infty} X_{q'_2}^{-1,0}(e_2) \cos q'_2 M_2 \right) - m_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} \right. \\ & \times \frac{(\varepsilon_2 \alpha)^n}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{0,j} \right) \left( \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} X_{q_1}^{n-k,j}(e_1) X_{q_2}^{k-n-1,-j}(e_2) \cos(q_1 M_1 + q_2 M_2) \right. \\ & \left. \left. + j \Delta \varpi \right) + \sum_{q_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_4=-\infty}^{\infty} X_{q_3}^{n-k,-j}(e_1) X_{q_4}^{k-n-1,j}(e_2) \cos(q_3 M_1 + q_4 M_2 - j \Delta \varpi) \right] \tilde{D}b_{1/2}^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

### 3.1.6 Coeficientes de Hansen

Os coeficientes de Hansen (Cefola, 1977) são uma importante classe de funções, frequentemente utilizadas nos âmbitos da Mecânica Celeste. São definidos como os coeficientes de Fourier (Laskar, 2005)

$$\left( \frac{r}{a} \right)^n e^{imf} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{n,m}(e) e^{ikM}, \quad (3.53)$$

onde  $n, m$  e  $k$  são inteiros positivos ou negativos,  $r$  é o módulo do raio vetor,  $a$  é o semi-eixo maior,  $e$  é a excentricidade,  $f$  a anomalia verdadeira e  $M$  a anomalia média. Individualmente, tais coeficientes são dados pela integral (Hughes, 1981)

$$X_k^{n,m}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos(mf - kM) dM. \quad (3.54)$$

Particularmente, para  $k = 0$ ,  $X_k^{n,m}(e)$  reduz-se a expressões polinomiais em  $e$ ,  $1/e$ ,  $\sqrt{1-e^2}$  e  $1/\sqrt{1-e^2}$ . Alguns resultados importantes da literatura (Laskar e Boué, 2010), utilizados na implementação de nosso modelo, são apresentados a seguir.

$$X_0^{-1,0} = 1; \quad X_0^{-1,1} = \frac{\sqrt{1-e^2} - 1}{e} \quad (3.55)$$

e, para  $n \geq 2$ ,  $2 \leq m \leq n$

$$X_0^{-n,m} = \frac{1}{(1-e^2)^{n-3/2}} \sum_{l=0}^{[(n-2-m)/2]} \frac{(n-2)!}{l!(m+l)!(n-2-m-2l)!} \left( \frac{e}{2} \right)^{m+2l}, \quad (3.56)$$

$$X_0^{-n,m} = 0, \quad n \geq 2, \quad m \geq n-1. \quad (3.57)$$

Para  $n \geq 0$  e  $0 \leq m \leq n$ :

$$X_0^{n,m} = (-1)^m \frac{(n+1+m)!}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{[n+1-m]/2} \frac{(n+1-m)!}{l!(m+l)!(n+1-m-2l)!} \left( \frac{e}{2} \right)^{m+2l} \quad (3.58)$$

Nas expressões anteriores,  $[x]$  designa a parte inteira de  $x$ .

As fórmulas (3.55), (3.56), (3.57) e (3.58) são de grande importância neste trabalho: todas foram implementadas em nosso modelo, a fim de se computar os coeficientes  $X_0^{n,m}$  ( $n \geq 0$ ) e  $X_k^{-n,m}$  ( $n \geq 2$ ),  $0 \leq m \leq n$ .

Além das expressões apresentadas anteriormente, encontramos na literatura outras formas de computação dos coeficientes de Hansen. Apresentamos a seguir duas metodologias que foram estudadas durante nossas atividades.

(Breiter et al., 2004) apresentam as seguintes expressões recursivas:

$$X_0^{n,m} = \frac{e}{2m} [(n+1-m)X_0^{n,m+1} - (n+1+m)X_0^{n,m-1}], \quad (3.59)$$

$$X_0^{n,m} = \frac{2n+1}{n+1} X_0^{n-1,m} - \frac{n^2-j^2}{n(n+1)} \eta^2 X_0^{n-2,m}, \quad (3.60)$$

onde  $\eta = \sqrt{1-e^2}$ . Neste caso, não há restrições quanto aos valores do índice  $m$ . Toma-se como valores iniciais

$$X_0^{0,0} = 1, \quad X_0^{1,0} = 1 + \frac{1}{2}e^2, \quad X_0^{1,1} = -\frac{3}{2}e, \quad X_0^{2,0} = 1 + \frac{3}{2}e^2$$

Fora do arcabouço de funções analíticas, pode-se também recorrer ao métodos numéricos de integração. Para tanto, ao invés do cálculo direto da integral (3.54), é possível utilizar as funções de Cayley (Cayley, 1861; Ferraz-Mello, 2015), definidas como

$$E_{s,r}^{(n)}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos[sf + (r-s)M] dM. \quad (3.61)$$

Se fazemos  $r-s=k$ , reescreve-se (3.61) como  $E_{s,s-k}^{(n)}$ . Facilmente, vê-se que as funções de Cayley conectam-se com os coeficientes de Hansen através da relação  $E_{m,m-k}^{(n)} = X_k^{-n,m}$ .

A integral (3.61) é feita sobre a anomalia média. Dentro dessas soluções aparecem expansões em séries de Taylor da solução da equação de Kepler. Para evitar integrações que trabalhem resolvendo essa equação, o que é numericamente dispendioso, pode-se integrar sobre as anomalias verdadeiras, via a expressão clássica  $r^2 df = a^2 \sqrt{1-e^2} dM$  (da Silva Fernandes, 1996; Ferraz-Mello, 2013), e escreve-se

$$E_{s,s-k}^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^{n-2} \cos[sf - kM] df. \quad (3.62)$$

A razão  $a/r$  pode, então, ser expressada em termos da anomalia verdadeira, através da equação que define a elipse

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}. \quad (3.63)$$

Escrevendo a anomalia média em função da anomalia excêntrica  $u$ , fica-se com

$$M = u - e \sin u, \quad (3.64)$$

que nada mais é que a *equação de Kepler*. Por fim, a anomalia excêntrica pode ser escrita como função da anomalia verdadeira (Murray e Dermott, 2000) como

$$\tan\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{f}{2}\right). \quad (3.65)$$

A expressão final para os coeficientes de Hansen será uma função da excentricidade e da anomalia verdadeira

$$X_k^{-n,m}(e) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1-e^2)^{n-3/2}} \int_0^{2\pi} (1+e \cos f)^{n-2} \cos[mf - kM(u(f))] df. \quad (3.66)$$

A equação acima pode ser utilizada no desenvolvimentos dos métodos numéricos para integração (Press et al., 1993).

Outros trabalhos importantes, e que também foram estudados ao longo do desenvolvimento de nosso modelo, são encontrados em (Izsak et al., 1964; Giacaglia, 1987; Brannham, 1990; Laskar, 2005; Sadov, 2008). Neles, são apresentadas metodologias analíticas e relações recursivas.

Para a computação de  $X_k^{n,m}$ , quando  $k > 0$ , utilizamos o método de von Zeipel-Andoyer (VZA) (Izsak et al., 1964; Cherniack, 1972; Hughes, 1981; Murray e Dermott, 2000), o qual expressa os coeficientes de Hansen como funções dadas pela seguinte relação

$$X_k^{n,m} = e^{|m-k|} \sum_{\sigma=0}^{\infty} Y_{\sigma+\varphi, \sigma+\chi}^{n,m} e^{2\sigma}, \quad (3.67)$$

onde  $\varphi = \max(0, k - m)$  e  $\chi = \max(0, m - k)$ . As quantidades  $Y_{c,d}^{a,b}$  são denominados *operadores de Newcomb* (Chebotarev, 1967; Murray e Dermott, 2000).

### 3.1.6.1 Derivadas $dX_k^{n,m}/de$

Desenvolver as equações de movimento do sistema pressupõe resolver as equações (2.61). Para tanto, é necessário determinar as respectivas derivadas parciais do Hamiltoniano, em relação as variáveis independentes do problema.

Tendo isto em mente, apresentamos abaixo as expressões utilizadas para as derivadas dos coeficientes de Hansen.

As derivadas  $dX_0^{n,m}/de$  foram calculadas diretamente das expressões (3.55) e (3.56), obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{de} X_0^{-n,m} &= \left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{2e}{(1-e^2)^{n-1/2}} \sum_{l=0}^{[(n-2-m)/2]} f_{n,l,m} \left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l} + \\ &\frac{1}{2(1-e^2)^{n-3/2}} \sum_{l=1}^{[(n-2-m)/2]} f_{n,l,m}(m+2l) \left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l-1}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$n \geq 2$ , e

$$\frac{d}{de} X_0^{n,m} = (-1)^n \frac{(n+1+m)!}{2(n+1)!} \sum_{l=1}^{[(n+1-m)/2]} g_{n,l,m}(m+2l) \left(\frac{e}{2}\right)^{m+2l-1}, \quad (3.69)$$

onde  $f_{n,l,m}$  e  $g_{n,l,m}$  designam os coeficientes de fatoriais que aparecem nas respectivas expressões, e em ambas as equações,  $0 \leq m \leq n$ .

Analogamente, derivando diretamente de (3.67), obtem-se

$$\frac{d}{de} X_k^{n,m} = \begin{cases} \sum_{\sigma=1}^{\infty} (2\sigma + |k-m|) Y_{\sigma+\iota, \sigma+\nu}^{n,m} e^{2\sigma-1}, & \text{se } e=0 \text{ e } |k-m|=0; \\ e^{|k-m|} \sum_{\sigma=1}^{\infty} (2\sigma + |k-m|) Y_{\sigma+\iota, \sigma+\nu}^{n,m} e^{2\sigma} \\ \quad + |k-m| Y_{\iota, \nu}^{n,m} e^{|k-m|-1}, & \text{nos demais casos.} \end{cases} \quad (3.70)$$

Na fórmula acima,  $\iota = \max(0, k-m)$  e  $\nu = \max(0, m-k)$ .

### 3.1.7 Operadores de Newcomb

A dependência em excentricidades dos coeficientes de Hansen  $X_k^{n,m}$ ,  $k > 0$ , pode ser explicitada em uma série de potências, com o auxílio dos operadores de Newcomb  $Y_{c,d}^{a,b}$ , onde  $a, b, c$  e  $d$  são valores inteiros.

Estes últimos, por sua vez, podem ser calculados recursivamente (Hughes, 1981), utilizando as seguintes equações

$$Y_{0,0}^{a,b} = 1, \quad (3.71)$$

$$Y_{1,0}^{a,b} = b - \frac{a}{2}, \quad (3.72)$$

para  $d=0$ ,

$$4cY_{c,0}^{a,b} = 2(2b-a)Y_{c-1,0}^{a,b+1} + (b-a)Y_{c-2,0}^{a,b+2} \quad (3.73)$$

e, para  $d \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} 4dY_{c,d}^{a,b} &= -2(2b+a)Y_{c,d-1}^{a,b-1} - (b+a)Y_{c,d-2}^{a,b-2} - (c-5d+4+4b+a)Y_{c-1,d-1}^{a,b} \\ &+ 2(c-d+b) \sum_{j \geq 2} (-1)^j \binom{3/2}{j} Y_{c-j,d-j}^{a,b}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ao utilizar-se as duas últimas equações, nota-se que  $Y_{c,d}^{a,b} = 0$  sempre que  $c$  ou  $d$  é negativo. Além disso, se  $d > c$ , então vale a relação  $Y_{c,d}^{a,b} = Y_{d,c}^{a,-b}$ . Isto advém do fato de que  $X_k^{a,b} = X_{-k}^{a,-b}$ .

### 3.2 Desenvolvimento do termo indireto

Na equação (3.11), voltamos nossa atenção para a parte **(II)**, o termo indireto do potencial perturbador. Fundamentalmente, trata-se de expandir a função

$$\frac{1}{r_{02}} = \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + (\varepsilon_1 r_1)^2 + 2\varepsilon_1 r_1 r_2 \cos \psi}} = \frac{1}{r_2} \left[ 1 + \varepsilon_1^2 \left( \frac{r_1}{r_2} \right) + 2\varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2} \cos \psi \right]^{-1/2}. \quad (3.75)$$

Em suma, o que fazemos é aplicar a mesma metodologia utilizada na expansão da parte direta: expansão em séries de Taylor em torno de órbitas quase-circulares, seguida de expansão em séries de cossenos de Fourier, a qual nos conduzirá novamente aos coeficientes de Laplace.

Chamaremos  $\chi$  a quantidade  $\left[ 1 + \varepsilon_1^2 \left( \frac{r_1}{r_2} \right) + 2\varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2} \cos \psi \right]^{1/2}$ ,  $y = \varepsilon_1(r_1/r_2)$  e  $y_0 = \varepsilon_1 \alpha$ . A expansão fica:

$$\frac{1}{\chi} = \left[ 1 + \varepsilon_1 \alpha \delta D' + \frac{1}{2!} (\varepsilon_1 \alpha \delta)^2 D'^2 + \frac{1}{3!} (\varepsilon_1 \alpha \delta)^3 D'^3 + \dots \right] \frac{1}{\chi_0} \quad (3.76)$$

onde  $\delta$  é mesma quantidade que havia sido definida para a parte direta,  $\alpha' = \varepsilon_1 \alpha$ ,  $D' = d/d\alpha'$ , e  $\chi_0 = [1 + \alpha'^2 + 2\alpha' \cos \psi]^{1/2}$ .

Novamente, temos uma função periódica em  $\psi$ , e pode-se expandir em séries de Fourier. Fazemos a seguinte mudança de variável:  $\alpha'' = -\alpha'$ . Assim:

$$\chi_0 = \sqrt{1 + \alpha''^2 - 2\alpha'' \cos \psi}.$$

Agora, utilizando a propriedade dos coeficientes de Laplace (Laskar, 2005) que garante que  $b_s^{(k)}(-\alpha) = (-1)^k b_s^{(k)}(\alpha)$ , tem-se

$$\frac{1}{\chi_0} = \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\alpha'') + \sum_{j=1}^{\infty} b_{1/2}^{(j)}(\alpha'') \cos j\psi = \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\alpha') + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j b_{1/2}^{(j)}(\alpha') \cos j\psi \quad (3.77)$$

e assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} (\varepsilon_1 \alpha)^n \left( \frac{r_1}{a_1} \right)^{n-k} \left( \frac{r_2}{a_2} \right)^{k-n} D'^n \left[ \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\alpha') \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j b_{1/2}^{(j)}(\alpha') \cos j\psi \right]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Utilizando os resultados deduzidos para a parte direta, obtemos a expressão completa para a expansão da parte indireta

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_I = & -\frac{\mathcal{G}m_0m_2}{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j}}{n!} \binom{n}{k} \frac{(\varepsilon_1\alpha)^n}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{0,j}\right) \left( \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} X_{q_1}^{n-k,j}(e_1) \right. \\ & \times X_{q_2}^{k-n-1,-j}(e_2) \cos(q_1M_1 + q_2M_2 + j\Delta\varpi) + \sum_{q_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_4=-\infty}^{\infty} X_{q_3}^{n-k,-j}(e_1) X_{q_4}^{k-n-1,j}(e_2) \\ & \left. \times \cos(q_3M_1 + q_4M_2 - j\Delta\varpi) \right) D^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha'). \end{aligned} \quad (3.79)$$

### 3.3 Longitudes médias

É preferível, ao invés das anomalias médias  $M_i$ , trabalhar com as longitudes médias  $\lambda_i = M_i + \varpi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Dessa maneira, o potencial perturbador é dado em função de argumentos que contêm somente longitudes, o que significa que todos os ângulos são tomados em relação a mesma direção fixa. Assim:

$$\cos(q_1M_1 - q_2M_2 + j\Delta\varpi) = \cos(q_1\lambda_1 - q_2\lambda_2 - q_1\varpi_1 - q_2\varpi_2 + j\Delta\varpi),$$

$$\cos(q_1M_1 - q_2M_2 - j\Delta\varpi) = \cos(q_1\lambda_1 - q_2\lambda_2 - q_1\varpi_1 - q_2\varpi_2 - j\Delta\varpi).$$

Seja  $\phi$  o argumento do cosseno que aparece na função do potencial perturbador, e que possui a forma geral

$$\phi = g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + g_3\varpi_1 + g_4\varpi_2 + g_5\Omega_1 + g_6\Omega_2. \quad (3.80)$$

A condição sobre os coeficientes  $g_i$  implica que seja satisfeita a seguinte relação

$$\sum_{i=1}^6 g_i = 0. \quad (3.81)$$

A igualdade anterior é elementar no tratamento das expansões do potencial perturbador, se tratando de uma particularidade conhecida como propriedade de d'Alembert (ou *característica de d'Alembert*) (Murray e Dermott, 2000; Ferraz-Mello, 2007).



## Dinâmica da Ressonância

A fim de aplicarmos o formalismo hamiltoniano e os métodos da teoria canônica de perturbações no estudo de nosso problema, introduzimos os pares conjugados das variáveis de ângulo-ação, obtidos da solução da equação de Hamilton-Jacobi para o problema de 2 corpos (caso planar) (Ferraz-Mello, 2007; Beaugé et al., 2007)

$$\begin{aligned}
 M_1, \quad L_1 &= \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \sqrt{\mathcal{G}(m_0 + m_1) a_1} = \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}; \\
 M_2, \quad L_2 &= \frac{m_2(m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2} \sqrt{\mathcal{G}(m_0 + m_1 + m_2) a_2} = \beta_2 \sqrt{\mu_2 a_2}; \\
 \varpi_1, \quad G_1 &= L_1 \sqrt{1 - e_1^2}; \\
 \varpi_2, \quad G_2 &= L_2 \sqrt{1 - e_2^2}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

As expressões das ações são também chamadas variáveis modificadas de Delaunay. Pode-se mostrar que tal conjunto é obtido via transformação canônica das variáveis de Delaunay originais, tomadas para um sistema de referência que utiliza variáveis de Jacobi (Beaugé et al., 2007).

Como optamos por trabalhar utilizando somente variáveis angulares de longitude (ao invés das anomalias) aplicamos uma transformação canônica, de maneira tal a obter novas variáveis de ângulo-ação:

$$\lambda_i; \quad L_i = \beta_i \sqrt{\mu_i a_i}, \tag{4.2}$$

$$-\varpi_i; \quad L_i - G_i = L_i(1 - \sqrt{1 - e_i^2}), \tag{4.3}$$

$i = 1, 2$ .

Reescrevendo o termo kepleriano  $\mathcal{H}_{Kep}$  em termos dessas variáveis, teremos

$$\mathcal{H}_{Kep} = -\frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{2L_2^2} = -\sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2L_i^2} \tag{4.4}$$

De maneira análoga, pode-se reescrever a parte do potencial perturbador como uma função  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(L_i, G_i; \lambda_i, \varpi_i) = \mathcal{R}_D + \mathcal{R}_I$ . Assim, inicialmente, temos um problema de quatro graus de liberdade: os quatro ângulos  $\lambda_1, \lambda_2, \varpi_1$  e  $\varpi_2$ . O espaço de fases, dado pelas variáveis de ângulo e o respectivo momento conjugado, possui portanto oito dimensões.

Com o intuito de investigar as contribuições de longo período para a evolução dinâmica do sistema, i.e., o movimento nos regimes secular e ressonante, os termos de curto período (da ordem dos períodos orbitais) foram removidos de  $\mathcal{R}$ , tomando-se a média aritmética da perturbação sobre os ângulos rápidos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Na prática, essa média foi tomada via inspeção visual, através da eliminação das contribuições ao Hamiltoniano advindas de termos cujos argumentos dependessem das longitudes médias  $\lambda_i$ . Na literatura, tal metodologia é comumente conhecida como “tesoura”, uma vez que, de fato, “cortam-se” os termos de curto-período do Hamiltoniano.

Na teoria canônica de perturbações, verifica-se que o método de “tesoura” coincide com a chamada média em primeira ordem em massa da teoria de séries de Lie (Ferraz-Mello, 2007).

Tomemos a parte direta do potencial perturbador. Separando as contribuições de diferentes regimes, é possível escrever:

- $\mathcal{R}_D^{(sec)}$  - parte *secular*, em geral dada por termos que não possuem argumentos periódicos;
- $\mathcal{R}_D^{(lp)}$  - parte que contém argumentos de *longo período*. Consideramos aqui os termos que surgem após tomar-se a média sobre os ângulos rápidos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , excluindo as combinações críticas que caracterizam os casos ressonantes;
- $\mathcal{R}_D^{(cp)}$  - parte que contém termos de *curto período* em  $\mathcal{R}_D$ . Trata-se do conjunto de todos os termos periódicos dependentes de ao menos um dos ângulos rápidos  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , e que não constituem as combinações críticas. Como temos que  $\lambda_i = n_i t + \tau_{0,i}$ , onde  $n_i$  é o movimento médio e  $\tau_{0,i}$  uma constante inicial, vemos que esses ângulos variam muito rapidamente, com períodos que são da ordem dos períodos orbitais  $T_1 = 2\pi/n_1$  e  $T_2 = 2\pi/n_2$ , e por esse motivo, fala-se em ângulos rápidos ou ângulos de curto-período (curto, quando comparados aos períodos que caracterizam os demais modos de movimento típicos do sistema);

- $\mathcal{R}_D^{(k)}$  - parte *crítica*, na qual temos o conjunto de termos periódicos cujos argumentos apresentam as combinações críticas dos ângulos rápidos, e que determinam as ressonâncias.

