

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE ASTRONOMIA, GEOFÍSICA E CIÊNCIAS ATMOSFÉRICAS

***AValiação DE DISTORÇÕES DA REDE ALTIMÉTRICA  
FUNDAMENTAL NO SUL/SUDESTE DO BRASIL  
USANDO O GEÓIDE E GPS***

DEBORAH VALANDRO DE SOUZA

São Paulo  
2006

DEBORAH VALANDRO DE SOUZA

***AVALIAÇÃO DE DISTORÇÕES DA REDE ALTIMÉTRICA  
FUNDAMENTAL NO SUL/SUDESTE DO BRASIL USANDO O  
GEÓIDE E GPS***

Dissertação apresentada ao Instituto de  
Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas  
da Universidade de São Paulo para obtenção do  
título de mestre em Geofísica.

Orientador: Prof. Dr. Nelsi Côgo de Sá

São Paulo  
2006

*A verdadeira medida de um homem não é como ele se comporta em momentos de conforto e conveniência, mas como ele se mantém em tempos de controvérsia e desafio.*

*Martin Luther King*

## **AGRADECIMENTOS**

*Ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do IAG/USP, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.*

*Ao CNPQ, pela concessão de bolsa de estudo, e à FAPESP, pelo apoio financeiro na implantação da Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil.*

*Ao Professor Nelsi Côgo de Sá, pela compreensão, pela oportunidade de trabalhar neste projeto e pela sabedoria na orientação desta dissertação.*

*A todos os professores do Curso de Mestrado, pela competência, pelo o alto nível de qualidade do curso, por todo conhecimento propiciado e pela dedicação na tarefa de formar mestres e doutores.*

*Ao Técnico Clarino do Divino Vieira, sem o qual não seria possível coletar os dados deste trabalho.*

*Ao Técnico Edilson Geraldo Brito, pela atenção e constates consultorias prestadas.*

*A todos os professores do Curso de Engenharia de Agrimensura da Universidade Federal de Viçosa, principalmente aos meus primeiros orientadores Professor Antônio Simões Silva e Dalton Domingues Rodrigues por me propiciarem o contato inicial com o meio científico.*

*A meus amigos, por toda a amizade trocada, seja em momentos de risos, de chateações e frustrações como também nas horas de dificuldades.*

*A minha família (Mamãe, Papai, Dandinho, Juninho, Mamau, Lipe e Elaine), pelo carinho e confiança no meu sucesso.*

*A Deus, por permitir a conclusão desse Curso de Mestrado, tendo sempre me guiado e confortado em todas as etapas da minha vida.*

## RESUMO

A grande extensão do Brasil e o número reduzido de marégrafos condicionaram a implantação da Rede Altimétrica Fundamental do Brasil (RAFB) por meio de linhas, que ultrapassam alguns milhares de quilômetros. Mesmo seguindo os padrões de controle recomendados para redes altimétricas de referência, os erros sistemáticos, grosseiros e aleatórios são inevitáveis. Esses erros geram distorções e, conseqüentemente, deterioram a precisão da rede altimétrica. Devido ao elevado padrão atribuído à RAFB em termos de metodologia e exatidão, é necessário avaliar eventuais distorções para garantir alta precisão e acurácia em toda sua extensão. Atualmente, o posicionamento por GPS, combinado com um modelo geoidal de alta precisão em algumas regiões brasileiras, permite detectar eventuais distorções existentes na rede altimétrica fundamental. Assim, foram investigadas as distorções da RAFB no Sul/Sudeste do Brasil, comparando as altitudes determinadas pelo GPS/nivelamento com altitudes de referência. Pela metodologia usada, os dados disponíveis inicialmente foram avaliados por meio da análise estatística, para detectar e eliminar erros grosseiros. Em seguida, o modelo geoidal gravimétrico foi ajustado ao do sistema altimétrico pela modelagem da componente sistemática, por meio dos modelos paramétricos simplificados e gerais. O cálculo da altitude ortométrica no modo relativo, a partir de estações da RGSB, depuradas de erros grosseiros, e do modelo geoidal gravimétrico, possibilitou a identificação de distorções locais e regionais. Com isso, foi realizada a análise estatística da componente sistemática do geóide, em um conjunto de 236 estações da RGSB, e constatou-se a existência de uma média não nula, indicando incompatibilidade entre  $N_{GPS}$  e  $N_g$  na região de estudo, às vezes relacionada a erros grosseiros e sistemáticos existentes nas RNs, que causam distorções na rede. Isso foi constatado em 20 RNs contendo erros grosseiros. O geóide gravimétrico foi compatibilizado ao sistema altimétrico local através do modelo matemático de correção de 7 parâmetros, para aplicar a metodologia e identificar as RNs contendo distorções. Com isso, mais 4 RNs foram identificadas com distorções. A utilização adequada dessa metodologia requer uma rede GPS de referência densa, que forneça estações com coordenadas geodésicas e altitudes ortométricas, além de um geóide gravimétrico compatível com o do sistema altimétrico de referência.