As combinações críticas que podem aparecer nos argumentos da perturbação são dadas na forma  $(p + q)\lambda_2 - p\lambda_1$ , e são tais que dão origem aos *pequenos divisores*, quantidades definidas nominalmente pela relação  $(p + q)n_2 - pn_1 \simeq 0$ . Os termos da perturbação que podem gerar tais fatores são separados, constituindo, portanto, o que denominamos de parte crítica.

A média tomada sobre os ângulos de curto período fornece

$$\mathcal{R}_D^{(sec)} + \mathcal{R}_D^{(lp)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_D d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (4.5)$$

Por simples inspeção visual, eliminamos as contribuições advindas dos termos de curto período, e separamos os termos críticos e termos seculares e de longo-período. Os termos nos quais o argumento depende somente de  $\Delta\varpi$ , ou que apresentem a combinação crítica mencionada, saem como constantes em 4.5.

#### 4.1 Termos seculares

Incluimos nessa parte os termos que advêm das contribuições de longo período, juntamente com os termos que são tomados como constantes dentro do processo de integração (4.5). Na parte secular, os argumentos do potencial perturbador não dependem das longitudes médias. Ao calcular (4.5), facilmente verifica-se que os termos periódicos de (3.52) anulam-se na integração, com exceção àqueles caracterizados por longos períodos. São os termos para os quais  $q_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) na equação (3.52). Assim sendo,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D^{(sec)} = & \frac{\mathcal{G}m_2}{a_2} \left[ (m_0 + m_1) - m_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} (\varepsilon_2 \alpha)^n \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{0,j} \right) X_0^{n-k,j}(e_1) \right. \\ & \left. \times X_0^{k-n-1,j}(e_2) \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \cos j \Delta\varpi \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Analogamente, a parte indireta secular fica

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_I^{(sec)} = & -\frac{\mathcal{G}m_0 m_2}{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j}}{n!} \binom{n}{k} (\varepsilon_1 \alpha)^n \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{0,j} \right) X_0^{n-k,j}(e_1) \\ & \times X_0^{k-n-1,j}(e_2) D^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha') \cos j \Delta\varpi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nas equações acima, vemos que a parte secular é reduzida a um problema unidimensional, tendo por grau de liberdade a variável  $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$ . Em geral,  $j = 0$  define o que chamamos, na seção anterior, de parte secular; para  $j > 0$ , tem-se a parte com argumentos de longo período.

## 4.2 Termos ressonantes

No estudo das contribuições de longo período do movimento do sistema, tomamos a média do Hamiltoniano sobre as duas longitudes médias  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Esse procedimento não é válido quando os corpos se movimentam com órbitas de períodos comensuráveis (ou muito próximas de uma dada comensurabilidade). Neste caso,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  não são mais independentes, valendo a relação

$$\frac{T_2}{T_1} \simeq \frac{p+q}{p}, \quad (4.8)$$

onde  $p$  e  $q$  são valores inteiros positivos. Sabemos que a média sobre as longitudes irá eliminar todos os termos cujo argumento depende de ao menos uma das longitudes, inclusive aqueles dentro do que denominamos *combinação crítica*:  $(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1$ . A comensurabilidade dos períodos orbitais é denominada ressonância de movimentos médios (*MMR - Mean Motion Resonance*) (Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001; Michtchenko et al., 2008a; Alves et al., 2016; Callegari et al., 2004). A integração das equações de movimento dos termos ressonantes (críticos) do Hamiltoniano introduzem nas soluções do problema os chamados pequenos divisores (Ferraz-Mello, 2007), da forma  $pn_1 - (p+q)n_2 \simeq 0$ , os quais são responsáveis por causar a divergência das soluções.

A ressonância é nominalmente caracterizada pelos valores inteiros  $p$  e  $q$ . Mais especificamente,  $q$  denota a ordem da ressonância. No desenvolvimento a seguir, apresentamos as expressões buscando a generalização do fenômeno, ou seja, deixamos a ordem livre, com os resultados dados em termos de  $p$  e  $q$ .

No fenômeno de ressonância, espera-se encontrar argumentos do potencial perturbador da forma genérica  $\Phi = (p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 - g\varpi_1 - h\varpi_2$ , de tal forma que, satisfazendo a propriedade de d'Alembert,

$$p+q-p-g-h=0 \Rightarrow g+h=q.$$

Analisando as expressões gerais do potencial perturbador, (3.52) e (3.79), percebe-se que os termos ressonantes aparecem para as combinações críticas  $q_1 = \pm p$  e  $q_2 = \mp(p+$

$q$ ). Ao abrirmos as somatórias em  $q_i$ , considerando somente as combinações ressonantes, teremos:

$$\begin{aligned} & X_{-p}^{n-k,j}(e_1)X_{p+q}^{k-n-1,-j}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 + j\Delta\varpi] + X_p^{n-k,j}(e_1) \\ & \times X_{-p-q}^{k-n-1,-j}(e_2) \cos[p\lambda_1 - (p+q)\lambda_2 - p\varpi_1 + (p+q)\varpi_2 + j\Delta\varpi] + X_{-p}^{n-k,-j}(e_1)X_{p+q}^{k-n-1,j}(e_2) \\ & \times \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 - j\Delta\varpi] + X_p^{n-k,-j}(e_1)X_{-p-q}^{k-n-1,j}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 \\ & - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 + j\Delta\varpi] \end{aligned}$$

Usamos da propriedade de simetria dos coeficientes de Hansen, segundo a qual  $X_k^{n,m} = X_{-k}^{n,-m}$ , juntamente com a paridade da função cosseno. É possível chegar a seguinte expressão, mais contraída, para as combinações ressonantes:

$$\begin{aligned} & 2(X_{-p}^{n-k,j}(e_1)X_{-p-q}^{k-n-1,j}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 + j\Delta\varpi] \quad (4.9) \\ & + X_p^{n-k,j}(e_1)X_{p+q}^{k-n-1,j}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 - j\Delta\varpi]). \end{aligned}$$

Finalmente, as partes ressonantes direta e indireta do potencial perturbador são apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D^{(res)} = & -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} (\varepsilon_2\alpha)^n \left[ X_p^{n-k,0}(e_1)X_{p+q}^{k-n-1,0}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 \right. \\ & + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2] \tilde{D}^n b_{1/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( X_{-p}^{n-k,j}(e_1)X_{-p-q}^{k-n-1,j}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 \right. \\ & + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 + j\Delta\varpi] + X_p^{n-k,j}(e_1)X_{p+q}^{k-n-1,j}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 \\ & \left. + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 - j\Delta\varpi] \right) \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \Big]; \quad (4.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_I^{(res)} = & -\frac{\mathcal{G}m_0m_2}{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} (\varepsilon_1\alpha)^n \left[ X_p^{n-k,0}(e_1)X_{p+q}^{k-n-1,0}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 \right. \\ & + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2] D'^n b_{1/2}^{(0)}(\alpha') + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left( X_{-p}^{n-k,j}(e_1)X_{-p-q}^{k-n-1,j}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 \right. \\ & + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 + j\Delta\varpi] + X_p^{n-k,j}(e_1)X_{p+q}^{k-n-1,j}(e_2) \cos[(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 \\ & \left. + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 - j\Delta\varpi] \right) D'^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha') \Big]. \quad (4.11) \end{aligned}$$

#### 4.2.1 Harmônicos ressonantes

É fácil enxergar que a combinação crítica geradora da ressonância, e que dá origem aos pequenos divisores, ainda existe dentro do conjunto de seus múltiplos inteiros. Isto

é: se  $pn_1 - (p + q)n_2 \simeq 0$  então  $N[pn_1 - (p + q)n_2] \simeq 0$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$ ; e tais múltiplos dos pequenos divisores são gerados pelos múltiplos da combinação crítica,  $N[(p + q)\lambda_2 - p\lambda_1]$ . Denominaremos harmônicos ressonantes de ordem  $N$  tais estruturas do argumento perturbador. Neste trabalho, mostraremos a necessidade de levá-los em consideração ao se computar o Hamiltoniano.

Uma vez que a regra de d'Alembert deve continuar sendo satisfeita, o argumento completo da parte ressonante é reescrito como:

$$\varphi = N[(p + q)\lambda_2 - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p + q)\varpi_2] \pm j\Delta\varpi. \quad (4.12)$$

O fator  $N$  é adicionado à expressão ressonante do potencial perturbador como um somatório que age sobre os argumentos dos cossenos e sobre os índices inferiores dos coeficientes de Hansen (indicando, de fato, a influência dos harmônicos sobre as potências das excentricidades). Assim, por exemplo, a parte direta é reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D^{(res)} = & -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} (\varepsilon_2\alpha)^n \left[ X_{Np}^{n-k,0}(e_1) X_{N(p+q)}^{k-n-1,0}(e_2) \right. \\ & \times \cos(N[(p + q)\lambda_2 - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p + q)\varpi_2]) \tilde{D}^n b_{1/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( X_{-Np}^{n-k,j}(e_1) X_{-N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \right. \\ & \times \cos(N[(p + q)\lambda_2 - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p + q)\varpi_2] + j\Delta\varpi) + X_{Np}^{n-k,j}(e_1) X_{N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \\ & \left. \left. \times \cos(N[(p + q)\lambda_2 - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p + q)\varpi_2] - j\Delta\varpi) \right) \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

e analogamente obtém-se a parte indireta contendo os termos harmônicos.

### 4.3 Estudo teórico da dinâmica

Para a caracterização qualitativa da dinâmica do problema, definimos o seguinte conjunto de variáveis canônicas

$$\begin{aligned} \lambda_1, & \quad J_1 = L_1 + r(K_1 + K_2); \\ \lambda_2, & \quad J_2 = L_2 - (1 + r)(K_1 + K_2); \\ (1 + r)\lambda_2 - r\lambda_1 - \varpi_1 = \sigma_1, & \quad K_1 = L_1 - G_1; \\ (1 + r)\lambda_2 - r\lambda_1 - \varpi_2 = \sigma_2, & \quad K_2 = L_2 - G_2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde  $r = p/q$ ;  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são comumente conhecidos como *ângulos ressonantes* ou *ângulos críticos*. Introduzindo tais ângulos, os argumentos genéricos do potencial perturbador

ressonante  $(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 + p\varpi_1 - (p+q)\varpi_2 \pm j\Delta\varpi$  são reescritos como  $(p+q)\sigma_1 + ((p+q) \pm j)\Delta\varpi$ .

Redefinindo os argumentos ressonantes, em termos das novas quantidades, fica-se com

$$\varphi_0 = q\sigma_1 + (p+q)\Delta\varpi, \quad (4.15)$$

$$\varphi_1^{(j)} = Nq\sigma_1 + [N(p+q) + j]\Delta\varpi, \quad (4.16)$$

$$\varphi_2^{(j)} = Nq\sigma_1 + [N(p+q) - j]\Delta\varpi, \quad (4.17)$$

e reescrevemos a parte ressonante como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(res)} = & -\frac{\mathcal{G}m_2}{a_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} \alpha^n \left[ \mathcal{I}_{n,k,N}(\alpha, e_1, e_2; \varepsilon_1, \varepsilon_2) \cos N\varphi_0 \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \mathcal{J}_{n,k,N,j}^{(1)}(\alpha, e_1, e_2; \varepsilon_1, \varepsilon_2) \cos \varphi_1^{(j)} + \mathcal{J}_{n,k,N,j}^{(2)}(\alpha, e_1, e_2; \varepsilon_1, \varepsilon_2) \cos \varphi_2^{(j)} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde  $\mathcal{I}_{n,k,N}$ ,  $\mathcal{J}_{n,k,N,j}^{(1)}$  e  $\mathcal{J}_{n,k,N,j}^{(2)}$  são funções dos elementos orbitais, através dos operadores  $\tilde{D}$  e  $D'$  e dos coeficientes de Hansen, e são dadas em termos dos índices  $n$ ,  $k$ ,  $N$  e  $j$ , e dos parâmetros  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , através das seguintes equações:

$$\mathcal{I}_{n,k,N} = X_{Np}^{n-k,0}(e_1) X_{N(p+q)}^{k-n-1,0}(e_2) \left[ m_1 \varepsilon_2^n \tilde{D}^n b_{1/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) + m_0 \varepsilon_1^n D'^n b_{1/2}^{(0)}(\alpha') \right] \quad (4.19)$$

$$\mathcal{J}_{n,k,N,j}^{(1)} = X_{-Np}^{n-k,j}(e_1) X_{-N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \left[ m_1 \varepsilon_2^n \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) + (-1)^j m_0 \varepsilon_1^n D'^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha') \right] \quad (4.20)$$

$$\mathcal{J}_{n,k,N,j}^{(2)} = X_{Np}^{n-k,j}(e_1) X_{N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \left[ m_1 \varepsilon_2^n \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) + (-1)^j m_0 \varepsilon_1^n D'^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha') \right] \quad (4.21)$$

Notamos que o Hamiltoniano, escrito em termos das variáveis de ressonância, não dependerá explicitamente dos ângulos de curto período  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Conseqüentemente, as ações conjugadas a esses ângulos são integrais de movimento do sistema:

$$\begin{aligned} J_1 &= L_1 + r(K_1 + K_2) = \text{const}, \\ J_2 &= L_2 - (1-r)(K_1 + K_2) = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A combinação linear dessas duas integrais resulta ainda em uma constante

$$(1+r)L_1 + rL_2 = (1+r)J_1 + rJ_2 = \mathcal{K} = \text{const}. \quad (4.23)$$

denominada *parâmetro de espaçamento* (Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001; Michtchenko et al., 2008a; Alves et al., 2016).  $\mathcal{K}$  é uma integral de movimento do sistema ressonante:

implica no fato de os semi-eixos maiores  $a_1$  e  $a_2$  oscilarem em anti-fase, e com amplitudes que são inversamente proporcionais às massas dos corpos orbitantes.

Além disso, temos também que

$$J_1 + J_2 = G_1 + G_2 = AM = \text{const}, \quad (4.24)$$

que é o momento angular total do sistema, também uma integral de movimento.

Quando eliminamos os ângulos de curto período, e escrevemos o potencial perturbador em termos dos ângulos críticos, percebemos que, de um problema inicial de quatro graus de liberdade ( $\lambda_1, \lambda_2, \varpi_1$  e  $\varpi_2$ ), reduziu-se o sistema a somente dois graus, com os outros dois graus vinculados através das integrais  $\mathcal{K}$  e  $AM$ . Isso implica que a estrutura do espaço de fases é definida, então, por dois ângulos conjugados a duas ações (espaço quadridimensional).

#### 4.3.1 Evolução temporal dos elementos

A invariância de  $\mathcal{K}$  e de  $AM$  tem importantes consequências sobre a evolução orbital do sistema. Já mencionamos que, após processar-se a média, no conjunto de variáveis  $(L_1, L_2, G_1, G_2)$  (ou de elementos  $(a_1, a_2, e_1, e_2)$ ), somente duas são independentes, e o problema ressonante planar possui assim dois graus de liberdade, com dois modos de movimento característicos. Um deles é definido como *modo secular*, e está associado ao ângulo secular  $\Delta\varpi$  (Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001).

O outro vem a ser o *modo ressonante*, caracterizado pela libração do ângulo ressonante. Pela definição,  $\Delta\varpi = \sigma_2 - \sigma_1$ , o que significa que somente um dos ângulos críticos é independente (o outro é, logicamente, definido pelo vínculo). Podemos nos referir, especificamente, a um *ângulo ressonante verdadeiro* do sistema (Alves et al., 2016). A questão a ser respondida, então, é qual dos ângulos críticos desempenha esse papel. Trataremos mais sobre esse assunto na próxima sessão.

Por ora, atentamos para a evolução dinâmica do sistema. Assumiremos, na formulação a seguir,  $(\sigma_1, \Delta\varpi)$  como o conjunto de variáveis angulares independentes.

Em termos das ações clássicas de Delaunay,  $(L_1, G_1)$  formam o conjunto independente (em termos de elementos,  $(a_1, e_1)$ ). Os vínculos que fornecem a relação entre os elementos

orbitais dependentes vêm pelas equações (4.23) e (4.24).

$$a_2 = \frac{[\mathcal{K} - (1+r)L_1]^2}{\mu_2 r^2 \beta_2^2}, \quad (4.25)$$

$$e_2 = \sqrt{1 - \frac{(AM - G_1)^2}{L_2^2}}. \quad (4.26)$$

Utilizando a condição de canonicidade, derivamos as respectivas ações conjugadas às variáveis angulares, obtendo (em termos somente de  $L_1$  e  $G_1$ ) as novas ações  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ :

$$\sigma_1, \quad \Lambda_1 = K_1 + K_2 = \frac{\mathcal{K} - L_1}{r} - AM; \quad (4.27)$$

$$\Delta\varpi, \quad \Lambda_2 = K_2 = G_1 + \frac{\mathcal{K} - (1+r)L_1}{r} - AM. \quad (4.28)$$

As equações de Hamilton fornecem a evolução temporal das variáveis canônicas:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \Lambda_1} \langle \mathcal{H} \rangle, & \frac{d\Lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial \sigma_1} \langle \mathcal{H} \rangle; \\ \frac{d\Delta\varpi}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \Lambda_2} \langle \mathcal{H} \rangle, & \frac{d\Lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial \Delta\varpi} \langle \mathcal{H} \rangle. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Aplicamos, nos próximos desenvolvimentos, a seguinte propriedade: seja tomada uma função  $f(y_1, y_2)$  derivável qualquer, tal que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , e seja uma transformação arbitrária definida por

$$x_1 = x_1(y_1, y_2), \quad (4.30)$$

$$x_2 = x_2(y_1, y_2), \quad (4.31)$$

tal que possamos escrever  $f(x_1, x_2) = f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2))$ . Tome-se a função inversa  $g$  dessa transformação,  $g(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^{-1} = g(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))$ , e agora, pode-se escrever  $f(x_1, x_2) = f \circ g = f(g(y_1, y_2))$ . Derivando a função  $f$  em relação a  $x_1$ , obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}.$$

Analogamente ocorre para as derivadas em relação a  $x_2$ . Seja definido, então, um operador da derivação inversa,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Temos, em nosso problema,  $\Lambda_1 = \Lambda_1(L_1, G_1)$  e  $\Lambda_2 = \Lambda_2(L_1, G_1)$ . Escrevendo as expressões inversas:

$$L_1 = L_1(\Lambda_1, \Lambda_2) = \mathcal{K} - r(\Lambda_1 + AM), \quad (4.32)$$

$$G_1 = G_1(\Lambda_1, \Lambda_2) = \mathcal{K} - r(\Lambda_1 + AM) - \Lambda_1 + \Lambda_2. \quad (4.33)$$

Aplicando a equação obtida para a derivada da função inversa, teremos que

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda_1} = -r \frac{\partial}{\partial L_1} - (r+1) \frac{\partial}{\partial G_1}, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda_2} = \frac{\partial}{\partial G_1}. \quad (4.35)$$

Agora, se utilizamos as definições das ações de Dalaunay, é possível repetir os passos anteriores para obter as funções inversas que nos fornecem os elementos independentes  $a_1 = a_1(L_1, G_1)$  e  $e_1 = e_1(L_1, G_1)$ . As relações entre os operadores de derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial L_1} = \frac{2L_1}{\mu_1 \beta_1^2} \frac{\partial}{\partial a_1} + \frac{G_1^2}{L_1^3} \left[ 1 - \left( \frac{G_1}{L_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial}{\partial e_1}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial G_1} = -\frac{G_1}{L_1^2} \left[ 1 - \left( \frac{G_1}{L_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial}{\partial e_1}. \quad (4.37)$$

Computar as derivadas do Hamiltoniano médio torna-se uma tarefa mais direta se operamos as derivadas em termos dos elementos orbitais, uma vez que  $\langle \mathcal{H} \rangle$  é naturalmente escrito como função desses elementos. As expressões acima são aplicadas na determinação da evolução das variáveis angulares.

Voltando para as equações de Hamilton, podemos reescrever a evolução temporal das ações canônicas:

$$\frac{d\Lambda_1}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{dL_1}{dt} = -\frac{\mu_1 \beta_1}{2r} \sqrt{\frac{\mu_1}{a_1}} \frac{da_1}{dt}, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda_2}{dt} &= \frac{dG_1}{dt} - \frac{(1+r)}{r} \frac{dL_1}{dt} = \\ &= -\frac{e_1 L_1}{\sqrt{1-e_1^2}} \frac{de_1}{dt} + \frac{\beta_1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1}{a_1}} \left[ \sqrt{1-e_1^2} - \frac{(1+r)}{r} \right] \frac{da_1}{dt}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

e invertendo as relações obtemos as expressões para a evolução temporal dos elementos orbitais:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{2r}{\beta_1} \sqrt{\frac{a_1}{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \langle \mathcal{H} \rangle, \quad (4.40)$$

$$\frac{de_1}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e_1^2}}{e_1 \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1}} \left[ -\frac{\partial}{\partial \Delta \varpi} \langle \mathcal{H} \rangle - (r \sqrt{1-e_1^2} + 1 + r) \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \langle \mathcal{H} \rangle \right]. \quad (4.41)$$

O mesmo tratamento que aplicamos anteriormente é adotado se optamos por tomar  $(\sigma_2, \Delta \varpi)$  como as variáveis angulares independentes, nesse caso levando em consideração as devidas alterações nas relações (4.25) e (4.26), e as implicações em se tomar  $a_2$  e  $e_2$  como os novos elementos independentes.

#### 4.4 Determinação do regime de ressonância: o ângulo ressonante ‘verdadeiro’

Abordamos o conceito de ângulo ressonante verdadeiro, conforme exposto em (Alves et al., 2016). Mencionamos que, para o problema ressonante planar, os dois graus de liberdade possuem dois modos próprios de movimento, um secular e outro ressonante, sendo este último caracterizado pela libração do ângulo respectivo, i.e., o ângulo crítico característico desse modo. Da relação de vínculo entre as variáveis angulares,  $\sigma_2 - \sigma_1 = \Delta\varpi$ , tem-se que, enquanto o ângulo ressonante descreve um movimento de libração, o outro ângulo crítico irá apresentar um regime de circulação/oscilação, juntamente com o ângulo secular. Dependendo das condições dinâmicas que caracterizam o sistema, a libração pode ocorrer para o ângulo interno ( $\sigma_1$ ) ou para o ângulo externo ( $\sigma_2$ ), e convencionou-se denominar os regimes de *ressonância interior*, para o primeiro caso, e *ressonância exterior* para o segundo (Michtchenko et al., 2008b).

Com isso em mente, apresentamos nesta seção uma metodologia elaborada para uma determinação “prévia” do regime de ressonância de um sistema. Não fizemos uso, propriamente, do modelo de Hamiltoniano médio desenvolvido neste trabalho. Mas utilizamos o mesmo conceito das expansões em séries de potências, e aplicamos as quantidades matemáticas apresentadas no capítulo anterior (a saber, os coeficientes de Hansen e de Laplace).

Explicamos a ideia principal, invocando o caso-limite da dinâmica de ressonância para o problema de três corpos restrito. No caso de um asteroide cuja órbita evolui dentro de um cenário de ressonância com Júpiter, o ângulo que libra é o ângulo crítico interno ( $\sigma_1$ ). No entanto, para o caso de objetos localizados no cinturão de Kuiper (transnetunianos), e que se encontram em ressonância com Netuno, o ângulo ressonante é o externo ( $\sigma_2$ ). Quando muda-se o panorama do sistema, trabalhando com interações entre planetas de massas consideráveis, a dinâmica apresenta consequências mais complexas (Michtchenko et al., 2008a,b): para um corpo externo mais massivo, a situação é similar à ressonância asteroidal, e o ângulo interno  $\sigma_1$  libra. Contudo, quando o corpo interno é o mais massivo, ambas as configurações ressonantes são possíveis.

Levando em conta tais informações, concebemos o seguinte raciocínio: determinar o ângulo ressonante pressupõe determinar qual das massas orbitantes sofre maior influência

em decorrência das perturbações.

Então, tomamos as equações de movimento newtonianas, para o problema de três corpos descrito em coordenadas de Jacobi. Tais equações estão expostas no Apêndice A. Vamos utilizar os resultados ali derivados, mas considerando a notação adotada até aqui.

As equações de movimento para as massas  $m_1$  e  $m_2$  são, respectivamente,:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + \mu_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = F_1, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 + \tilde{\mu}_2 \left[ \frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta^3} \right] \mathbf{r}_2 = F_2, \quad (4.42)$$

onde definem-se as quantidades  $\tilde{\mu}_2 = \mathcal{G}(m_0 + m_1 + m_2)/(m_0 + m_1)$ ,  $\Delta_{02} = |\mathbf{r}_2 + \varepsilon_1 \mathbf{r}_1|$ ;  $F_1$  e  $F_2$  são os termos de aceleração gerados pela perturbação:

$$F_1 = -\frac{\mathcal{G}m_2}{m_0 + m_1} \left[ \frac{m_0}{\Delta^3} + \frac{m_1}{\Delta_{02}^3} \right] \mathbf{r}_1 + \mathcal{G}m_2 \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta_{02}^3} \right] \mathbf{r}_2, \quad (4.43)$$

$$F_2 = -\tilde{\mu}_2 \beta_1 \left[ \frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right] \mathbf{r}_1. \quad (4.44)$$

Podemos separar as parcelas advindas das interações diretas e indiretas, e tem-se  $F_1 = F_{1,d} + F_{1,i}$  e  $F_2 = F_{2,d} + F_{2,i}$ , onde

$$F_{1,d} = \frac{\mathcal{G}m_2}{\Delta^3} (\mathbf{r}_2 - \varepsilon_2 \mathbf{r}_1), \quad F_{2,d} = \tilde{\mu}_2 \beta_1 \frac{\mathbf{r}_1}{\Delta^3}; \quad (4.45)$$

$$F_{1,i} = -\frac{\mathcal{G}m_2}{\Delta_{02}^3} (\mathbf{r}_2 + \varepsilon_1 \mathbf{r}_1), \quad F_{2,i} = -\tilde{\mu}_2 \beta_1 \frac{\mathbf{r}_1}{\Delta_{02}^3}, \quad (4.46)$$

e os subíndices  $d$  e  $i$  significam *direta* e *indireta*, respectivamente.

Nesse estudo mais simples, queremos comparar a intensidade das acelerações a que são submetidas as massas  $m_1$  e  $m_2$ . Tomando o módulo de  $F_1$ , por exemplo, vem que:

$$\begin{aligned} |F_1| &= \mathcal{G}m_2 \left| \frac{1}{\Delta^3} (\mathbf{r}_2 - \varepsilon_2 \mathbf{r}_1) - \frac{1}{\Delta_{02}^3} (\mathbf{r}_2 + \varepsilon_1 \mathbf{r}_1) \right| = \\ &= \mathcal{G}m_2 \left[ \frac{1}{\Delta^4} + \frac{1}{\Delta_{02}^4} - 2 \frac{1}{\Delta^3} \frac{1}{\Delta_{02}^3} (\mathbf{r}_2 - \varepsilon_2 \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 + \varepsilon_1 \mathbf{r}_1) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

Usamos os métodos explicados nas seções anteriores para expandir as expressões (4.43) e (4.44). Adotamos como primeira aproximação expandir somente a parte direta das equações. Assim o fizemos pois esta parte do trabalho é apresentada apenas como um estudo preliminar, com a intenção de averiguar uma (possibilidade de) aplicabilidade do modelo. Um estudo mais detalhado, no entanto, é essencial para atestar os resultados derivados daqui.

Tomando o módulo das quantidades referidas, obtemos

$$|F_{1,d}| = \frac{\mathcal{G}m_2}{\Delta^2}, \quad |F_{2,d}| = \frac{\tilde{\mu}_2 \beta_1}{\Delta^3} r_1 \quad (4.48)$$

Então, vemos que a tarefa consiste em expandir  $1/\Delta^2$  e  $r_1/\Delta^3$ . Utilizando resultados apresentados no capítulo anterior, sabemos que

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r_2} \frac{1}{\Gamma^{2i+1}} = \frac{1}{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon_2 \alpha \delta)^n}{n!} \tilde{D}^n \left[ \frac{1}{2} b_{(2i+1)/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{(2i+1)/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \cos \psi \right], \quad (4.49)$$

onde  $\psi$  vem a ser o ângulo entre os vetores posição  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , e  $i$  assume somente valores inteiros. Relembramos que  $\Gamma$  é a função definida por (3.25). Aqui, adotamos a segunda aproximação: sem o advento da demonstração, utilizamos a relação de desigualdade:

$$\left\langle \frac{1}{\Delta^2} \right\rangle \leq \left( \left\langle \frac{1}{\Delta} \right\rangle \right)^2, \quad (4.50)$$

i.e., a média do quadrado é menor ou no máximo igual ao quadrado da média. Isso foi feito pois não há como aplicar a expansão em coeficientes de Laplace, com as fórmulas apresentadas, no caso de  $\Delta^{-2}$  (o expoente 2 implicaria em  $i = 1/2$ , o que não é possível, pois já afirmamos que  $i$  assume somente valores inteiros).

Então, repetindo resultados anteriores, ficamos com

$$\frac{1}{\Delta^2} = \frac{1}{a_2^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} \tilde{\alpha}^n \left( \frac{r_1}{a_1} \right)^{n-k} \left( \frac{r_2}{a_2} \right)^{k-n-1} \tilde{D}^n \left[ \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \cos \psi \right] \right\}^2. \quad (4.51)$$

A expansão para  $F_{2,d}$  vem de forma mais direta:

$$\frac{r_1}{\Delta^3} = \frac{a_1}{a_2^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} \tilde{\alpha}^n \left( \frac{r_1}{a_1} \right)^{n-k+1} \left( \frac{r_2}{a_2} \right)^{k-n-3} \tilde{D}^n \left[ \frac{1}{2} b_{3/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) + \sum_{j=1}^{\infty} b_{3/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \cos j\psi \right] \quad (4.52)$$

As quantidades  $(r_i/a_i)^m$  e  $\cos \psi$  são expandidas utilizando os coeficientes de Hansen. Tomamos a média sobre os ângulos de curto período  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , e para o caso de  $\langle F_{1,d} \rangle$ , aplicamos a desigualdade assumida para as médias. Para ambas as perturbações, ficamos no final com expressões separadas para os termos seculares e ressonantes, de maneira análoga ao que havíamos obtido para o potencial perturbador médio  $\langle \mathcal{R} \rangle$ .

Nesta metodologia adotada, o regime de ressonância é determinado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{se } |\langle F_{1,d} \rangle| &= |F_{1,d}^{(sec)} + F_{1,d}^{(res)}| > |F_{2,d}^{(sec)} + F_{2,d}^{(res)}| = |\langle F_{2,d} \rangle| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sigma_1 \text{ ressonante;} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\text{se } |\langle F_{1,d} \rangle| = |F_{1,d}^{(sec)} + F_{1,d}^{(res)}| < |F_{2,d}^{(sec)} + F_{2,d}^{(res)}| = |\langle F_{2,d} \rangle| \Rightarrow \sigma_2 \text{ ressonante}$$



## Testes de Convergência e Aplicações

Neste capítulo, apresentamos os testes de convergência realizados para a validação do modelo analítico apresentado nos capítulos precedentes. Ao final, apresentamos uma aplicação preliminar.

O modelo proposto pelas equações (4.6), (4.7) e (4.18) foi implementado em código Fortran 90. Realizaram-se testes quanto a convergência dessas expressões, visto que se tratam de séries - teoricamente - infinitas. O principal padrão utilizado na avaliação dos resultados foi a comparação entre as computações geradas através do modelo proposto e aquelas obtidas via modelo semi-analítico, o qual já havia sido desenvolvido e validado pelo grupo de Astronomia Dinâmica do Departamento de Astronomia do IAG.

É necessário, antes de tudo, definir os parâmetros físicos e as condições iniciais para o problema. É de nosso interesse, em particular, o estudo de sistemas dentro ou próximos à ressonância 3:1. Isto significa estabelecer  $p + q = 3$ , onde  $p = 1$  e  $q = 2$ , ou seja: tratamos de uma ressonância de segunda ordem.

Tendo em perspectiva aplicações ao estudo do sistema de Plutão e suas duas primeiras luas (Caronte e Styx), utilizou-se os seguintes valores de massas e semi-eixos:  $m_0 = 1.3029 \cdot 10^{22}$  kg e  $a_1 = 19597$  km, os quais vêm a ser os valores de massa de Plutão e do semi-eixo da órbita de Caronte em relação a Plutão (Brozović et al., 2015), respectivamente;  $m_1 = 1.5864 \cdot 10^{19}$  kg, valor que é equivalente a 1% da massa gravitacional do satélite Caronte (Brozović et al., 2015). O semi-eixo da órbita externa,  $a_2$ , é tomado de tal modo que se tenha o sistema, inicialmente, dentro da ressonância exata, i.e.,  $n_1/n_2 = (p + q)/p$  ( $= 3/1$ , neste caso). Em todos os testes aplicados, a razão de massas  $m_2/m_1$  foi mantida unitária, exceto nos casos em que indicamos outro valor. Utilizando a relação (4.8), é

possível chegar a seguinte equação

$$a_2 = a_1 \left[ \left( \frac{p+q}{p} \right)^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \right]^{1/3},$$

que determina o valor nominal para  $a_2$  dentro da ressonância exata (já explicamos que, em nosso trabalho, chamamos ressonância ‘exata’ ao caso em que verifica-se a igualdade  $n_1/n_2 = (p+q)/p$ ). Para o caso  $m_2 = m_1$ , e fazendo  $p = 1$  e  $q = 2$ , obtém-se  $a_2 \simeq 40736$  km.

## 5.1 Análise de convergência

### 5.1.1 Modelo padrão de comparação

Explicamos, em linhas gerais, o funcionamento do modelo semi-analítico que usamos como padrão de comparação neste trabalho. Nele, o Hamiltoniano médio é computado também em código Fortran, através de uma média numérica efetuada sobre o *ângulo sinódico*  $Q = (\lambda_1 - \lambda_2)/q$  (Beaugé e Michtchenko, 2003; Michtchenko et al., 2006). As quantidades  $r/a$  são obtidas através da fórmula  $r = a(1 - e \cos u)$ , onde  $u$  denota a anomalia excêntrica, que é computada através da solução da equação de Kepler (onde toma-se  $u_0 = M$  como primeira aproximação). As anomalias médias, nesse modelo, vêm através das relações

$$\begin{aligned} M_1 &= \sigma_1 + (p+q)Q, \\ M_2 &= \sigma_2 + pQ. \end{aligned}$$

As anomalias verdadeiras são obtidas de

$$f = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \left( \frac{u}{2} \right) \right]. \quad (5.1)$$

As distâncias mútuas  $\Delta$  e  $r_{02}$  são calculadas através das relações vetoriais envolvendo  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  e o ângulo  $\psi = f_1 + f_2 - \Delta\varpi$  (Cap. 3).

Nas seções a seguir, analisamos a convergência do modelo analítico, em termos dos índices  $n$ ,  $N$  e  $j$ , que caracterizam a expansão apresentada nos capítulos anteriores.

### 5.1.2 Coeficientes de Laplace

Ao implementar as fórmulas (3.40) e (3.41) para computação dos coeficientes de Laplace, é necessário estabelecer um limite superior para o somatório no índice  $i$  que aparece

no somatório dessas fórmulas. Estudamos o comportamento da série de  $\tilde{\alpha}$ , para diferentes valores limites, conforme mostrado na figura abaixo.

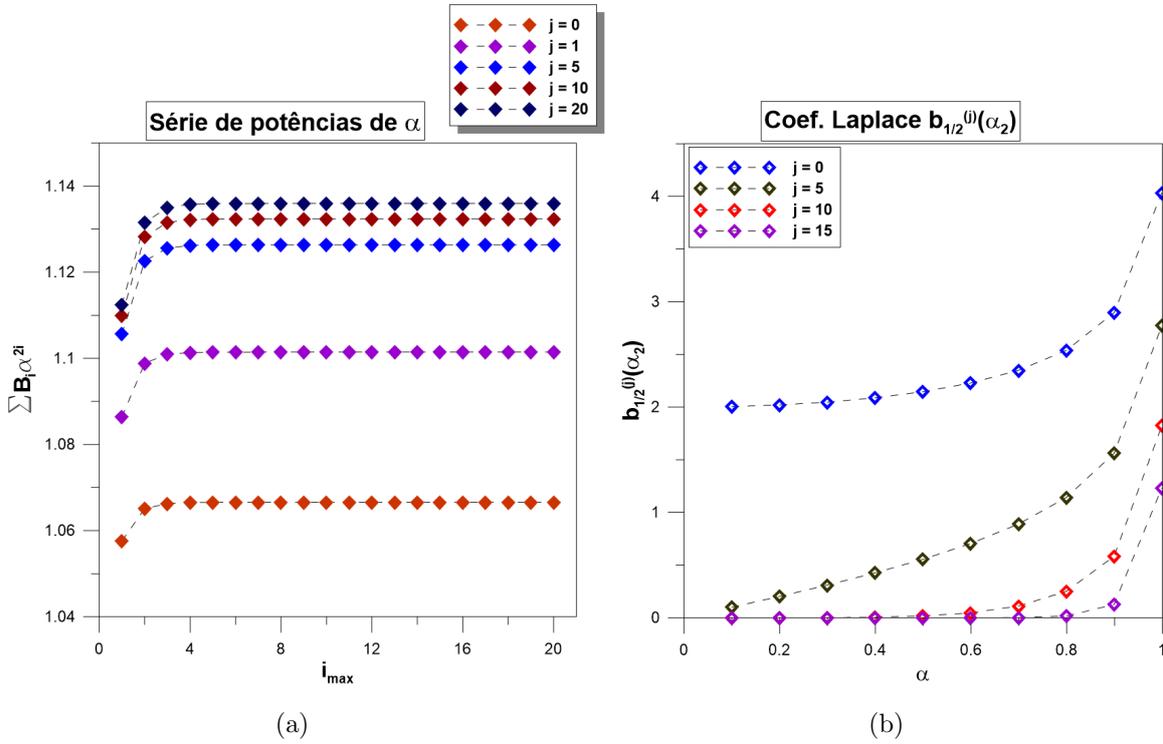


Figura 5.1: (a) Comportamento da série dos coeficientes de Laplace  $b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha})$ ,  $0 \leq j \leq 5$ , em termos do índice  $i$ ;  $\varepsilon_2 \sim 1$  e  $\tilde{\alpha} = 0.48$ . Essas séries, que nada mais são que os somatórios nas fórmulas dos coeficientes  $\sum_i B_i \alpha^{2i}$ , aparecem para a parte direta do potencial perturbador. (b) Comportamento da função analítica dos coef. Laplace, em termos do parâmetro  $\alpha$ , para distintos valores do índice  $j$ .

Na Fig. (5.1a), verifica-se um comportamento rapidamente convergente para a série de  $\tilde{\alpha}$ , independentemente do índice  $j$  do coeficiente calculado. Vemos que o desempenho da função torna-se estável para  $i \geq 4$ . Para  $\alpha'$ , espera-se um comportamento que seja, no mínimo, tão estável quanto o mostrado acima, uma vez que  $\alpha' \ll \tilde{\alpha}$ .

Na Fig. (5.1b), mostramos o comportamento dos coeficientes  $b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha})$  em função da razão  $\alpha$  e para diferentes valores do índice  $j$ . Pode-se perceber certa estabilidade nos valores da função, aparecendo um aumento abrupto somente quando  $\alpha \rightarrow 1$ , o que já era de certo modo esperado, já que os  $b_{1/2}^{(j)}$  são coeficientes de expansões em séries de Fourier.

Para o desenvolvimento do trabalho (e portanto, no prosseguimento do estudo aqui descrito), definiu-se  $i_{max} = 10$  para as séries de cálculo. De acordo com o gráfico da Fig. (5.1a), este parece ser um valor razoável para o índice máximo de cálculo. Em nossos estudos, averiguamos que a precisão computacional é atingida para  $i_{max} = 20$ .

### 5.1.3 Comparação com o modelo semi-analítico

#### 5.1.3.1 Curvas $\mathcal{R}_{\text{médio}}$ vs $e_2$ e $\partial\mathcal{R}_{\text{médio}}/\partial e_2$ vs $e_2$

Para comparação entre os desempenhos dos modelos analítico e semi-analítico, testou-se o comportamento das curvas  $\langle \mathcal{R} \rangle$  vs  $e_2$  e  $\partial \langle \mathcal{R} \rangle / \partial e_2$  vs  $e_2$ , geradas por cada um dos modelos. Testes similares foram sugeridos em (Beaugé e Michtchenko, 2003).