Palavras-chave: distorções de rede altimétrica, posicionamento por GPS, sistema altimétrico, geóide.

## ABSTRACT

The large Brazilian extension and the reduced number of tide gauge have conditioned the establishment of *Rede Altimétrica Fundamental do Brasil* (RAFB) through lines which surpass some thousands of kilometers. Even following the recommended control standards to high accuracy levelling surveys, the outliers, systematic errors, and random errors are inevitable. These errors generate distortions and, consequently, deteriorated the accuracy of altimetric network. Due to the high standard ascribed to RAFB in terms of methodology and accuracy, it is necessary to evaluate for any distortions in order to guaranty high precision and accuracy in its whole extension. Nowadays, GPS positioning by combining a high precision geoid model in some regions of Brazil, allows to detect distortions of the RAFB in South/Southeast of Brazil, comparing orthometric heights determined by GPS/levelling with the reference ones. For the used methodology, all data available were evaluated by statistical analyses, in order to detect and eliminate outliers. Afterwards, gravimetric geoid model was adjusted to geoid computed GPS/levelling at RGSB stations, aiming the approximation of the systematic component by using a simple and a general mathematical models. The computation of orthometric heights, in relative mode, at the RGSB stations, made possible to find the orthometric heights outliers, and the adjustment of gravimetric geoid model, allowing to identify local and regional distortions. The statistical analysis of geoid systematic component was accomplished, from 236 stations of RGSB, and the existence of a non zero mean was found. Such a mean indicated incompatibility of  $N_{GPS}$  with  $N_g$  in the study region, almost associated to random and systematic errors existent in benchmarks which generate distortion in the altimetric network. This was accomplished by identifying and removing of 20 erroneous heights benchmarks. Gravimetric geoid was adjusted to the local altimetric system geoid, starting from a 7 parameters mathematical model in order to apply the methodology as well as to identify benchmarks with distortions. So, more 4 benchmarks were identified with distortions. The adequate use of this methodology requires a dense GPS reference network, which supplies stations with geodetic coordinates and orthometric heights, and also a gravimetric geoid compatible to that one of reference altimetric system.

Keywords: altimetric network distortions; positioning by GPS; altimetric system; geoid.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação do campo de gravidade terrestre.....	5
Figura 2.2 – Coordenadas cartesianas (x,y,z) e esféricas polares $(r, \theta, \lambda)$ .....	7
Figura 2.3 – Superfícies eqüipotenciais .....	11
Figura 2.4 – Superfícies do geóide e do elipsóide.....	15
Figura 2.5 – Aceleração de gravidade observada ( $g$ ), reduzida ao geóide ( $g_0$ ) e teórica ( $\gamma$ )	17
Figura 2.6 – Altura geoidal representada por meio de 3 componentes .....	18
Figura 2.7 – Número geopotencial e diferença de altitude ortométrica.....	22
Figura 2.8 – Altitude dinâmica (Vanícek & Krakiwsky, 1986).....	24
Figura 2.9 – Altitude ortométrica.....	25
Figura 2.10 – Altitude Normal .....	27
Figura 2.11 – Coordenadas elipsoidais .....	28
Figura 2.12 – Evoluções na implantação da RAB (Luz <i>et al.</i> , 2002) .....	30
Figura 2.13 – Nivelamento Geométrico.....	31
Figura 2.14 – Esquema de rede altimétrica.....	31
Figura 2.15 – Superfícies eqüipotenciais não paralelas .....	32
Figura 2.16 – Esquema de um <i>Datum</i> altimétrico convencional .....	34
Figura 2.17 – Diferenças entre os NMM locais e o <i>Datum</i> de Imbituba (Alencar, 1990).....	35
Figura 2.18 – Propagação dos erros do nivelamento geométrico e as estações da Rede Maregráfica Permanente para Geodésia (IBGE, 2005).....	37
Figura 2.19 – Princípio básico do posicionamento por GPS.....	39
Figura 2.20 – Segmentos do sistema GPS.....	41
Figura 2.21 – Geometria espacial dos satélites .....	44
Figura 2.22 – Multicaminho.....	46
Figura 2.23 – Princípio do posicionamento absoluto.....	47
Figura 2.24 – Princípio do posicionamento relativo .....	48
Figura 2.25 – Altimetria por GPS no modo absoluto.....	49
Figura 2.26 – Altimetria por GPS no modo relativo .....	50
Figura 3.1 – Rede altimétrica na região Sul/Sudeste do Brasil.....	52
Figura 3.2 – Marco de uma Referência de Nível do IBGE.....	52
Figura 3.3 – Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo – RBMC (IBGE, 2005).....	54
Figura 3.4 – Rede GPS no Sul/Sudeste do Brasil .....	55
Figura 3.5 – Receptor, ASHTECH Z12 e antena ASHTECH ASH700718A.....	56