Em nossa metodologia, tratamos os dados de duas maneiras distintas, quanto a esta parte de averiguação da convergência. Tomamos os parâmetros de massa e semi-eixos já estabelecidos como as condições iniciais do sistema. As variáveis angulares foram definidas  $\sigma_1 = 90^\circ$  e  $\Delta\varpi = 0^\circ$ .

No primeiro caso de teste (o qual chamaremos **T1**), fixou-se  $e_1 = 0.005$  e  $e_2 = 0.01$ . Para esses elementos orbitais, obtêm-se  $\mathcal{K} = 0.96423$  e  $AM = 1.06042$ . Para os mesmos valores de  $\mathcal{K}$  e  $AM$ , computou-se  $\langle \mathcal{R} \rangle = \mathcal{R}_{\text{médio}}(e_1, e_2, \sigma_1, \Delta\varpi)$  em função de  $e_2$ , dentro do intervalo  $0 \leq e_2 \leq 0.5$ . Em cada ponto  $(e_2, \langle \mathcal{R} \rangle)$ , os ângulos foram mantidos fixos nos valores mencionados,  $e_1$  tomado como um parâmetro conhecido, e os semi-eixos foram recalculados através das relações (4.23) e (4.24), em função de  $e_1$  e  $e_2$ :

$$a_1 = a_1(e_1, e_2) = \frac{1}{\mu_1 \beta_1^2} \left[ \frac{rAM - \mathcal{K}\sqrt{1 - e_2^2}}{r\sqrt{1 - e_1^2} - (1 + r)\sqrt{1 - e_2^2}} \right]^2, \quad (5.2)$$

$$a_2 = a_2(e_1, e_2) = \frac{1}{\mu_2} \left[ \frac{\mathcal{K} - (1 + r)L_1(a_1(e_1, e_2))}{r\beta_2} \right]^2. \quad (5.3)$$

Com  $\mathcal{K}$  e  $AM$  invariantes ao longo das computações de  $\langle \mathcal{R} \rangle$ , garantimos que o estudo é feito sobre um sistema caracterizado pelas mesmas constantes físicas, i.e, tratamos sempre o mesmo sistema, submetido a diferentes condições iniciais.

No segundo caso de teste, permitiu-se que  $AM$  pudesse variar livremente, como função de  $e_1$  e  $e_2$ , enquanto  $\mathcal{K}$  foi mantido fixo, ao tomar-se  $a_1$  e  $a_2$  com valores únicos:  $a_1 = 19.576$  km e  $a_2 \simeq 40.736$  km. A excentricidade  $e_2$  foi novamente tomada dentro do intervalo  $[0, 0.5]$ , e para cada ponto computamos  $\langle \mathcal{R} \rangle$  em função de  $e_2$ , novamente.

Em ambos os testes,  $e_2$  é o único elemento independente que varia: em nosso problema,  $e_1$ ,  $\sigma_1$  e  $\Delta\varpi$  são constantes dentro do domínio da função  $\langle \mathcal{R} \rangle$ .

**Teste I:** a Fig. (5.2) apresenta os resultados do comportamento do potencial perturbador, para o primeiro tipo de testes proposto ( $AM$  e  $\mathcal{K}$  constantes ao longo das curvas). Foram adotados quatro valores para  $e_1$ : 0.005, 0.05, 0.1 e 0.4. Em cada gráfico, o resul-

tado obtido através do método semi-analítico é mostrado em linha contínua vermelha. Os demais pontos foram obtidos utilizando o modelo desenvolvido.

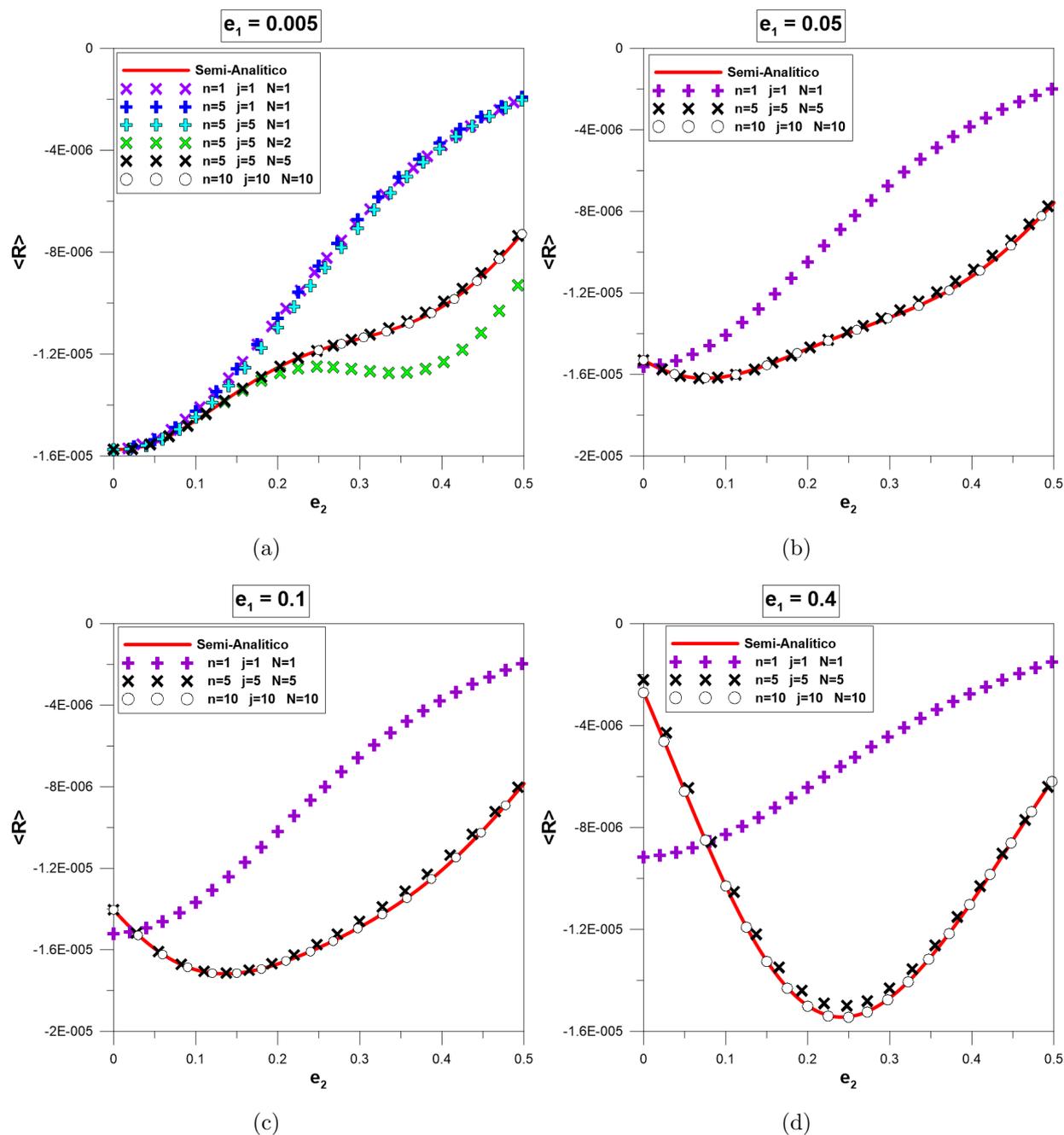


Figura 5.2: Curvas de  $\langle R \rangle$  vs  $e_2$ , para os valores de  $e_1$  conforme indicado. São tomados diferentes intervalos para os coeficientes  $n$ ,  $j$  e  $N$ .  $\mathcal{K}$  e  $AM$  são constantes de movimento,  $\sigma_1 = 90^\circ$ ,  $\Delta\varpi = 0^\circ$ . Em linha contínua vermelha tem-se o comportamento do modelo semi-analítico usado como padrão.

Cada curva foi computada utilizando diferentes valores limites para os índices de somatórios  $n$  (relacionado à ordem de expansão em série de Taylor),  $j$  (relacionado à ordem da expansão em série de Fourier) e  $N$  (relacionado à ordem do harmônico máximo tomado).

Analisando os resultados acima, é possível perceber alguns pontos importantes: na Fig. (5.2 a), nota-se a diferença sensível em se tomar o primeiro harmônico (i.e, o harmônico de ordem  $N = 2$ ), pois vemos uma mudança considerável no perfil da curva gerada analiticamente, para  $N = 1$  e  $N = 2$ . Conforme mais harmônicos são tomados, a correspondência entre os resultados analítico e semi-analítico torna-se mais evidente. O mesmo acontece para os demais casos, em (b), (c) e (d). Para os valores mais altos de  $e_1$  (Figs. (5.2 c) e (5.2 d)), a melhor convergência foi atingida para ordens  $n = 10$ ,  $j = 10$  e  $N = 10$ , nos casos em que a excentricidade interna .

Para cada um dos gráficos mostrados na Fig.(5.2), computamos as derivadas  $\partial < R > / \partial e_2$ . No caso das curvas semi-analíticas, tais derivadas foram calculadas numericamente, através de uma rotina de derivação escrita no software Wolfram Mathematica, a qual utiliza métodos de interpolação para obter a derivada numérica. Os resultados foram comparados com as computações da derivada analítica de nosso modelo, de forma análoga aos testes anteriores, e são apresentados na Fig.(5.3).

Uma vez que  $e_1$  e  $e_2$  são as variáveis independentes nesse problema, significa que  $\partial e_1 / \partial e_2 = 0$ . Derivar o potencial perturbador em relação a  $e_2$  implica derivar implicitamente os coeficientes de Laplace  $b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha})$  e  $b_{1/2}^{(j)}(\alpha')$ , além de derivar explicitamente os coeficientes de Hansen. As expressões utilizadas são dadas abaixo.

$$\frac{d\alpha}{de_2} = \frac{1}{a_2^2} \left( a_2 \frac{da_1}{de_2} - a_1 \frac{da_2}{de_2} \right); \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial e_2} \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) = \tilde{D}^{n+1} b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \epsilon_2 \frac{d\alpha}{de_2}; \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial e_2} D^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha') = D^{n+1} b_{1/2}^{(j)}(\alpha') \epsilon_1 \frac{d\alpha}{de_2}, \quad (5.6)$$

e  $\partial a_i / \partial e_2$ ,  $i = 1, 2$ , são calculadas de (5.2) e (5.3). As derivadas dos coeficientes de Hansen foram apresentadas na subseção 3.1.6 do capítulo 3. As expressões completas para as derivadas  $\partial < \mathcal{R} > / \partial e_2$ , e que foram implementadas em nosso modelo, são apresentadas no Apêndice B.

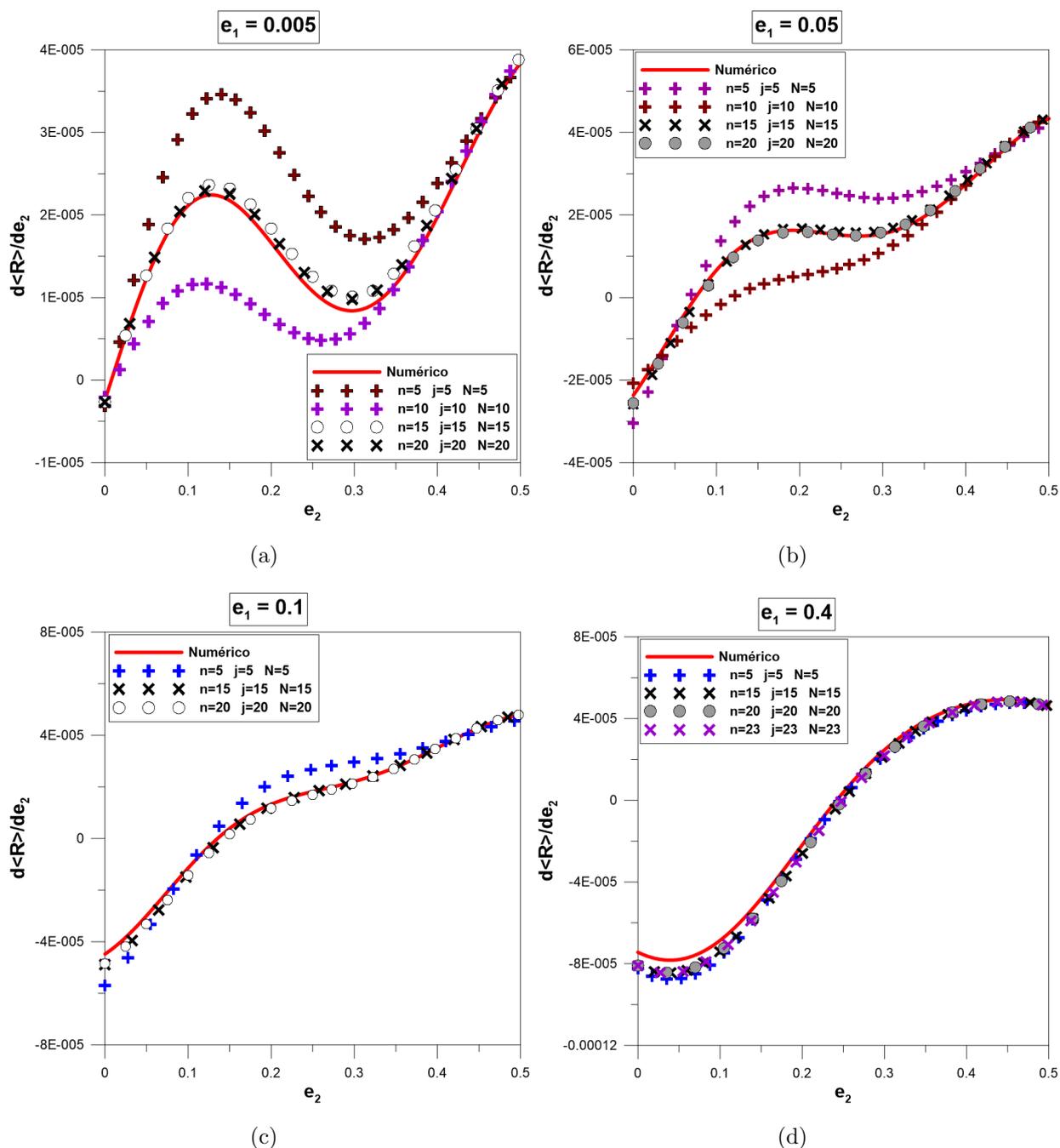


Figura 5.3: Curvas de  $\partial \langle \mathcal{R} \rangle / \partial e_2$  vs  $e_2$ , tomadas para cada um dos casos de excentricidades  $e_1$  indicados. O modelo analítico foi computado novamente para diferentes configurações de ordens em  $n$ ,  $j$  e  $N$ . A linha vermelha contínua novamente indica o comportamento utilizado como padrão, neste caso, a curva derivada numérica.

Vemos que não há uma correspondência precisa entre as curvas derivadas exatamente dos melhores modelos de “fitagem” para  $\langle \mathcal{R} \rangle$  (e que ocorre para índices iguais a 10) e a curva obtida por interpolação numérica. Tomando-se ordens mais altas para os índices, atestamos uma convergência satisfatória para os casos de  $n = 20$ ,  $j = 20$  e  $N = 20$ .

É interessante mencionar a concordância qualitativa entre as curvas derivadas em cada um dos casos (analítico e numérico), no que concerne propriamente ao comportamento: percebe-se, em todos os casos apresentados, que os pontos críticos e os pontos de inflexão são praticamente coincidentes.

**Teste II:** os resultados para o segundo teste são expostos a seguir. Agora, os coeficientes de Laplace são constantes ao longo de todas as curvas, sendo a razão  $\alpha \simeq 0.481$  e  $\mathcal{K} \simeq 0.964$ . Apresentamos os casos de excentricidade interna mínimo e máximo que vinham sendo considerados,  $e_1 = 0.005$  e  $e_1 = 0.4$ , respectivamente. O resultado semi-analítico é novamente indicado pela linha contínua vermelha.

Para  $e_1 = 0.005$ , vemos, da Fig.(5.4), que mesmo em casos nos quais  $N = 10$ , onde antes tínhamos uma boa correspondência, os resultados analíticos divergem do semi-analítico, para  $e_2 > 0.3$ . Para  $N = 15$ , os modelos se aproximam mais, e começam a divergir em  $e_2 > 0.4$ . Ainda nessa figura, com  $N = 20$ , os modelos divergem quando  $e_2 > 0.45$ .

Na Fig. 5.5, temos as curvas para  $e_1 = 0.4$ .

Vemos que a divergência entre os resultados analíticos e semi-analítico persiste, ocorrendo em valores intermediários de  $e_2$ , nos casos de menor valor para  $N$ . Analisando ainda a Fig. 5.5, para  $N = 20$ , vemos que a coincidência entre os resultados é razoavelmente melhor, e as curvas analíticas divergem em  $e_2 > 0.4$ . Fica claro que tomar ordens  $n > 20$  não gera melhores aspectos de convergência dos resultados.

De maneira análoga ao que já foi apresentado, temos as derivadas em relação a  $e_2$ . Agora, com  $\alpha$  constante ao longo de toda a curva, e portanto  $\partial a_i / \partial e_2 = 0$ . A Fig. 5.6 mostra os resultados para  $e_1 = 0.005$ .

Na Fig. 5.7, os resultados são mostrados para computações feitas considerando o intervalo  $15 < N < 20$ . Averiguamos que, a partir de  $N = 17$ , as curvas apresentam saturações extremas, com tendência de divergências tanto para  $+\infty$  quanto  $-\infty$ .

Para  $e_1 = 0.4$ , mostramos o comportamento das curvas no caso de  $N = 15$ , e depois no intervalo  $15 < N < 20$ , através da Fig.5.8. Em todos eles, as divergências são evidentes, a partir de  $e_2 = 0.3$ . Computar ordens mais altas em  $n$ ,  $j$  ou  $N$  não revelou-se uma alternativa para melhorar tais comportamentos.

Uma questão é aqui pontuada. Quando mantemos  $\alpha$  constante, e tomamos  $e_1 = 0.4$ , a condição de *close approach* (3.15) não é satisfeita para  $e_2 > 0.3275$ : i.e., nos casos acima desse valor, os parâmetros interno e externo apresentam valores muito próximos, sendo

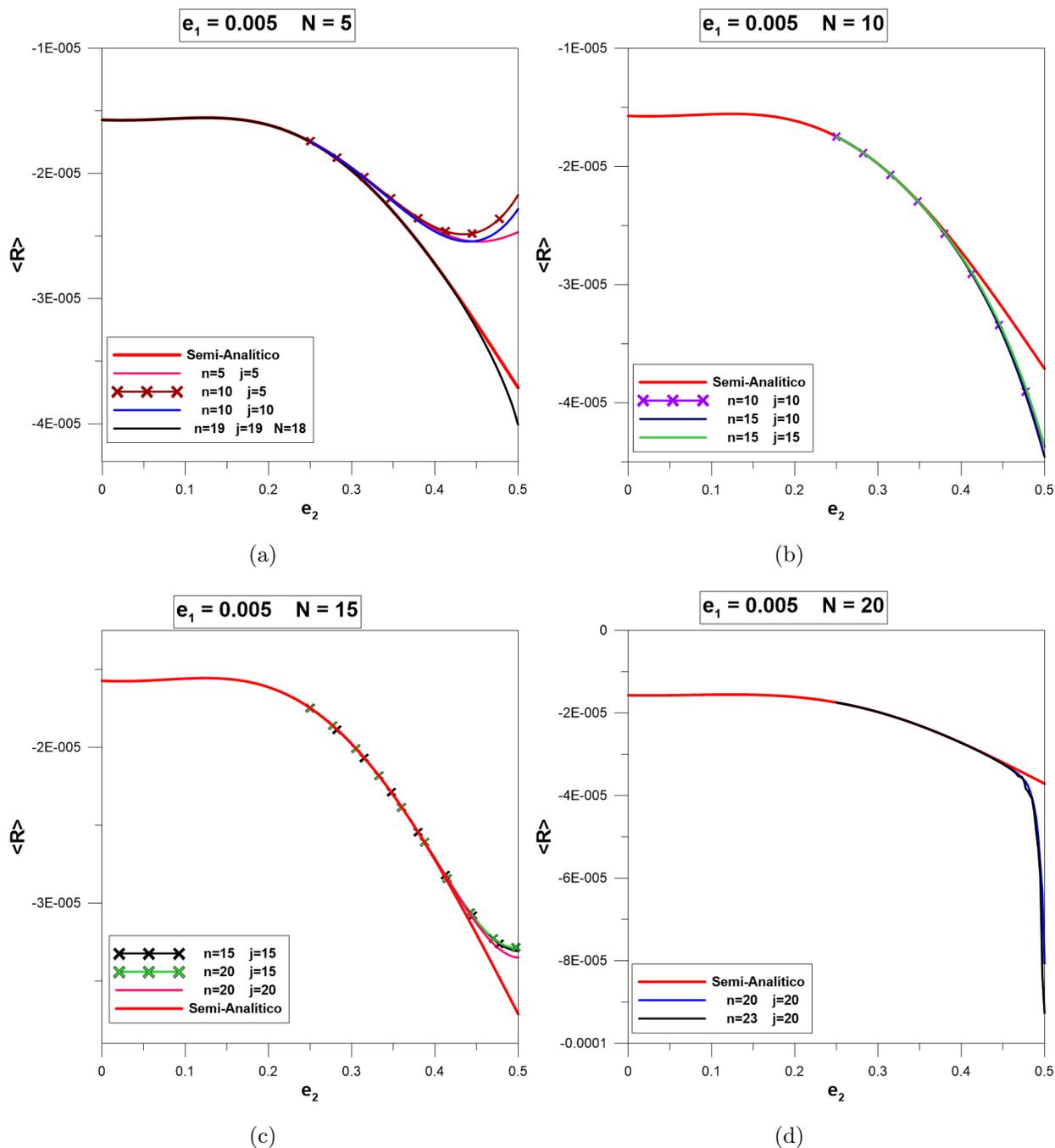


Figura 5.4: Curvas de  $\langle R \rangle$  vs  $e_2$ , tomadas para  $e_1 = 0.005$ . Os gráficos indicam os valores máximos de harmônicos considerados. A linha vermelha contínua apresenta o comportamento do modelo padrão semi-analítico.

a razão  $\gamma_{ext}/\gamma_{int}$  muito próxima de 1, nestes casos ( $\gamma_{ext}$  e  $\gamma_{int}$  se referem aos parâmetros definidos (3.15)). O que supomos é que, em tais cenários, a distância  $\Delta$  entre os corpos orbitantes encontra-se em um domínio de valores muito próximo a singularidade, e o modelo não é suficientemente satisfatório nessas regiões.