Figura 3.6 – Receptor e antena utilizados nas estações da RBMC .....	56
Figura 3.7 – Geóide GPS/Nivelamento da região .....	58
Figura 3.8 – Geóide gravimétrico da região.....	59
Figura 4.1 – Função densidade de probabilidade normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ .....	62
Figura 4.2 – Distribuição dos dados quanto à curtose.....	65
Figura 4.3 – Altimetria por GPS com superabundância. Triângulos vermelhos: estações de referência; círculo azul: RN posicionada (Santos, 2005).....	73
Figura 5.1 – Histograma da componente sistemática.....	77
Figura 5.2 – Componente sistemática do geóide usando todos os dados.....	78
Figura 5.3 – Exemplo de altitude com erro grosseiro .....	79
Figura 5.4 – Componente sistemática do geóide com erros grosseiros identificados.....	80
Figura 5.5 – Componente sistemática do geóide após a remoção dos erros grosseiros.....	81
Figura 5.6 – Histograma da componente sistemática após a remoção dos erros grosseiros ....	82
Figura 5.7 – Procedimentos no MatLab para calcular os parâmetros dos modelos usados ....	83
Figura 5.8 – Correções pelo modelo bilinear .....	84
Figura 5.9 – Correções pelo modelo biquadrático .....	85
Figura 5.10 – Correções pela transformação de similaridade de 4 parâmetros.....	85
Figura 5.11 – Correção pela transformação de similaridade de 5 parâmetros .....	86
Figura 5.12 – Correção pela transformação de similaridade de 7 parâmetros .....	86
Figura 5.13 – Correção pela transformação de similaridade de 8 parâmetros .....	87
Figura 5.14 – Geóide gravimétrico compatibilizado ao do sistema altimétrico brasileiro .....	92
Figura 5.15 – Erro em ppm do geóide antes de ser compatibilizado .....	93
Figura 5.16 – Erro em ppm do geóide compatibilizado ao do sistema altimétrico brasileiro..	93
Figura 5.17 – Histograma do resíduo da altitude ortométrica antes da remoção das distorções (Unidade: m) .....	96
Figura 5.18 – Distribuição geográfica das RNs com distorções (vermelho) e sem distorções (azul).....	97
Figura 5.19 – Exemplo de RN com distorção .....	98
Figura 5.20 – Componente residual da altitude ortométrica .....	98
Figura 5.21 – Componente residual da altitude ortométrica sem distorção.....	99
Figura 5.22 – Histograma dos resíduos da altitude ortométrica após a remoção das distorções .....	100
Figura 5.23 – Correlação do resíduo da altitude ortométrica e os dados envolvidos.....	102

Figura 5.24 – Exemplo de distorção regional .....	103
Figura 5.25 – Exemplo de distorção local.....	103
Figura 5.26 – Conjunto de RNs analisadas e identificadas com distorções (vermelha) e livre de erros (azul).....	104