No gráfico apresentado na Fig.5.9, mostramos a curva de  $\gamma_{ext}/\gamma_{int}$  vs  $e_2$ , dentro do

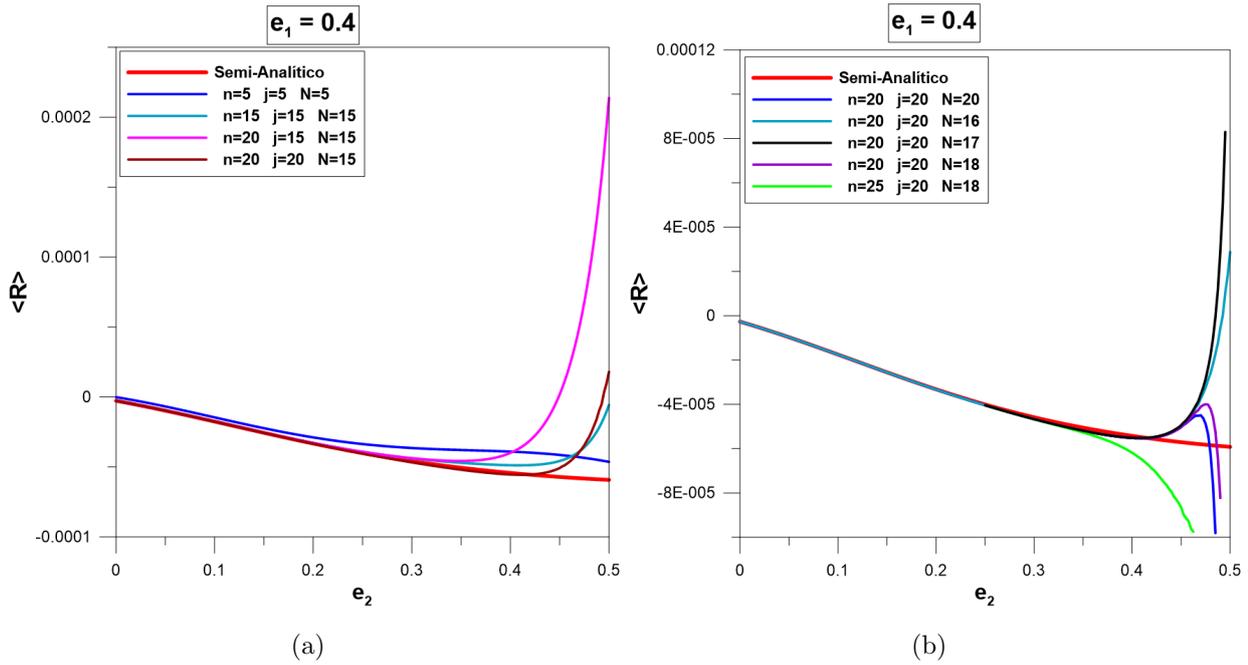


Figura 5.5: Curvas de  $\langle R \rangle$  vs  $e_2$ , tomadas para  $e_1 = 0.4$ . Nesse caso, testamos diferentes configurações para as ordens de expansão.

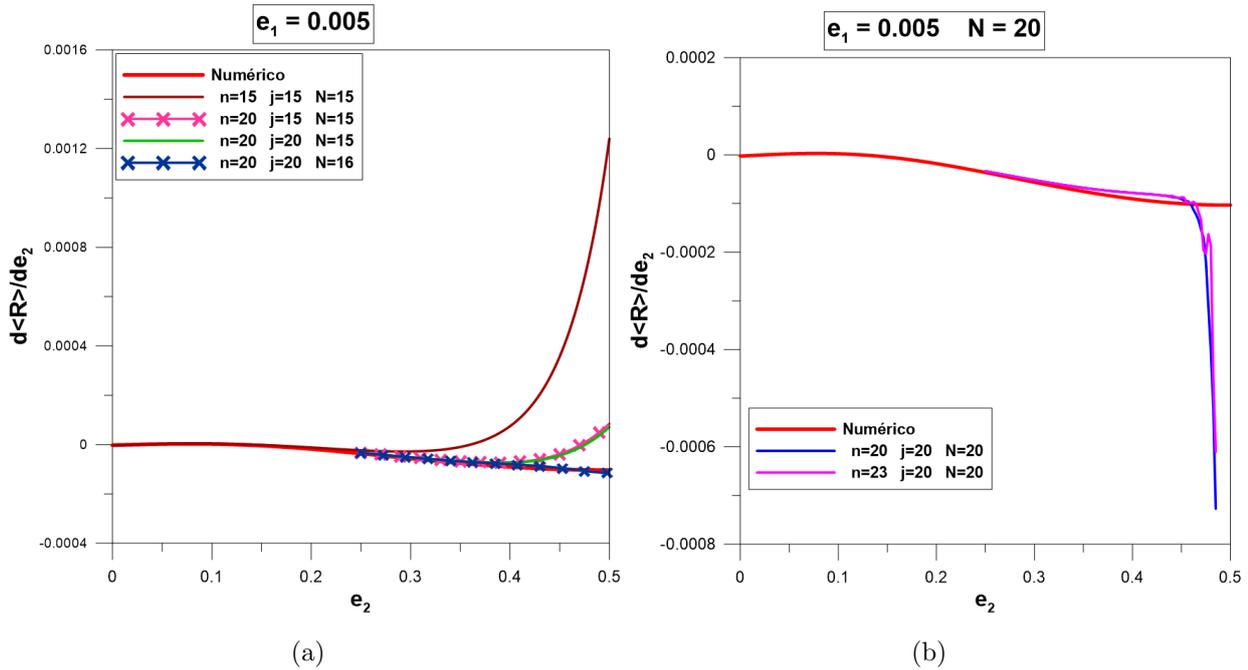


Figura 5.6: Curvas de  $\partial \langle R \rangle / \partial e_2$  vs  $e_2$ , para  $e_1 = 0.005$ .

intervalo  $0 \leq e_2 \leq 0.5$ , e para  $e_1 = 0.005$  e  $e_1 = 0.4$ . Consideramos o comportamento para os dois casos de testes aplicados, conforme indicado pela legenda do gráfico.

É possível notar que, para os testes T1, a razão entre os parâmetros é sempre maior que 1.5, para ambos os casos de excentricidade interna, e a condição (3.15) é satisfeita. O

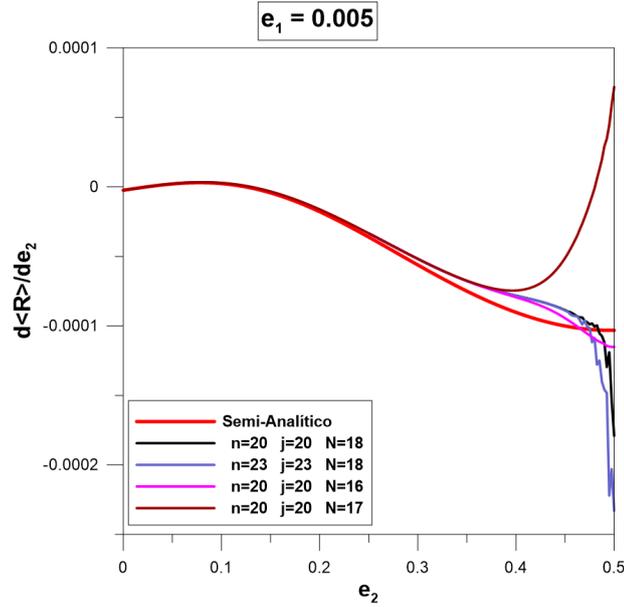


Figura 5.7: Curvas de  $\partial \langle R \rangle / \partial e_2$  vs  $e_2$ , para  $e_1 = 0.005$ . Aqui, mostramos as configurações de ordem máxima que podem ser adotadas, de maneira tal a obter-se a melhor correspondência possível com a curva padrão (vermelha contínua).

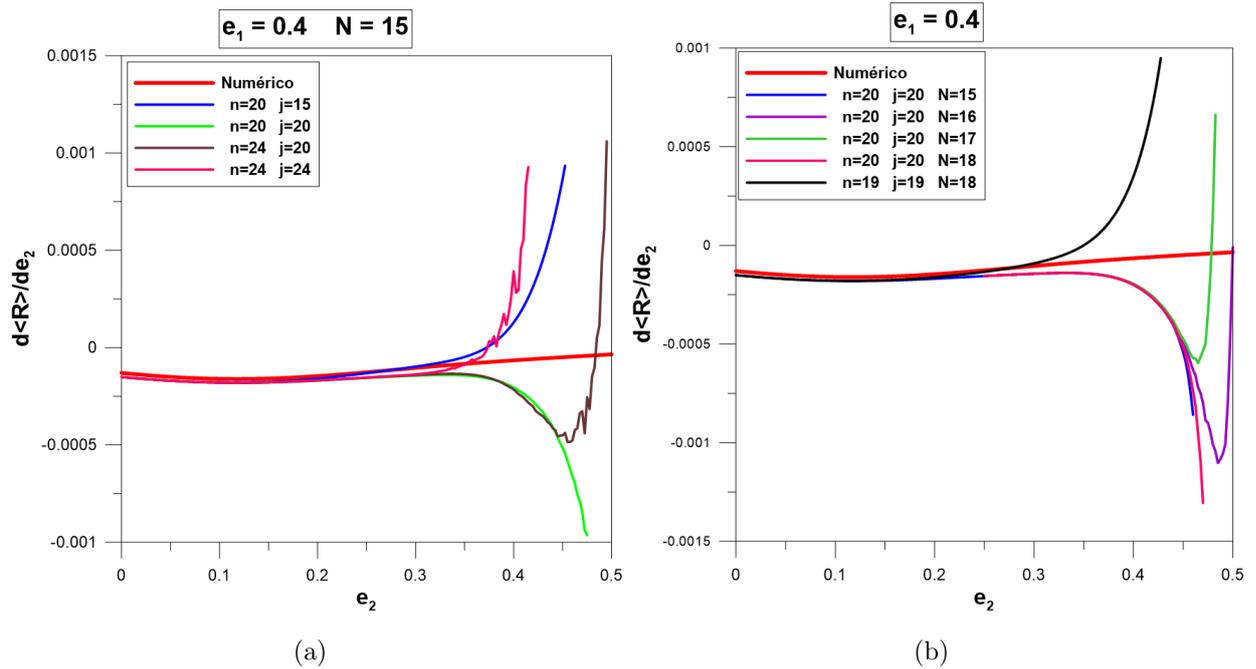


Figura 5.8: Curvas de  $\partial \langle R \rangle / \partial e_2$  vs  $e_2$ , para  $e_1 = 0.4$ .

sistema físico considerado encontra-se distante das configurações que caracterizam singularidades. Já em T2, percebe-se a queda contínua da razão  $\gamma_{ext}/\gamma_i nt$ , em ambas as situações consideradas para  $e_1$ . Quando  $e_1 = 0.005$ , por exemplo, a razão torna-se muito próximo de 1 para valores mais altos de  $e_2$ . Para  $e_1 = 0.4$ , a razão é unitária em  $e_2 = 0.3275$ , e

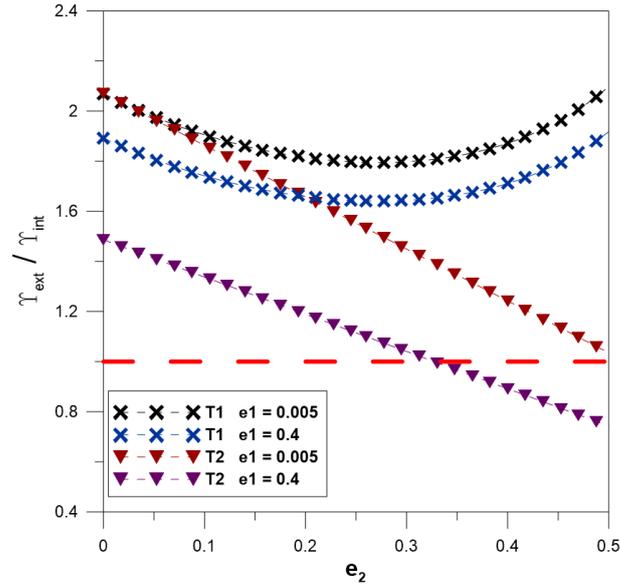


Figura 5.9: Curvas para a razão entre os parâmetros externo e interno,  $\gamma_{ext}/\gamma_{int}$ , seguindo a notação que denominamos no Capítulo 3, Seção (3.1.1).

é menor que 1 para valores superiores de  $e_2$ . Tais fatos podem explicar as divergências encontradas nas curvas de  $\langle \mathcal{R} \rangle$  e  $\partial \langle \mathcal{R} \rangle / \partial e_2$ .

### 5.1.3.2 Planos representativos

Sabemos que, juntamente com a energia total (média)  $\langle \mathcal{H} \rangle$ ,  $AM$  e  $\mathcal{K}$  são também quantidades invariantes do sistema, o qual tem a sua dinâmica determinada por dois graus de liberdade. O espaço de fases é, portanto, quadridimensional, dado por dois ângulos e duas ações independentes. A estrutura desse espaço, embora possua quatro dimensões (o que dificulta sua representação completa) pode ser estudada através da construção de superfícies de seção.

Para um dado conjunto de condições iniciais fixadas, i.e., valores pré-estabelecidos de  $\mathcal{K}$  e  $AM$ , o espaço de fases pode ser visualizado, por exemplo, através do plano representativo  $(e_1, e_2)$  de condições iniciais: fixam-se os valores para o ângulo crítico  $\sigma_1$  em  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , e para o ângulo secular  $\Delta\varpi$  em  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Os semi-eixos maiores são novamente obtidos através das equações (5.2) e (5.3).

Nas Figs. 5.10 e 5.11 é possível comparar os resultados obtidos através de nosso modelo com os resultados gerados através da metodologia semi-analítica. Tais planos representativos foram construídos para as razões de massa  $m_2/m_1 = 0.1, 0.5, 1$  e  $5$ . O modelo analítico foi computado em ordens razoáveis de expansões, conforme verificou-se para os casos de

---

baixas excentricidades:  $n \in [0, 5]$ ,  $j \in [0, 5]$  e  $N \in [1, 5]$ .

Os planos à esquerda nas Figs. 5.10 e 5.11 foram obtidos utilizando o modelo semi-analítico, enquanto que à direita estão os resultados gerados por nosso modelo. A análise superficial dos gráficos permite perceber, em um primeiro momento, uma concordância, principalmente qualitativa, entre os resultados obtidos por cada metodologia. Cada curva representa uma superfície equipotencial, e pode-se ver uma grande semelhança entre o perfil das mesmas, para cada um dos casos. Os pontos vermelhos indicam os máximos globais de energia do sistema, para as condições iniciais e parâmetros considerados. Em cada um dos planos, esses pontos aparecem para valores bastante próximos (visualmente) de  $(e_1, e_2)$ , quando comparamos os casos de mesmas razões de massas.

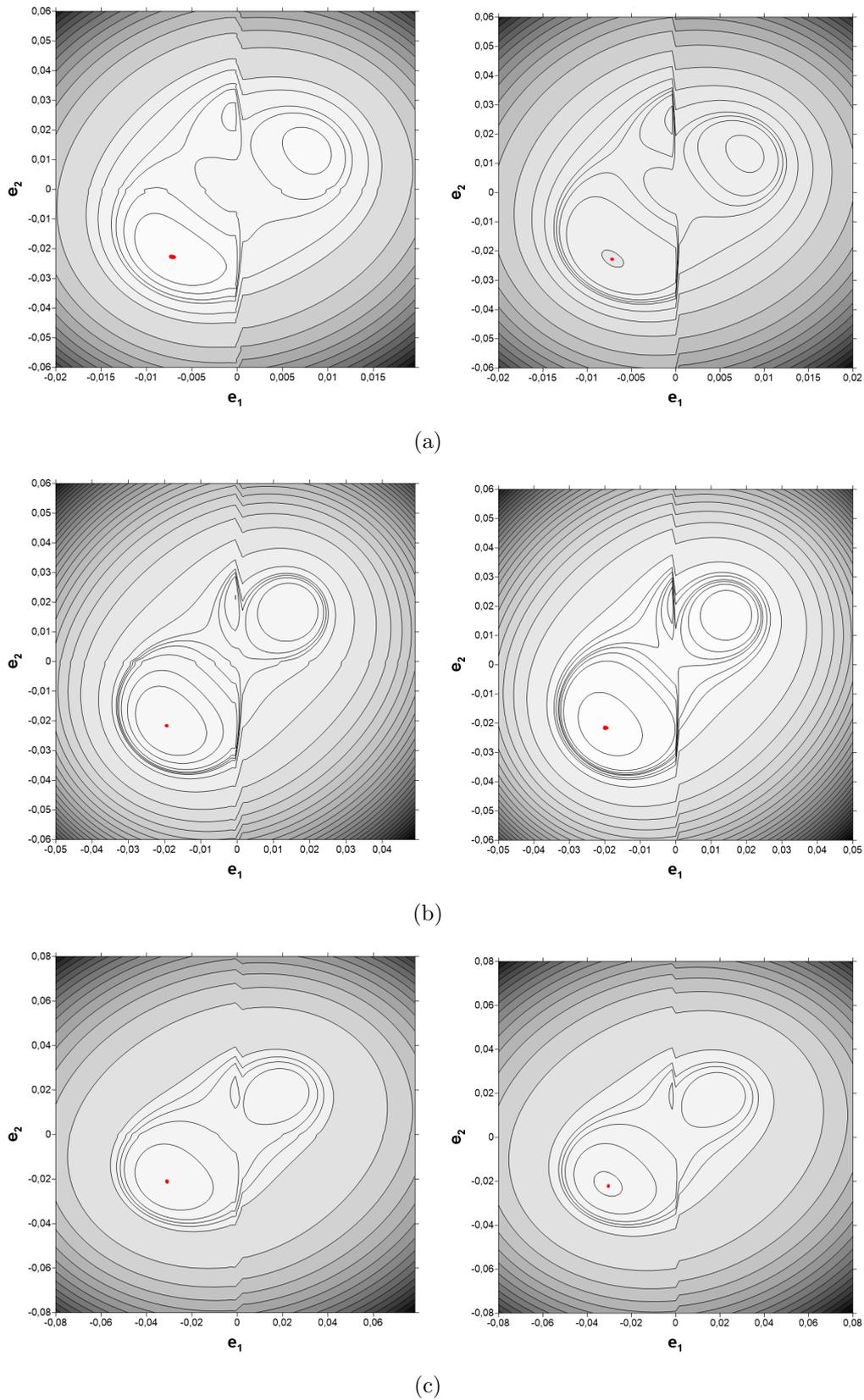


Figura 5.10: Planos representativos  $(e_1, e_2)$  tomados dentro da ressonância exata  $3/1$ , para razões de massa  $m_2/m_2$ : (a)0.1, (b)0.5 e (c)1. Os valores positivos (negativos) de  $e_1$  indicam que  $\sigma_1 = 0$  ( $\pi/2$ ), enquanto que valores positivos (negativos) de  $e_2$  significam  $\Delta\varpi = 0$  ( $\pi$ ).

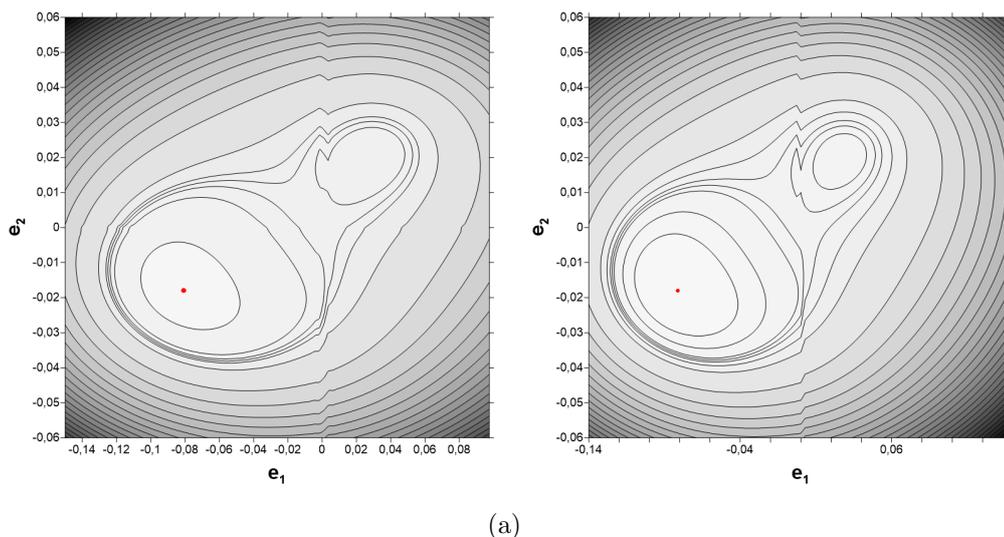


Figura 5.11: Planos representativos  $(e_1, e_2)$  tomados dentro da ressonância exata 3/1, para a razão de massa  $m_2/m_1 = 5$ . Os valores positivos (negativos) de  $e_1$  indicam que  $\sigma_1 = 0$  ( $\pi/2$ ), enquanto que valores positivos (negativos) de  $e_2$  significam  $\Delta\varpi = 0$  ( $\pi$ ).

## 5.2 Sistemas exoplanetários em quase-ressonância 3:1

Reservamos esta última seção para uma breve aplicação teórica de nosso modelo. Tomamos os dados disponíveis na literatura para os sistemas planetários que encontram-se em configurações próximas à ressonâncias 3:1 (considerou-se o intervalo  $2.8 \leq n_1/n_2 \leq 3.2$ ). Esses dados encontram-se disponíveis em catálogos, e fornecem os valores estimados para as massas da estrela e dos pares planetários, e para os elementos orbitais ( $a$ ,  $e$ ,  $\omega$  e  $\Omega$ ). Também é dado o tempo de passagem pelo periastro  $\tau$  e período orbital  $T$ , com os quais é possível calcular o valor da anomalia média.

Todos os valores fornecidos para as grandezas orbitais são astrocêntricos. Aplicar tais quantidades como parâmetros em nosso modelo levaria a resultados sem qualquer sentido físico, uma vez que modelamos o problema de três corpos utilizando um referencial baricêntrico de Jacobi. Foi necessário, portanto, realizar a transformação dos elementos orbitais astrocêntricos para elementos de Jacobi. Com tal finalidade, foi desenvolvida uma rotina de Fortran. As equações utilizadas são apresentadas no Apêndice C desta dissertação.

A tabela 5.1 apresenta os parâmetros físicos que caracterizam os sistemas exoplanetários considerados, após a transformação dos elementos orbitais de um sistema astrocêntrico para um sistema de coordenadas de Jacobi. A ordem de exposição, em cada um dos

Tabela 5.1 - Parâmetros físicos dos sistemas exoplanetários em quase-ressonância 3:1.  $\mathbf{M}$  designa a massa da estrela central, em unidades de massas solares;  $\mathbf{m}$  é a massa dos planetas, em unidade de massas de Júpiter. Os semi-eixos  $\mathbf{a}$  são dados em unidades astronômicas au. Os valores de  $\mathbf{a}$  e de  $\mathbf{e}$  foram obtidos após a transformação dos elementos astrocêntricos para elementos de Jacobi.

Nº/Sistema	$\mathbf{M}(M_{\odot})$	Pares	$\mathbf{m}(M_J)$	$\mathbf{a}(\text{au})$	$\mathbf{e}$	$T_2/T_1$
1 - 55 Cnc	0.905	55 Cnc-b	0.802	0.113	0.004	3.0090
		55 Cnc-c	0.165	0.236	0.067	
2 - GJ 163	0.4	GJ 163-b	$3.4 \cdot 10^{-2}$	0.061	0.11	2.9702
		GJ 163-c	$2.2 \cdot 10^{-2}$	0.125	0.10	
3 - HD 10180	1.06	HD10180-c	$4.2 \cdot 10^{-2}$	0.064	0.077	2.8391
		HD10180-d	$3.8 \cdot 10^{-2}$	0.129	0.143	3.0408
		HD10180-e	$8.0 \cdot 10^{-2}$	0.270	0.065	
4 - HD 60532	1.44	HD 60532-b	1.04	0.760	0.28	3.0016
		HD 60532-c	2.46	1.581	0.021	
5 - HD 7924	0.832	HD 7924-b	$2.7 \cdot 10^{-2}$	0.057	0.058	2.8337
		HD 7924-c	$2.5 \cdot 10^{-2}$	0.113	0.098	
6 - Kepler-1129	$1.0 \cdot 10^{-9}$	Kepler-1129-b	$2.6 \cdot 10^{-2}$	0.164	0.0	3.1445
		Kepler-1129-c	$2.3 \cdot 10^{-2}$	0.353	0.00001	
7 - Kepler-430	1.166	Kepler-430-b	$3.3 \cdot 10^{-2}$	0.225	0.0	3.0850
		Kepler-430-c	$1.3 \cdot 10^{-2}$	0.476	0.00012	
8 - Kepler-770	0.94	Kepler-770-c	$6.0 \cdot 10^{-3}$	0.025	0.0	2.8145
		Kepler-770-d	$9.0 \cdot 10^{-3}$	0.050	0.00002	
9 - TYC 1422-614-1	1.150	TYC 1422-614-1-b	2.5	0.700	0.06	2.7864
		TYC 1422-614-1-c	10.0	1.386	0.047	

pares, é planeta interno-planeta externo, em todos os casos. Para o sistema HD 10180, por exemplo, temos três planetas: nesse caso, expomos primeiro a ressonância entre o par c-d, e em seguida, entre o par d-e.

Uma vez com os respectivos valores de elementos no referencial de Jacobi, construímos os gráficos a seguir: na Fig. 5.12 os pares planetários aparecem distribuídos em termos da razão entre os movimentos médios e das maiores excentricidades de cada par. A linha em destaque define a região de pontos dentro da ressonância exata 3:1. Utilizamos o critério de determinação do regime de ressonância, conforme apresentado na Seção 4.4 do Capítulo 4, e classificamos cada sistema em ressonância interior ou exterior.

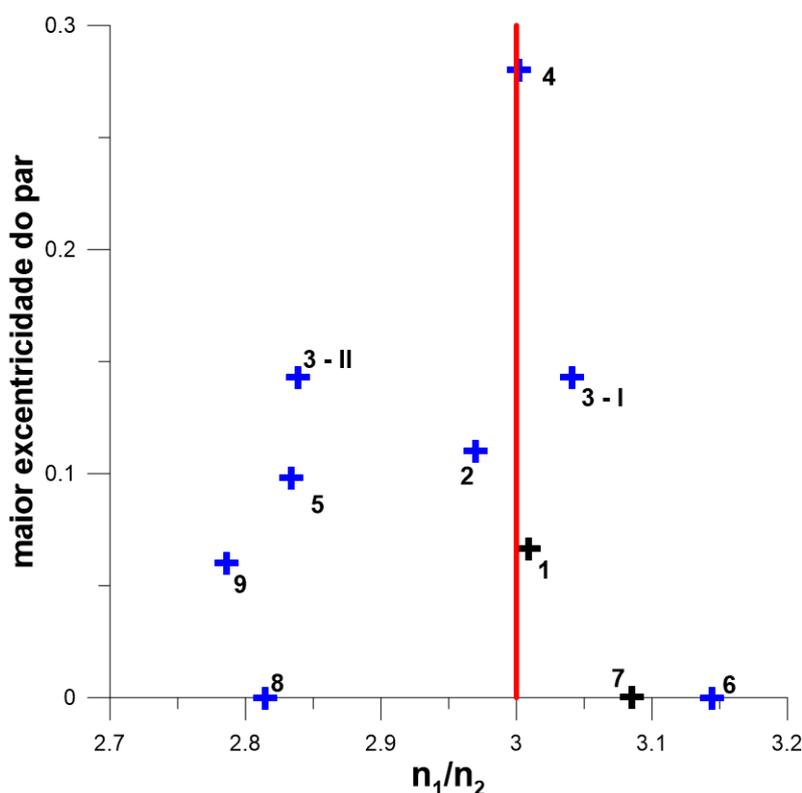


Figura 5.12: Distribuição dos pares planetários em termos das razões de movimentos médios  $n_1/n_2$  e das maiores excentricidades entre os pares. Os símbolos azuis determinam sistemas classificados (segundo nossa metodologia) em ressonâncias interiores; símbolos pretos representam ressonâncias exteriores. Os números identificam cada sistema em acordo com a Tabela 5.1.

Verificamos, por exemplo, que o sistema HD 60532 b-c encontra-se em configuração de ressonância interior, em concordância com o que é apresentado em (Alves et al., 2016).

Na Fig. 5.13 a seguir, a distribuição é apresentada para a razão de massas  $m_2/m_1$  e a maior excentricidade entre os pares. Novamente, separamos os sistemas de acordo com os regimes de ressonância.

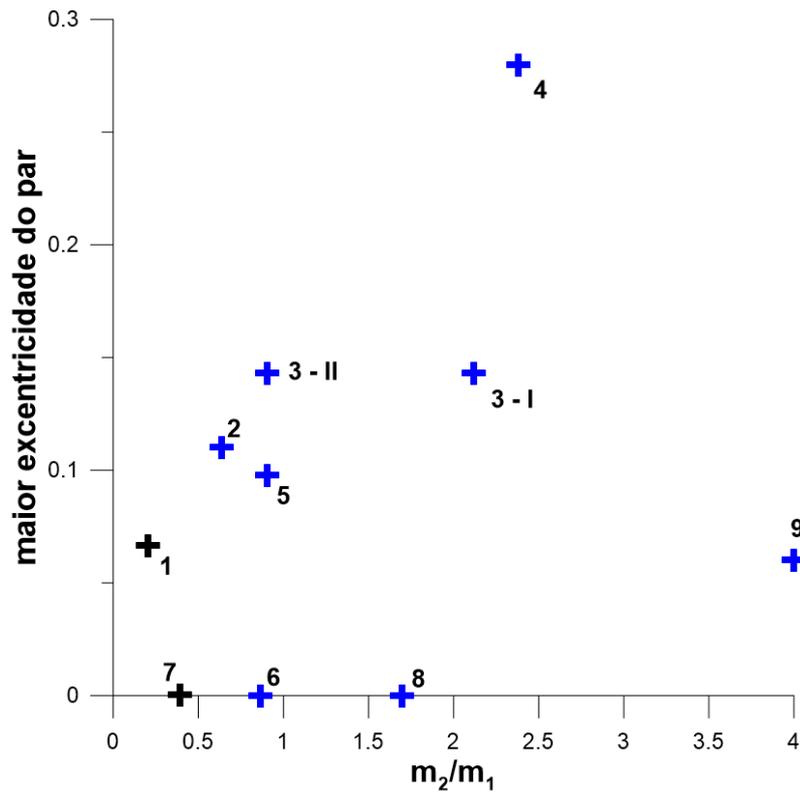


Figura 5.13: Distribuição dos pares planetários em termos das razões de massas  $m_2/m_1$  e das maiores excêntricas entre os pares. Os símbolos azuis determinam sistemas classificados em ressonâncias interiores; símbolos pretos representam ressonâncias exteriores. Os números identificam cada sistema em acordo com a Tabela 5.1.

Percebemos, na Fig. 5.13, que os sistemas em configurações de ressonância interna ocorrem para razões  $m_2/m_1 < 0.5$ . Entretanto, temos posse de poucos sistemas para garantir com assertividade tal afirmação, e um estudo mais aprofundado se faz necessário.

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, realizamos um estudo teórico do problema clássico de três corpos, nos atendo ao caso planar. Iniciamos nossas atividades compreendendo o desenvolvimento das equações de Newton dentro do problema de N-corpos, realizando as mudanças de referenciais (inercial arbitrário, inercial baricêntrico e astrocêntrico), e verificando a conservação das constantes de movimento (10 integrais clássicas). Atestamos como a existência de tais integrais tem papel crucial na redução do número de graus de liberdade do sistema. A mesma problemática foi abordada, utilizando as coordenadas de Jacobi.

Ainda dentro desta primeira parte, introduzimos o formalismo hamiltoniano, o qual foi adotado no desenvolvimento fundamental deste trabalho. A compreensão da teoria de Hamilton-Jacobi e das variáveis canônicas, bem como o entendimento das variáveis de ângulo-ação (que são que pares canônicos utilizados no estudo dos movimentos planetários), foram fatores de suma importância ao longo das atividades de Mestrado.

Finalmente, a primeira parte do trabalho foi concluída com a construção do Hamiltoniano de um sistema de  $(N+1)$ -corpos, primeiro para um referencial baricêntrico, e em seguida, utilizando os dois tipos clássicos de variáveis canônicas: Jacobi e Poincaré.

De posse dos fundamentos básicos para o estudo de sistemas dinâmicos dentro da Mecânica Celeste, iniciaram-se os trabalhos que compreendiam a parte principal do projeto.

O cerne de nossas atividades consistiu, primeiramente, no pleno entendimento das metodologias mais conhecidas na literatura de expansão da função perturbadora (ou, como preferimos dizer, potencial perturbador, no caso de se trabalhar com o Hamiltoniano ao invés das forças newtonianas), dentro das quais se destacam o método de expansões de Laplace (o qual foi adotado aqui) e o método de expansões em polinômios de Legendre. Ambos os caminhos foram estudados. No entanto, é sabido que as expansões em coeficientes

de Laplace são mais adequadas ao estudo de sistemas dentro (ou próximos) de ressonâncias de movimentos médios, e assim justificamos a escolha por essa metodologia.

As expansões da parte principal do potencial perturbador foram realizadas utilizando métodos analíticos de desenvolvimentos em séries de potências dos elementos orbitais  $a_i$  e  $e_i$  ( $i = 1, 2$ ), via expansões em séries de Taylor e Fourier.

Foi necessário o completo entendimento dessa parte, diante do surgimento de três novas quantidades (bem conhecidas nos âmbitos da Mecânica Celeste): os coeficientes de Laplace  $b_s^{(k)}(\alpha)$ , os coeficientes de Hansen  $X_k^{n,m}(e)$  e os operadores de Newcomb  $Y_{c,d}^{a,b}$ . A leitura de diversas bibliografias foi de fundamental importância para a compreensão dos métodos de computação desses elementos.

Obtivemos, primeiramente, duas expressões gerais para o potencial expandido: a parte direta  $\mathcal{R}_D$  e a parte indireta  $\mathcal{R}_I$ . Por critérios dinâmicos básicos, tais expressões gerais foram reduzidas via método das médias sobre os ângulos de curto período (as anomalias médias  $M_1$  e  $M_2$  ou, equivalentemente, as longitudes médias  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ). Tal média foi tomada, na prática, como uma simples eliminação, por inspeção, dos termos de curto período, dependentes de ao menos uma das longitudes médias, e que não envolvessem combinações críticas destas últimas. Consideramos, teoricamente, o caso para uma MMR qualquer, tendo o argumento crítico uma forma generalizada dada nominalmente por  $(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1$ . Sendo assim, ao final de nosso desenvolvimento teórico, o potencial perturbador estava dividido em quatro componentes, a saber: as partes direta secular  $\mathcal{R}_D^{(sec)}$  e ressonante  $\mathcal{R}_D^{(res)}$ , e as análogas indiretas,  $\mathcal{R}_I^{(sec)}$  e  $\mathcal{R}_I^{(res)}$ . Acreditamos que este talvez seja o traço mais sobressalente, i.e., o diferencial maior da expansão obtida: temos em mãos, separadamente, cada uma das contribuições dinâmicas ao sistema, tanto no que se refere às relações de interação gravitacional entre as massas (direta/indireta) quanto aos regimes à que estão submetidas (secular/ressonante). Além disso, nosso modelo está apto a tratar qualquer razão  $(p+q)/p$  de ressonância de movimentos médios.

Introduzimos as variáveis clássicas de Delaunay, adaptadas para o estudo de sistemas ressonantes. Das definições das ações clássicas, foi possível obter duas integrais de movimento para o problema,  $\mathcal{K}$  e  $AM$ , as quais contribuíram para a redução do número de graus de liberdade do sistema, de inicialmente quatro graus para somente dois. As equações de movimento de Hamilton foram derivadas, de maneira tal a obter explicitamente as relações para as variações temporais dos elementos orbitais  $a_i$  e  $e_i$  e das variáveis angulares,  $\sigma_i$  e

$\Delta\varpi$ . Ao final, elaboramos um critério analítico superficial (uma primeira aproximação, por assim dizer) para a determinação do ângulo ressonante “verdadeiro”, mas deixamos claro, uma vez mais, a necessidade de estudos mais aprofundados nesta parte.

A última parte de nosso estudo consistiu nos testes de convergência do modelo, através da verificação do comportamento qualitativo e quantitativo das curvas do Hamiltoniano em função das excentricidades, geradas pelo modelo teórico aqui introduzido e comparadas com o modelo semi-analítico desenvolvido pelo Grupo de Dinâmica Orbital do IAG.

Os resultados obtidos foram considerados bastante satisfatórios. Para o caso de uma ressonância na razão 3:1, as curvas de  $\langle \mathcal{R} \rangle$  vs  $e_2$  geradas analiticamente apresentaram comportamentos bastante similares com o modelo semi-analítico padrão utilizado, em diferentes valores tomados para  $e_1$ , e dentro de um intervalo razoavelmente extenso para a excentricidade do corpo externo,  $0 \leq e_2 \leq 0.5$ . As curvas das derivadas  $\partial \langle \mathcal{R} \rangle / \partial e_2$ , computadas analiticamente, apresentaram comportamentos qualitativos e quantitativos muito próximos das derivadas numéricas, mostrando a mesma tendência de convergência e concavidade.

A boa correspondência qualitativa entre os modelos foi atestada novamente através da confecção dos planos representativos de condições iniciais  $(e_1, e_2)$  tomados para diferentes razões de massa. Em todos os casos, nosso modelo reproduziu muito bem os resultados esperados (semi-analítico), no que tange a simples inspeção visual das configurações apresentadas pelas curvas.

Como esta última etapa do trabalho tratava somente da comparação entre as soluções obtidas pelo modelo desenvolvido e o modelo padrão, mais estudos acerca do espaço de configurações do sistema considerado não foram empregados.

Na seção final do capítulo de resultados, realizamos um estudo básico de alguns sistemas conhecidos da literatura, próximos a ressonância nominal 3:1. Somente para aqueles sistemas de parâmetros físicos bem determinados, realizamos a transformação dos elementos orbitais astrocêntricos para o caso de um sistema de referência de Jacobi, utilizando as equações derivadas no Apêndice C deste trabalho. Construimos os gráficos de  $n_1/n_2$  vs  $e_{maior}$ , e dos critérios teóricos estabelecidos anteriormente, definimos os regimes de ressonância dos pares (interna/externa). Os mesmos sistemas foram apresentados para um gráfico de  $m_2/m_1$  vs  $e_2$ .

Entendemos que o objetivo do trabalho foi bem contemplado: desenvolvemos uma

ferramenta analítica, capaz de reproduzir de forma viável e satisfatória o Hamiltoniano para longos períodos de um sistema ressonante de três corpos coplanar, utilizando-nos do conjunto canônico de variáveis de Jacobi. Ao final de nosso trabalho, vislumbramos algumas possibilidades de continuidade:

- Aplicação de nosso modelo ao estudo da dinâmica ressonante de sistemas aproximadamente coplanares em quase-ressonâncias de movimentos médios. Por lidarmos com variáveis de Jacobi, abre-se a possibilidade para trabalhar com sistemas de estrelas binárias, por exemplo.
- A partir das teorias canônicas de perturbação, desenvolver um modelo analítico de Segunda Ordem em massa para o problema planar.
- Extensão para o caso tri-dimensional (aumentando o número de graus de liberdade do problema).