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Constantes físicas e geométricas para o GRS80 (IAG, 1980).....	13
Tabela 2.2 - Erros envolvidos nas observações GPS (Monico, 2000).....	43
Tabela 5.1 – Parâmetros estatísticos dos dados.....	76
Tabela 5.2 – Estações identificadas com erros grosseiros .....	79
Tabela 5.3 – Parâmetros estatísticos dos dados.....	81
Tabela 5.4 – Coeficientes dos modelos usados .....	83
Tabela 5.5 – Parâmetros estatísticos dos modelos .....	84
Tabela 5.6 – Erro médio quadrático para cada modelo paramétrico analisado.....	88
Tabela 5.7 – Medidas estatísticas do ajuste dos modelos paramétricos.....	89
Tabela 5.8 – Número de condição dos modelos paramétricos.....	89
Tabela 5.9 – Coeficientes dos modelos contendo 5, 7 e 8 parâmetros nas duas versões .....	91
Tabela 5.10 – Número de condição para as formas 1 e 2 dos modelos .....	91
Tabela 5.11 – Erro relativo do geóide em função da distância .....	94
Tabelas 5.12 – Estatísticas dos dados depurados de erros grosseiros .....	95
Tabela 5.13 – Estações da RGSB que apresentam distorções.....	96
Tabela 5.14 – Parâmetros estatísticos dos dados sem distorção .....	99
Tabela 5.15 – Coeficiente de correlação de Pearson (Spiegel, 1993).....	100
Tabela 5.16 – Coeficiente de correlação de Pearson e da equação da reta .....	101
Tabela A.1 – Estações da RGSB usadas na análise estatística dos dados e componentes sistemáticas do geóide. Unidade: m .....	115
Tabela A.2 – Estações da RGSB usadas na avaliação da distorção RAFB e componente residual da altitude ortométrica. Unidade: m .....	120

## LISTA DE SIGLAS

CMQ – Colocação por Mínimos Quadrados

DOP – *Dilution of Precision*

DVSIRGAS – *Datum Vertical SIRGAS*

EGM96 – *Earth Geopotential Model 1996*

GPS – *Global Positioning System*

GRS80 – *Geodetic Reference System 1980*

IAG – Associação Internacional de Geodésia

IAG/USP – Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da USP

IAGS – *American Geodetic Survey*

IAU – *International Astronomical Union*

IBGE – Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IGGSP – Instituto Geográfico e Geológico do Estado de São Paulo

IGS – *International GPS Geodynamics Service*

IUGG – *International Union of Geodesy and Geophysics*

NGS – *National Geodetic Survey*

NIMA – *National Imagery and Mapping Agency*

NMM – Nível Médio do Mar

RAFB – Rede Altimétrica Fundamental do Brasil

RBMC – Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo

RGSB – Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil

RN – Referência de Nível

RNE – Referência de Nível Excêntrica

SIRGAS – Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas

TNMM – Topografia do NMM

WGS84 – *World Geodetic System 1984*

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>3</b>
2.1 CAMPO DE GRAVIDADE DA TERRA.....	3
2.1.1 Geopotencial .....	3
2.1.2 Esferopotencial .....	11
2.1.3 Campo de gravidade anômalo.....	13
2.1.4 Anomalias gravimétricas .....	15
2.1.5 Determinação de geóide gravimétrico .....	17
2.1.6 Fontes de erro do geóide gravimétrico .....	19
2.2 ALTITUDES .....	20
2.2.1 Número Geopotencial .....	21
2.2.2 Altitude dinâmica .....	23
2.2.3 Altitude ortométrica.....	24
2.2.4 Altitude normal .....	26
2.2.5 Altitude geométrica .....	27
2.3 REDE ALTIMÉTRICA .....	28
2.3.1 Histórico da rede altimétrica do Brasil .....	29
2.3.2 Nivelamento geométrico .....	29
2.3.3 <i>Datum</i> altimétrico .....	33
2.4 O SISTEMA GPS.....	37
2.4.1 Segmentos do GPS.....	39
2.4.2 Observações GPS.....	42
2.4.3 Fontes de erros do sistema GPS .....	42
2.4.4 Métodos de posicionamentos por GPS .....	45
2.4.5 Altimetria por GPS .....	48
<b>3 DESCRIÇÃO DOS DADOS.....</b>	<b>51</b>
3.1 REFERÊNCIAS DE NÍVEL.....	51
3.2 REDES GPS DE REFERÊNCIA .....	53
3.2.1 Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo .....	53
3.2.2 Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil.....	53