## Referências Bibliográficas

- Alves A. J., Michtchenko T. A., Tadeu dos Santos M., Dynamics of the 3/1 planetary mean-motion resonance: an application to the HD60532 b-c planetary system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2016, vol. 124, p. 311
- Andoyer H., *Cours de mecanique celeste*, 1923
- Beaugé C., On a Global Expansion of the Disturbing Function in the Planar Elliptic Restricted Three-Body Problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1996, vol. 64, p. 313
- Beaugé C., Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., , 2007 Planetary Masses and Orbital Parameters from Radial Velocity Measurements. p. 1
- Beaugé C., Michtchenko T. A., Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system, *MNRAS*, 2003, vol. 341, p. 760
- Bowman F., *Introduction to Bessel Functions*. Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 1958
- Branham Jr. R. L., Recursive calculation of Hansen coefficients, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1990, vol. 49, p. 209
- Breiter S., Métris G., Vokrouhlický D., Generalized Hansen Coefficients, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2004, vol. 88, p. 153
- Broucke R., Smith G., Expansion of the Planetary Disturbing Function, *Celestial Mechanics*, 1971, vol. 4, p. 490

- Brouwer D., Clemence G. M., *Methods of celestial mechanics*, 1961
- Brown E. W., The development of the disturbing function with large values of the ratio of the distances, *MNRAS*, 1932, vol. 92, p. 224
- Brozović M., Showalter M. R., Jacobson R. A., Buie M. W., The orbits and masses of satellites of Pluto, *Icarus*, 2015, vol. 246, p. 317
- Callegari Jr. N., Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Dynamics of Two Planets in the 2/1 Mean-Motion Resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2004, vol. 89, p. 201
- Cayley A., *Tables of the Developments of Functions in the Theory of Elliptic Motion*, *MmRAS*, 1861, vol. 29, p. 191
- Cefola P., ed., 1977 *On the Hansen coefficients*
- Chebotarev G., *Analytical and numerical methods of celestial mechanics: Modern analytic and computational methods in science and mathematics*, American Elsevier Pub. Co., 1967
- Cherniack J. R., *Computation of Hansen Coefficients*, *SAO Special Report*, 1972, vol. 346
- da Silva Fernandes S., Expansions of  $(r/a)^m \cos jv$  and  $(r/a)^m \sin jv$  to High Eccentricities, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1996, vol. 63, p. 375
- Duboshin G., *Celestial mechanics: basic problems and methods*. No. v. 1 in *Celestial Mechanics: Basic Problems and Methods*, Foreign Technology Division, 1969
- Ferraz-Mello S., *Dynamics of the Galilean satellites.*, 1983
- Ferraz-Mello S., Averaging the elliptic asteroidal problem near a first-order resonance, *AJ*, 1987, vol. 94, p. 208
- Ferraz-Mello S., The convergence domain of the Laplacian expansion of the disturbing function, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1994, vol. 58, p. 37
- Ferraz-Mello S., ed., 2007 *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance* vol. 345 of *Astrophysics and Space Science Library*

- Ferraz-Mello S., Tidal synchronization of close-in satellites and exoplanets. A rheophysical approach, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2013, vol. 116, p. 109
- Ferraz-Mello S., Tidal synchronization of close-in satellites and exoplanets: II. Spin dynamics and extension to Mercury and exoplanet host stars, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2015, vol. 122, p. 359
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., , 2006 Regular motions in extra-solar planetary systems. Springer p. 255
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., Callegari N., Extrasolar Planetary Systems. In *Chaos and Stability in Planetary Systems* , vol. 683 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 2005, p. 219
- Ford E. B., Kozinsky B., Rasio F. A., Secular Evolution of Hierarchical Triple Star Systems, *ApJ*, 2000, vol. 535, p. 385
- Giacaglia G. E. O., Hansen Coefficients and Generalized Spherical Harmonics, *PASJ*, 1987, vol. 39, p. 171
- Hadjidemetriou J. D., Resonant Periodic Motion and the Stability of Extrasolar Planetary Systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2002, vol. 83, p. 141
- Hamilton W. R., XV. On a general method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1834, vol. 124, p. 247
- Hansen M., Note sur la théorie des perturbations planétaires Par M. Hansen, *Astronomische Nachrichten*, 1838, vol. 15, p. 201
- Hill G. W., On the development of the perturbative function in periodic series., 1875
- Holman M. J., Murray N. W., Chaos in High-Order Mean Resonances in the Outer Asteroid Belt, *AJ*, 1996, vol. 112, p. 1278
- Hughes S., The Computation of Tables of Hansen Coefficients, *Celestial Mechanics*, 1981, vol. 25, p. 101

- Izsak I. G., Gerard J. M., Efimba R., Barnett M. P., Construction of Newcomb Operators on a Digital Computer, SAO Special Report, 1964, vol. 140
- Kamel O. M., On the expansion of planetary disturbing function. I - Outline, Earth Moon and Planets, 1988, vol. 42, p. 221
- Klioner S. A., Numerical Fourier Expansions of the Planetary Disturbing Function, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2000, vol. 77, p. 215
- Laskar J., Analytical framework in Poincaré variables for the motion of the solar system.. In Predictability, Stability, and Chaos in N-Body Dynamical Systems , 1991, p. 93
- Laskar J., Note on the Generalized Hansen and Laplace Coefficients, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2005, vol. 91, p. 351
- Laskar J., Boué G., Explicit expansion of the three-body disturbing function for arbitrary eccentricities and inclinations, A&A, 2010, vol. 522, p. A60
- Laskar J., Robutel P., Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1995, vol. 62, p. 193
- Le Verrier U.-J., Recherches astronomiques: Chapitre IV. - Développement de la fonction qui sert de base au calcul des perturbations des mouvements des planètes., Annales de l'Observatoire de Paris, 1855, vol. 1, p. 258
- Lee M. H., Peale S. J., Secular Evolution of Hierarchical Planetary Systems, ApJ, 2003, vol. 592, p. 1201
- Lemos N., Mecânica Analítica. LIVRARIA DA FISICA, 2007
- Mayor M., Queloz D., A Jupiter-mass companion to a solar-type star, Nature, 1995, vol. 378, p. 355
- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2006, vol. 94, p. 411

- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - I. Systems with a more massive outer planet, MNRAS, 2008a, vol. 387, p. 747
- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - II. Systems with a more massive inner planet, MNRAS, 2008b, vol. 391, p. 215
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System, Icarus, 2001, vol. 149, p. 357
- Murray C. D., Dermott S. F., Solar System Dynamics, 2000
- Murray N., Paskowitz M., Holman M., Eccentricity Evolution of Migrating Planets, ApJ, 2002, vol. 565, p. 608
- Newcomb S., A development of the perturbative function in cosines of multiples of the mean anomalies and of angles of multiples of the mean anomalies and of angles between the perihelia and common node and in powers of the eccentricities and mutual inclination., [United States. Nautical Almanac Office. Astronomical paper ; v.5, pt. 1 (1895)], [Washington : U.S. Nautical Almanac Office, 1895], p. 1-48 ; 30 X 23 cm., 1895, vol. 5, p. 1
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., Numerical Recipes in FORTRAN; The Art of Scientific Computing 2nd edn. Cambridge University Press New York, NY, USA, 1993
- Sadov S. Y., Analytic properties of Hansen coefficients, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2008, vol. 100, p. 287
- Süli Á., Érdi B., Pál A., A New Method to Determine the Derivatives of the Laplace Coefficients, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2004, vol. 88, p. 259
- Thornton S., Marion J., Classical Dynamics of Particles and Systems. Brooks/Cole, 2004
- Tisserand F., Memoire sur le developpement de la fonction perturbatrice dans le CAS OO l'inclinaison mutuelle des orbites est considerable, Annales de l'Observatoire de Paris, 1885, vol. 18, p. C.1

Yokoyama T., Expansion of the disturbing function for high eccentricity and large amplitude of libration, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1994, vol. 60, p. 387

# Apêndice



## Apêndice A

---

### Equações de Movimento em Coordenadas de Jacobi para o Problema de Três Corpos

A seguir, equacionamos o problema de três corpos não-restrito, através do formalismo newtoniano, utilizando a ideia do sistema de coordenadas de Jacobi.

Vamos partir do problema escrito para o sistema astrocêntrico. Seja  $m_0$  a massa do corpo central,  $m_1$  e  $m_2$  as massas dos corpos orbitantes. Em relação ao corpo  $m_0$ , definimos os vetores de posição  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , conforme ilustrado a seguir.

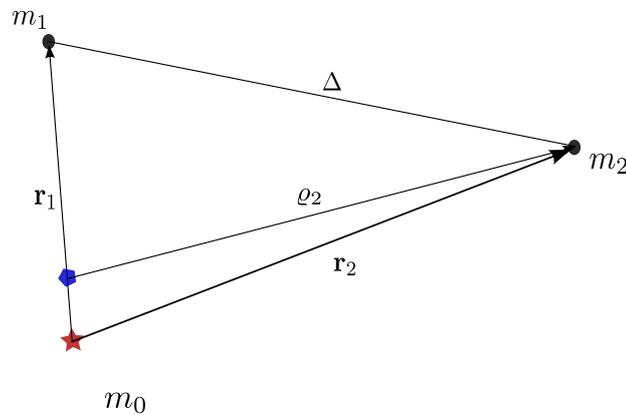


Figura A.1: Problema de três corpos não-restrito. Os vetores  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  indicam as posições astrocêntricas de  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente;  $\mathbf{q}_2$  é o vetor posição de  $m_2$  no sistema de Jacobi.

Na figura acima,  $\Delta$  representa a distância entre os corpos orbitantes:  $\Delta = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Introduzimos os vetores posição em coordenadas de Jacobi,  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$ . Pela definição:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{r}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{r}_1, \quad (\text{A.1})$$

e definimos as quantidades  $\varepsilon_1 = m_1/(m_0+m_1)$  e  $\varepsilon_2 = m_0/(m_0+m_1)$ . Invertendo as relações acima, escrevemos os vetores astrocêntricos em termos das coordenadas de Jacobi:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{q}_2 + \varepsilon_1 \mathbf{q}_1 \quad (\text{A.2})$$

Facilmente, vemos que  $\Delta = |\mathbf{q}_2 - \varepsilon_2 \mathbf{q}_1|$ .

Vamos escrever as equações de movimento das massas  $m_1$  e  $m_2$ , em coordenadas astrocêntricas. Temos que:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathcal{G}(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = \mathcal{G}m_2 \left[ \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\Delta^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 + \mathcal{G}(m_0 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = \mathcal{G}m_1 \left[ \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\Delta^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right] \quad (\text{A.4})$$

onde identificamos, no lado esquerdo, a parcela da aceleração que é devida ao movimento kepleriano (problema de dois corpos), e do lado direito da igualdade temos os termos perturbativos.

Agora, vamos reescrever as equações anteriores, em termos dos vetores  $\mathbf{q}_i$ , e dos respectivos módulos  $\rho_i = |\mathbf{q}_i|$ ,  $i = 1, 2$ . Para a massa  $m_1$ , a transformação vem direta:

$$\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathcal{G}(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{q}_1}{\rho_1^3} = \mathcal{G}m_2 \left[ \frac{\mathbf{q}_2 - \varepsilon_2 \mathbf{q}_1}{\Delta^3} - \frac{\mathbf{q}_2 + \varepsilon_1 \mathbf{q}_1}{\Delta_{02}^3} \right], \quad (\text{A.5})$$

onde  $\Delta_{02} = |\mathbf{r}_2|$ . No caso da massa  $m_2$ , temos:

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 + \varepsilon_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathcal{G}(m_0 + m_2) \frac{\mathbf{q}_2 + \varepsilon_1 \mathbf{q}_1}{\Delta_{02}^3} = -\mathcal{G}m_1 \left[ \frac{\mathbf{q}_2 - \varepsilon_2 \mathbf{q}_1}{\Delta^3} + \frac{\mathbf{q}_1}{\rho_1^3} \right] \quad (\text{A.6})$$

Se abrimos todos os parênteses da equação anterior, chegaremos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_2 + \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{m_0 + m_1} \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta_{02}^3} \right] \mathbf{q}_2 - \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{(m_0 + m_1)^2} \left[ \frac{m_0}{\Delta^3} + \frac{m_1}{\Delta_{02}^3} \right] \mathbf{q}_1 + \\ \mathcal{G} \left[ \frac{m_0 + m_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta^3} \right] \mathbf{q}_2 + \frac{\mathcal{G}m_1}{m_0 + m_1} \left[ \frac{m_0 + m_1}{\Delta_{02}^3} - \frac{m_0}{\Delta^3} \right] \mathbf{q}_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Separando os termos que multiplicam  $\mathbf{q}_1$  daqueles que multiplicam  $\mathbf{q}_2$ , chega-se a:

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 + \frac{\mathcal{G}(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1} \left[ \frac{m_1}{\Delta^3} + \frac{m_0}{\Delta_{02}^3} \right] \mathbf{q}_2 + \frac{\mathcal{G}m_0 m_1}{m_0 + m_1} \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_0 + m_1} \left[ \frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right] \mathbf{q}_1 \quad (\text{A.8})$$

Se definimos as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathcal{G}(m_0 + m_1); & \tilde{\mu}_2 &= \frac{\mathcal{G}(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1}, \\ \beta_1 &= \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \end{aligned}$$

podemos, finalmente, escrever as equações de movimento de Newton, em termos das coordenadas de Jacobi:

$$\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mu_1 \frac{\mathbf{q}_1}{\rho_1^3} = -\frac{\mathcal{G}m_2}{m_0 + m_1} \left[ \frac{m_0}{\Delta^3} + \frac{m_1}{\Delta_{02}^3} \right] \mathbf{q}_1 + \mathcal{G}m_2 \left[ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta_{02}^3} \right] \mathbf{q}_2, \quad (\text{A.9})$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 + \tilde{\mu}_2 \left[ \frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta^3} \right] \mathbf{q}_2 = -\tilde{\mu}_2 \beta_1 \left[ \frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right] \mathbf{q}_1 \quad (\text{A.10})$$

Novamente, o lado esquerdo apresenta a parcela que reduz ao movimento kepleriano, e do lado direito tem-se os termos devidos à perturbação. Se denominamos  $F_1$  e  $F_2$  as perturbações sofridas por  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, então:

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_1 + \mu_1 \frac{\boldsymbol{q}_1}{\rho_1^3} = F_1, \quad \ddot{\boldsymbol{q}}_2 + \tilde{\mu}_2 \left[ \frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta^3} \right] \boldsymbol{q}_2 = F_2 \quad (\text{A.11})$$

Mais além, identificamos as partes direta e indireta das perturbações:  $F_1 = F_{1,d} + F_{1,i}$  e  $F_2 = F_{2,d} + F_{2,i}$ .

$$F_{1,d} = \frac{\mathcal{G}m_2}{\Delta^3} (\boldsymbol{q}_2 - \varepsilon_2 \boldsymbol{q}_1); \quad F_{2,d} = \tilde{\mu}_2 \beta_1 \frac{\boldsymbol{q}_1}{\Delta^3} \quad (\text{A.12})$$

$$F_{1,i} = -\frac{\mathcal{G}m_2}{\Delta_{02}^3} (\boldsymbol{q}_2 + \varepsilon_1 \boldsymbol{q}_1); \quad F_{2,i} = -\tilde{\mu}_2 \beta_1 \frac{\boldsymbol{q}_1}{\Delta_{02}^3} \quad (\text{A.13})$$



## Expressões Explícitas das Derivadas

Apresentamos aqui as formas analíticas explícitas que foram utilizadas para o desenvolvimento das derivadas do potencial perturbador, conforme proposto através dos testes descritos no Capítulo 4, e através das quais obtivemos os resultados ali discutidos.

Trata-se de obter as derivadas parciais do Hamiltoniano médio  $\langle \mathcal{H} \rangle = \mathcal{H}_{\text{médio}}(e_1, e_2, \sigma_1, \Delta\varpi)$  em relação a excentricidade externa,  $e_2$ .

Primeiramente, apresentamos as derivadas implícitas de  $a_1$  e  $a_2$ .

$$\frac{\partial a_1}{\partial e_2} = -\frac{2}{\mu_1 \beta_1^2} \frac{rAM - \mathcal{K}\sqrt{1-e_2^2}}{(r\sqrt{1-e_1^2} - (1+r)\sqrt{1-e_2^2})^3} \frac{re_1(\mathcal{K}\sqrt{1-e_2^2} - rAM)}{\sqrt{1-e_1^2}} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial e_2} = \frac{\partial a_2}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial e_2} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial a_1} = \frac{(1+r)\beta_1}{\mu_2(r\beta_2)^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{a_1}} [(1+r)L_1 - \mathcal{K}] \quad (\text{B.3})$$

A derivada do fator  $\alpha$ :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial e_2} = \frac{1}{a_2^2} \left[ a_2 \frac{\partial a_1}{\partial e_2} - a_1 \frac{\partial a_2}{\partial e_2} \right] \quad (\text{B.4})$$

Os coeficientes de Laplace  $b_s^{(j)}$  são funções de  $\alpha$  também, bem como as  $n$ -ésimas derivadas  $D^n$ . Em nosso problema, o fator  $\alpha$  aparece multiplicado por uma constante  $\kappa$ . Temos então:

$$\frac{\partial}{\partial e_2} D^n b_s^{(j)}(\kappa\alpha) = \frac{\partial}{\partial e_2} \frac{\partial b_s^{(j)}(\kappa\alpha)}{\partial(\kappa\alpha)} = \frac{\partial}{\partial(\kappa\alpha)} \frac{\partial b_s^{(j)}(\kappa\alpha)}{\partial(\kappa\alpha)} \kappa \frac{\partial \alpha}{\partial e_2} = D^{n+1} b_s^{(j)}(\kappa\alpha) \kappa \frac{\partial \alpha}{\partial e_2} \quad (\text{B.5})$$

Escrevemos a derivada do potencial perturbador como

$$\frac{\partial}{\partial e_2} \langle \mathcal{R} \rangle = \frac{\partial}{\partial e_2} (\mathcal{R}_D + \mathcal{R}_I) = \frac{\partial}{\partial e_2} (\mathcal{R}_D^{(sec)} + \mathcal{R}_D^{(res)} + \mathcal{R}_I^{(sec)} + \mathcal{R}_I^{(res)}) \quad (\text{B.6})$$

Para a parte direta secular, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_2} \mathcal{R}_D^{(sec)} &= -\frac{\mathcal{G}m_2(m_0 + m_1)}{a_2^2} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} + \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2} \sum_{n,k,j} \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{j,0}\right) \quad (\text{B.7}) \\ &\times \left[ \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} (\varepsilon_2 \alpha)^n X_0^{n-k,j}(e_1) X_0^{k-n-1}(e_2) \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) - n \varepsilon_2^n \alpha^{n-1} X_0^{n-k,j}(e_1) X_0^{k-n-1,j}(e_2) \right. \\ &\times \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) + \tilde{\alpha}^n \left( X_0^{n-k,j}(e_1) \frac{\partial}{\partial e_2} X_0^{k-n-1,j}(e_2) + X_0^{n-k,j}(e_1) X_0^{k-n-1,j}(e_2) \frac{\partial}{\partial e_2} \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \right) \left. \right] \\ &\times \cos j \Delta \varpi \end{aligned}$$

A parte indireta secular possui a forma análoga a anterior, com a presença do fator  $(-1)^j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_2} \mathcal{R}_I^{(sec)} &= \frac{\mathcal{G}m_0m_2}{a_2} \sum_{n,k,j} \frac{(-1)^{k+j}}{n!} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{j,0}\right) \left[ \frac{(\varepsilon_1 \alpha)^n}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} X_0^{n-k,j}(e_1) \quad (\text{B.8}) \right. \\ &\times X_0^{k-n-1,j}(e_2) D'^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha') - n \varepsilon_1^n \alpha^{n-1} \frac{\partial \alpha}{\partial e_2} X_0^{n-k,j}(e_1) X_0^{k-n-1,j}(e_2) D'^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha') + \alpha'^n \left( X_0^{n-k,j}(e_1) \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial e_2} X_0^{k-n-1,j}(e_2) D'^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha') + X_0^{n-k,j}(e_1) X_0^{k-n-1,j}(e_2) \frac{\partial}{\partial e_2} D'^n b_{1/2}^{(j)}(\alpha') \right) \left. \right] \cos j \Delta \varpi \end{aligned}$$

A derivada para o termo ressonante na parte direta é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_2} \mathcal{R}_D^{(res)} &= \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2} \sum_{N,n,k} \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} \left( \left( \frac{\tilde{\alpha}^n}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial e_2} - n \varepsilon_2^n \alpha^{n-1} \frac{\partial \alpha}{\partial e_2} \right) \left[ X_{Np}^{n-k,0}(e_1) X_{N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \quad (\text{B.9}) \right. \right. \\ &\times \tilde{D}^n b_{1/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) \cos \varphi_0 + \sum_j \left( X_{-Np}^{n-k,j}(e_1) X_{-N(p+q)}^{k-n-1}(e_2) \cos \varphi_1 + X_{Np}^{n-k,j}(e_1) X_{N(p+q)}^{k-n-1}(e_2) \cos \varphi_2 \right) \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \left. \right] \\ &- \tilde{\alpha}^n \left[ \left( X_{Np}^{n-k,j}(e_1) \frac{\partial}{\partial e_2} X_{N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \tilde{D}^n b_{1/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) + X_{Np}^{n-k,j}(e_1) X_{N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \frac{\partial}{\partial e_2} \tilde{D}^n b_{1/2}^{(0)}(\tilde{\alpha}) \right) \cos N \varphi_0 + \right. \\ &\sum_j \left\{ \left( X_{-Np}^{n-k,j}(e_1) \frac{\partial}{\partial e_2} X_{-N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \cos \varphi_1 + X_{Np}^{n-k,j}(e_1) \frac{\partial}{\partial e_2} X_{N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \cos \varphi_2 \right) \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) + \right. \\ &\left. \left. \left( X_{-Np}^{n-k,j}(e_1) X_{-N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \cos \varphi_1 + X_{Np}^{n-k,j}(e_1) X_{N(p+q)}^{k-n-1,j}(e_2) \cos \varphi_2 \right) \frac{\partial}{\partial e_2} \tilde{D}^n b_{1/2}^{(j)}(\tilde{\alpha}) \right\} \right] \end{aligned}$$

A parte indireta é análoga, com a presença do fator  $(-1)^j$  e do fator  $\alpha'$  ao invés de  $\tilde{\alpha}$ .