3.3 GEÓIDE GRAVIMÉTRICO .....	58
<b>4 METODOLOGIA .....</b>	<b>60</b>
4.1 REMOÇÃO DE ERROS GROSSEIROS .....	60
<b>4.1.1 Remoção de erros grosseiros dos dados .....</b>	<b>61</b>
4.2 MODELAGEM DA COMPONENTE SISTEMÁTICA .....	65
<b>4.2.1 Modelo matemático do método paramétrico .....</b>	<b>66</b>
<b>4.2.2 Tipos de modelos .....</b>	<b>69</b>
4.3 DETERMINAÇÃO DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA POR GPS .....	72
<b>4.3.1 Altimetria por GPS no modo relativo .....</b>	<b>72</b>
<b>4.3.2 Erros padrões.....</b>	<b>73</b>
4.4 AVALIAÇÃO DE DISTORÇÕES .....	75
<b>5 RESULTADOS.....</b>	<b>76</b>
5.1 ESTATÍSTICA DOS DADOS.....	76
<b>5.1.1 Identificação de erros grosseiros.....</b>	<b>78</b>
5.2 COMPATIBILIZAÇÃO DOS GEÓIDES .....	82
<b>5.2.1 Correções ajustadas .....</b>	<b>82</b>
<b>5.2.2 Seleção do modelo paramétrico .....</b>	<b>87</b>
<b>5.2.3 Geóide gravimétrico compatível com o do sistema altimétrico.....</b>	<b>91</b>
5.3 ALTITUDE ORTOMÉTRICA POR GPS NO MODO RELATIVO .....	92
5.4 IDENTIFICAÇÃO E ANÁLISE DAS DISTORÇÕES NA RAFB.....	94
<b>5.4.1 Identificação das distorções.....</b>	<b>95</b>
<b>5.4.2 Correlação dos resíduos com as componentes envolvidas.....</b>	<b>100</b>
<b>5.4.3 Causas das distorções.....</b>	<b>101</b>
<b>6 CONCLUSÕES .....</b>	<b>105</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>108</b>
<b>APÊNDICE .....</b>	<b>115</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Rede Altimétrica Fundamental do Brasil (RAFB), implantada pela Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), é oficialmente adotada no país. Essa rede é constituída de pontos, definidos fisicamente por retículos gravados em chapas de bronze, incrustadas sobre marcos ou estruturas de concreto, construídos na superfície física da Terra, denominados Referências de Nível (RNs), cujas altitudes ortométricas são referidas ao Nível Médio do Mar (NMM), materializado pelo marégrafo de Imbituba (SC). É formada por linhas de nivelamento geométrico ligadas entre si, formando circuitos que se estendem pelo país. Seu objetivo é apoiar o mapeamento básico e as grandes obras de engenharia como barragens, saneamento básico, distribuição de água, rodovias e telecomunicações (Alencar, 1968).

Apesar da alta precisão dos desníveis obtidos pelo nivelamento geométrico, a implantação de uma rede de nivelamento que se estenda por todas as regiões do país, a partir de um *Datum* vertical, e possibilite uma distribuição geográfica adequada é, economicamente, inviável (Souza & Sá, 2003) em países com dimensões continentais como o Brasil. Além disso, as redes de nivelamento estão sujeitas a erros grosseiros, sistemáticos e aleatórios, os quais devem ser removidos por técnicas adequadas. As principais fontes de erros observacionais são: refração atmosférica, imperfeições na colimação de nível e verticalidade de miras, erro de graduação de miras e marés terrestres. As redes altimétricas envolvem, também, uma grande quantidade de observações realizadas em condições heterogêneas, tais como variações na topografia, nos instrumentos, e nos operadores. Esses erros geralmente são minimizados pelo ajustamento pelos mínimos quadrados que podem introduzir distorções nas redes (Bomford, 1983).

Esses problemas tornam necessária a avaliação de redes altimétricas nacionais, a fim de assegurar aos usuários das altitudes de referência, a precisão e a acurácia das redes.

Com o advento das técnicas espaciais de posicionamento, especialmente o GPS, combinado com um modelo geoidal adequado, tal avaliação tornou-se possível com benefícios de uso operacional simples, rapidez e baixo custo. A metodologia consiste na comparação de altitudes ortométricas, fornecidas pela rede de nivelamento, com as obtidas a partir das coordenadas geodésicas fornecidas pelo GPS, combinadas com alturas geoidais gravimétricas. Essa comparação é realizada na forma absoluta, isto é, são comparadas as

diferenças de altitudes ortométricas ( $\Delta H$ ) em um conjunto de RNs, constituindo a amostra estatística usada para a avaliação da rede altimétrica.