## Transformação de Elementos Orbitais

Tomemos um sistema de três massa pontuais,  $m_0$ ,  $m_1$  e  $m_2$ , sobre o mesmo plano orbital, interagindo através da ação da força gravitacional. Assumiremos que conhecemos os elementos orbitais osculadores astrocêntricos, definidos em relação ao corpo central  $m_0$ :  $a_i^{(A)}$ ,  $e_i^{(A)}$ ,  $M_i^{(A)}$ ,  $\varpi_i^{(A)}$ ,  $i = 1, 2$ . Queremos encontrar as relações que expressam os elementos osculadores de Jacobi  $a_i^{(J)}$  e  $e_i^{(J)}$ , e de Poincaré,  $a_i^{(P)}$  e  $e_i^{(P)}$ , como funções dos primeiros elementos conhecidos.

Dados os semi-eixos maiores e excentricidades, conhece-se portanto os movimentos médios  $n_i^{(A)}$

$$n_i^{(A)} = \sqrt{\frac{\mu_i}{(a_i^{(A)})^3}}; \quad \mu_i = \mathcal{G}(m_0 + m_i), \quad (\text{C.1})$$

e os períodos orbitais,  $T_i^{(A)} = 2\pi/n_i^{(A)}$  de cada corpo.

### C.1 Equações para o sistema astrocêntrico

Sejam  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  os vetores de posição astrocêntrica das respectivas massas, e  $f_1^{(A)}$  e  $f_2^{(A)}$  as anomalias verdadeiras. A longitude verdadeira de cada corpo é dada então por  $l_i^{(A)} = f_i^{(A)} + \varpi_i^{(A)}$ . No desenvolvimento a seguir, consideramos sempre um sistema referenciado ao corpo central  $m_0$ . Para não carregar uma notação muito pesada, nos permitimos não indicar o índice superior  $(A)$  nos elementos.

Em coordenadas retangulares, podemos escrever:

$$\mathbf{r}_i = r_i[\cos l_i \hat{\mathbf{i}} + \sin l_i \hat{\mathbf{j}}], \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{r}_i[\cos l_i \hat{\mathbf{i}} + \sin l_i \hat{\mathbf{j}}] + r_i \dot{l}_i[-\sin l_i \hat{\mathbf{i}} + \cos l_i \hat{\mathbf{j}}] \quad (\text{C.3})$$

Do problema clássico de dois corpos, sabe-se que (Murray e Dermott, 2000)

$$r_i = \frac{a_i(1 - e_i^2)}{1 + e_i \cos f_i}, \quad (\text{C.4})$$

$$\dot{r}_i = \frac{n_i a_i}{\sqrt{1 - e_i^2}} e_i \sin f_i \quad (\text{C.5})$$

Uma vez que consideramos os elementos osculadores das órbitas,  $\dot{l}_i = d(f_i + \varpi_i)/dt = \dot{f}_i$  é dado por

$$\dot{f}_i = \frac{n_i a_i}{r_i \sqrt{1 - e_i^2}} (1 + e_i \cos f_i) \quad (\text{C.6})$$

Da fórmula clássica *vis viva*, tem-se o modulo da velocidade orbital dos corpos

$$v_i^2 = \mu_i \left( \frac{2}{r_i} + \frac{1}{a_i} \right) \quad (\text{C.7})$$

Abaixo, seguem alguns resultados necessários para o desenvolvimento das transformações:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = r_1 r_2 \cos \Phi, \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i = r_i \dot{r}_i, \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = r_1 \dot{r}_2 \cos \Phi + r_1 r_2 \dot{f}_2 \sin \Phi, \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = r_2 \dot{r}_1 \cos \Phi - r_1 r_2 \dot{f}_1 \sin \Phi, \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (\dot{r}_1 \dot{r}_2 + r_1 r_2 \dot{f}_1 \dot{f}_2) \cos \Phi + (\dot{r}_1 r_2 \dot{f}_2 - r_1 \dot{r}_2 \dot{f}_1) \sin \Phi, \quad (\text{C.12})$$

onde  $\Phi = l_1 - l_2 = f_1 - f_2 + \Delta\varpi$ .

## C.2 Determinação das anomalias verdadeiras

Apresentamos dois caminhos possíveis para o cálculo das anomalias verdadeiras  $f_i$  (determiná-las se faz necessário, conforme vemos nas equações apresentadas acima). Ambas as abordagens podem facilmente ser implementadas em linguagens computacionais, e são resultados de diferentes maneiras de se trabalhar a equação de Kepler

$$M = E - e \sin E, \quad (\text{C.13})$$

onde  $E$  denota a anomalia excêntrica.

### C.2.1 Expansões elípticas: funções de Bessel

O primeiro método é puramente analítico. Se reescrevemos a equação (C.2) como  $E - M = e \sin E$ , vemos que  $E - M$  é uma função periódica ímpar, e pode portanto ser expandida em série de senos de Fourier

$$e \sin E = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e) \sin kM, \quad (\text{C.14})$$

onde os coeficientes de expansão  $c_k(e)$  são dados por

$$c_k(e) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e \sin E \sin kM \, dM \quad (\text{C.15})$$

Usando (C.2) para escrever  $d(e \sin E) = d(E - M)$  e reescrevendo a integral, chega-se a seguinte relação (Murray e Dermott, 2000):

$$c_k(e) = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kE - ke \sin E) \, dE = \frac{2}{k} J_k(ke), \quad (\text{C.16})$$

onde

$$J_k(ke) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ke - ke \sin E) \, dE \quad (\text{C.17})$$

é a função de Bessel de primeira espécie (Bowman, 1958). Para  $m \geq 0$ , é possível tomar a seguinte forma analítica:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \quad (\text{C.18})$$

Pode-se então reescrever a equação de Kepler, usando os últimos resultados:

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM \quad (\text{C.19})$$

Em (Brouwer e Clemence, 1961) encontram-se as derivações das relações abaixo:

$$\sin f = 2\sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{d}{de} J_k(ke) \sin kM \quad (\text{C.20})$$

$$\cos f = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM \quad (\text{C.21})$$

As equações acima são expressões analíticas que podem ser aplicadas nos resultados da seção anterior.

### C.2.2 Soluções iterativas da equação de Kepler

A equação (C.2) é uma equação transcendental. Isto significa que ela não é passível de ser expressa através de funções elementares, pois não possui uma solução exata: para obter suas raízes, se faz necessário recorrer ao cálculo numérico.

Em (Murray e Dermott, 2000) é apresentado um método iterativo bastante simples para obter a solução:

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i \quad i = 0, 1, \dots, \quad (\text{C.22})$$

onde toma-se  $E_0 = M$  como a primeira aproximação. As iterações podem ser realizadas até que um determinado critério de precisão seja satisfeito: por exemplo, que a diferença  $\delta E = E_{i+1} - E_i$  seja inferior a um limite previamente estabelecido.

Conhecendo a anomalia excêntrica  $E$ , pode-se determinar univocamente a anomalia verdadeira  $f$ , através de:

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \quad (\text{C.23})$$

O módulo do raio vetor  $\mathbf{r}$  é conhecido através da relação

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (\text{C.24})$$

As quantidades  $\dot{r}$  e  $\dot{f}$  podem ser obtidas aplicando os valores encontrados para  $f$ , dentro das respectivas equações apresentadas na seção (C.1).

### C.3 Equações para o sistema de Jacobi

Sejam  $\boldsymbol{\rho}_1$  e  $\boldsymbol{\rho}_2$  os vetores de posição astrocêntrica das respectivas massas. Em termos das quantidades conhecidas, tem-se:

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{r}_1, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \mathbf{v}_1; \quad (\text{C.25})$$

$$\boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{r}_2 - \gamma \mathbf{r}_1, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 = \mathbf{v}_2 - \gamma \mathbf{v}_1; \quad (\text{C.26})$$

onde  $\gamma = m_1/(m_0 + m_1)$

Há que se ter atenção quando tratamos dos módulos das quantidade acima. Temos que:

$$\rho_1 = |\boldsymbol{\rho}_1| = \sqrt{\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1} = r_1 \Rightarrow \dot{\rho}_1 = \dot{r}_1, \quad v_1^{(J)} = |\dot{\boldsymbol{\rho}}_1| = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_1} = v_1 \quad (\text{C.27})$$

Para obter as expressões da variação temporal das segundas quantidades, atente-se:

$$\rho_2 = |\boldsymbol{\rho}_2| = [r_2^2 + \gamma^2 r_1^2 - 2\gamma \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_2]^{1/2}, \quad (\text{C.28})$$

$$\dot{\rho}_2 = \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{1}{\rho_2} \left[ r_2 \dot{r}_2 + \gamma^2 r_1 \dot{r}_1 - \gamma [(\dot{r}_1 r_2 + r_1 \dot{r}_2) \cos \Phi - r_1 r_2 (\dot{f}_1 - \dot{f}_2) \sin \Phi] \right], \quad (\text{C.29})$$

e a velocidade  $d\boldsymbol{\rho}_2/dt$

$$v_2^{(J)} = |\dot{\boldsymbol{\rho}}_2| = [v_2^2 + \gamma^2 v_1^2 - 2\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2]^{1/2} \quad (\text{C.30})$$

Nas equações anteriores,  $\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_2 = \rho_1 \rho_2 \cos \vartheta$ , onde  $\vartheta$  vem a ser o ângulo entre os vetores posição  $\boldsymbol{\rho}_1$  e  $\boldsymbol{\rho}_2$ . Em termos das quantidade conhecidas:

$$\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 - \gamma r_1^2 = r_1 r_2 \cos \Phi - \gamma r_1^2 \quad (\text{C.31})$$

Algumas relações pertinentes ao problema:

$$\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \quad (\text{C.32})$$

$$\boldsymbol{\rho}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - \gamma (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + \gamma^2 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \quad (\text{C.33})$$

Obtivemos todas as relações acima em termos de quantidades que assumimos serem conhecidas, através das equações dadas na seção C.1.

#### C.4 Transformação dos elementos orbitais: Astrocêntrico para Jacobi

Os semi-eixos maiores e excentricidades podem ser obtidos através das relações clássicas do problema de dois corpos (Ferraz-Mello et al., 2005):

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - r w^2}, \quad (\text{C.34})$$

$$e = \sqrt{\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})^2}{\mu a}}, \quad (\text{C.35})$$

onde usamos a velocidade definida no referencial de movimento kepleriano

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{p}}{\beta} \quad w = |\mathbf{w}|, \quad (\text{C.36})$$

e  $\beta_i = \mathcal{M} m_i / (\mathcal{M} + m_i)$ , com  $\mathcal{M}$  designando a massa do corpo central (o qual, atente-se, nem sempre será o corpo  $m_0$ , como podemos ver na formulação jacobiana). O vetor  $\mathbf{p}$  define o momento linear conjugado a coordenada  $\mathbf{r}$ .

No referencial de Jacobi, as relações que definem os elementos orbitais são reescritas como:

$$a_i^{(J)} = \frac{\tilde{\mu}_i \rho_i}{2\tilde{\mu}_i - \rho_i w_i^2}, \quad \tilde{\mu}_i = \mathcal{G} \sigma_i; \quad (\text{C.37})$$

$$e_i^{(J)} = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_i}{a_i^{(J)}}\right)^2 + \frac{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{w}_i)}{\tilde{\mu}_i a_i^{(J)}}}; \quad (\text{C.38})$$

$$\sigma_i = \sum_{k=0}^i m_k \quad (\text{C.39})$$

Para as coordenadas de Jacobi, tem-se

$$\mathbf{w}_k^{(J)} = \frac{\sigma_k}{m_k \sigma_{k-1}} \boldsymbol{\pi}_k, \quad (\text{C.40})$$

onde  $\boldsymbol{\pi}_k$  é o vetor momento conjugado à respectiva coordenada  $\boldsymbol{\rho}_k$ . Na seção 2.4 do capítulo 2, apresentamos as expressões que fornecem os momentos conjugados às coordenadas de Jacobi, em termos dos momentos dados em um referencial baricêntrico inicial. Observando as relações, é possível obter que

$$\mathbf{w}_k^{(J)} = \dot{\boldsymbol{\rho}}_k \quad (\text{C.41})$$

Temos, finalmente:

$$a_1^{(J)} = a_1^{(A)}, \quad e_1^{(J)} = e_1^{(A)}; \quad (\text{C.42})$$

$$a_2^{(J)} = \frac{\tilde{\mu}_2 \rho_2}{2\tilde{\mu}_2 - \rho_2 w_2^{(J)}}, \quad e_2^{(J)} = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_2}{a_2^{(J)}}\right)^2 + \frac{(\boldsymbol{\rho}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_2)^2}{\tilde{\mu}_2 a_2^{(J)}}} \quad (\text{C.43})$$

### C.5 Equações para o sistema de Poincaré

Já conhecemos a formulação de coordenadas de Poincaré, na qual a posição do  $i$ -ésimo corpo é astrocêntrica, enquanto o momento conjugado à respectiva coordenada é baricêntrico. Sejam  $\boldsymbol{\zeta}_1$  e  $\boldsymbol{\zeta}_2$  os vetores de posição utilizando as coordenadas de Poincaré, e os respectivos momentos conjugados definidos por  $\boldsymbol{\Pi}_1$  e  $\boldsymbol{\Pi}_2$ .

$$\boldsymbol{\zeta}_1 = \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\Pi}_1 = \mathbf{P}_1; \quad (\text{C.44})$$

$$\boldsymbol{\zeta}_2 = \mathbf{r}_2, \quad \boldsymbol{\Pi}_2 = \mathbf{P}_2, \quad (\text{C.45})$$

onde  $\mathbf{P}_i = m_i \mathbf{V}_i$  é o momento no referencial baricêntrico ( $\mathbf{V}_i$  denota a velocidade baricêntrica do  $i$ -ésimo corpo). Vale, então, a relação

$$\boldsymbol{\Pi}_0 + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 = \mathbf{0} \quad (\text{C.46})$$

Retomando as expressões derivadas para os momentos canônicos de Jacobi, apresentadas na seção 2.4 do capítulo 2, é fácil encontrar, de (2.4), que

$$\mathbf{P}_1 = \boldsymbol{\pi}_1 - \gamma \boldsymbol{\pi}_2, \quad (\text{C.47})$$

$$\mathbf{P}_2 = \boldsymbol{\pi}_2 \quad (\text{C.48})$$

Usando a definição de velocidade kepleriana, temos que

$$\mathbf{w}_i^{(J)} = \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \frac{\boldsymbol{\pi}_i}{\tilde{\beta}_i}, \quad \tilde{\beta}_i = \frac{\sigma_i}{m_i \sigma_{i-1}}$$

Dos resultados derivados nas seções anteriores, obtemos

$$\mathbf{w}_2^{(J)} = \frac{\boldsymbol{\pi}_2}{\tilde{\beta}_2} = \frac{(m_0 + m_1 + m_2)}{m_2(m_0 + m_1)} m_2 \mathbf{V}_2 = \mathbf{v}_2 - \gamma \mathbf{v}_1 \quad (\text{C.49})$$

e, em termos das velocidades astrocêntricas, tem-se

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{M} [(m_0 + m_1) \mathbf{v}_2 - m_1 \mathbf{v}_1], \quad (\text{C.50})$$

$M = m_0 + m_1 + m_2$ . Fazendo analogamente para  $\mathbf{V}_1$ , chega-se a

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{M(m_0 + m_1)} [(m_0 M + m_1 m_2) \mathbf{v}_1 - (m_0 + m_1) m_2 \mathbf{v}_2] \quad (\text{C.51})$$

Da relação de conservação (C.46), facilmente tem-se

$$\mathbf{V}_0 = -\frac{1}{m_0} (m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2) \quad (\text{C.52})$$

No senso das coordenadas de Poincaré, as definições das velocidades keplerianas ficam

$$\mathbf{w}_1^{(P)} = \frac{m_1}{\beta_1} \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{w}_2^{(P)} = \frac{m_2}{\beta_2} \mathbf{V}_2 \quad (\text{C.53})$$

Os módulos das velocidades baricêntricas serão dados por:

$$V_1 = |\mathbf{V}_1| = \sqrt{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1} = \frac{1}{M(m_0 + m_1)} \left[ (m_0 M + m_1 m_2)^2 v_1^2 + m_2^2 (m_0 + m_1)^2 v_2^2 - 2m_2 (m_0 M + m_1 m_2) (m_0 + m_1) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \right], \quad (\text{C.54})$$

$$V_2 = |\mathbf{V}_2| = \sqrt{\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2} = \frac{1}{M} \left[ (m_0 + m_1)^2 v_2^2 + m_1^2 v_1^2 - 2m_1 (m_0 + m_1) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \right] \quad (\text{C.55})$$

Fornecemos abaixo alguns resultados úteis, em termos das quantidades conhecidas (astrocêntricas):

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}_1^{(P)} = \frac{m_1}{\beta_1} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{V}_1 = \frac{m_1}{M \beta_1 (m_0 + m_1)} \left[ (m_0 M + m_1 m_2) \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - m_2 (m_0 + m_1) \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \right] \quad (\text{C.56})$$

$$\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{w}_2^{(P)} = \frac{m_2}{\beta_2} \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{V}_2 = \frac{m_2}{M \beta_2} \left[ (m_0 + m_1) \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - m_1 \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \right] \quad (\text{C.57})$$

## C.6 Transformação dos elementos orbitais: Astrocêntrico para Poincaré

Usando as expressões de (C.35), podemos calcular os elementos orbitais de Poincaré (ou elementos astrocêntricos canônicos (Ferraz-Mello et al., 2006)):

$$a_1^{(P)} = \frac{\mu_1 r_1}{2\mu_1 - r_1 w_1^{(P)2}} = \frac{\mu_1 \beta_1^2 r_1}{2\mu_1 \beta_1^2 - m_1^2 r_1 V_1^2}, \quad (\text{C.58})$$

$$e_1^{(P)} = \sqrt{\left(1 - \frac{r_1}{a_1^{(P)}}\right)^2 + \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}_1^{(P)})^2}{\mu_1 a_1^{(P)}}}, \quad (\text{C.59})$$

$$a_2^{(P)} = \frac{\mu_2 r_2}{2\mu_2 - r_2 w_2^{(P)2}} = \frac{\mu_2 \beta_2^2 r_2}{2\mu_2 \beta_2^2 - m_2^2 r_2 V_2^2}, \quad (\text{C.60})$$

$$e_2^{(P)} = \sqrt{\left(1 - \frac{r_2}{a_2^{(P)}}\right)^2 + \frac{(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{w}_2^{(P)})^2}{\mu_2 a_2^{(P)}}}, \quad (\text{C.61})$$