Porém, a utilização desta metodologia depende de dados que possibilitem seu uso de maneira eficiente e precisa, os quais são: uma rede GPS de referência, contendo estações com coordenadas geodésicas e altitudes ortométricas, e um geóide gravimétrico, cuja precisão seja compatível com a do nivelamento. A implantação da Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil (RGSB), nos estados de São Paulo, Santa Catarina e Paraná, além do aprimoramento do geóide gravimétrico do Estado de São Paulo, são os requisitos básicos para a avaliação da RAFB na região (Sá, 2004; Sá *et al.*, 2001).

Assim, este trabalho teve os seguintes objetivos: a) avaliar as distorções da RAFB na região de abrangência da RGSB, comparando as altitudes ortométricas fornecidas pela rede altimétrica com as obtidas pela combinação do GPS com o geóide gravimétrico, e b) aprimorar a transformação para tornar o geóide gravimétrico compatível com o geóide do sistema altimétrico brasileiro.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma avaliação das distorções da RAFB, comparando as alturas geoidais obtidas a partir de modelo geoidal gravimétrico e com as determinadas por GPS combinado com o nivelamento ótico, não pode prescindir dos conceitos do campo de gravidade da Terra. Para a compreensão da metodologia utilizada, assim como dos resultados e análises realizadas, deve-se também, conhecer os elementos envolvidos na avaliação proposta, ou seja, a altura geoidal e as altitudes ortométrica e geométrica e os respectivos erros. Assim, este capítulo apresenta, de forma sucinta, os conceitos para a compreensão da pesquisa.

### 2.1 CAMPO DE GRAVIDADE DA TERRA

O conhecimento do campo de gravidade terrestre é fundamental como instrumento para a determinação das dimensões e da forma da Terra, fornecendo subsídios para investigações acerca de seu comportamento dinâmico.

O geóide, referencial altimétrico adotado em todo mundo, é a superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra, coincidente com o nível do mar não perturbado, que se prolonga pelos continentes.

#### 2.1.1 Geopotencial

O campo de gravidade da Terra real ( $\mathbf{g}$ ) é dotado de potencial escalar  $W = W(x, y, z)$ , denominado geopotencial, e descrito como segue (Sá, 1988):

$$\mathbf{g} = \nabla W \quad (2.1)$$

onde  $\nabla$  representa o operador gradiente.

O geopotencial é a soma do potencial gravitacional ( $V$ ), gerado pela massa da Terra sobre a massa unitária, colocada no ponto  $P$ , e do seu potencial centrífugo ( $\Phi$ ) resultante da

rotação terrestre (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$W = V + \Phi \quad (2.2)$$

com

$$V = G \iiint_v \frac{dm}{l} = G \iiint_v \frac{\rho}{l} dv \quad (2.3)$$

onde  $l$  representa a distância entre o elemento de massa  $dm$  e o ponto  $P$ ,  $G$  é a constante universal da gravitação e  $\rho$  a densidade terrestre. O potencial centrífugo é dado por

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.4)$$

sendo  $\omega$  a velocidade angular e  $\sqrt{x^2 + y^2}$  o raio da trajetória descrita pela massa unitária.

Então, o gradiente do geopotencial  $W$  representa o vetor força de gravidade  $\mathbf{g}$  (Figura 2.1), e o gradiente de suas componentes  $V$  e  $\Phi$  são, respectivamente, os vetores força de atração  $\mathbf{F}$  e força centrífuga  $\mathbf{f}$  (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$\text{grad}W = \text{grad}V + \text{grad}\Phi \quad (2.5)$$

ou na forma:

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} + \mathbf{f} \quad (2.6)$$

As derivadas parciais do geopotencial em relação aos eixos coordenados são as componentes do vetor gravidade em relação aos mesmos eixos:

$$\text{grad}W = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k} = (g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k}) \quad (2.7)$$

cujas componentes são expressas por:

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = -G \iiint_v \frac{x}{l^3} \rho dv + \omega^2 x$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = -G \iiint_v \frac{y}{l^3} \rho dv + \omega^2 y \quad (2.8)$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -G \iiint_v \frac{z}{l^3} \rho dv$$

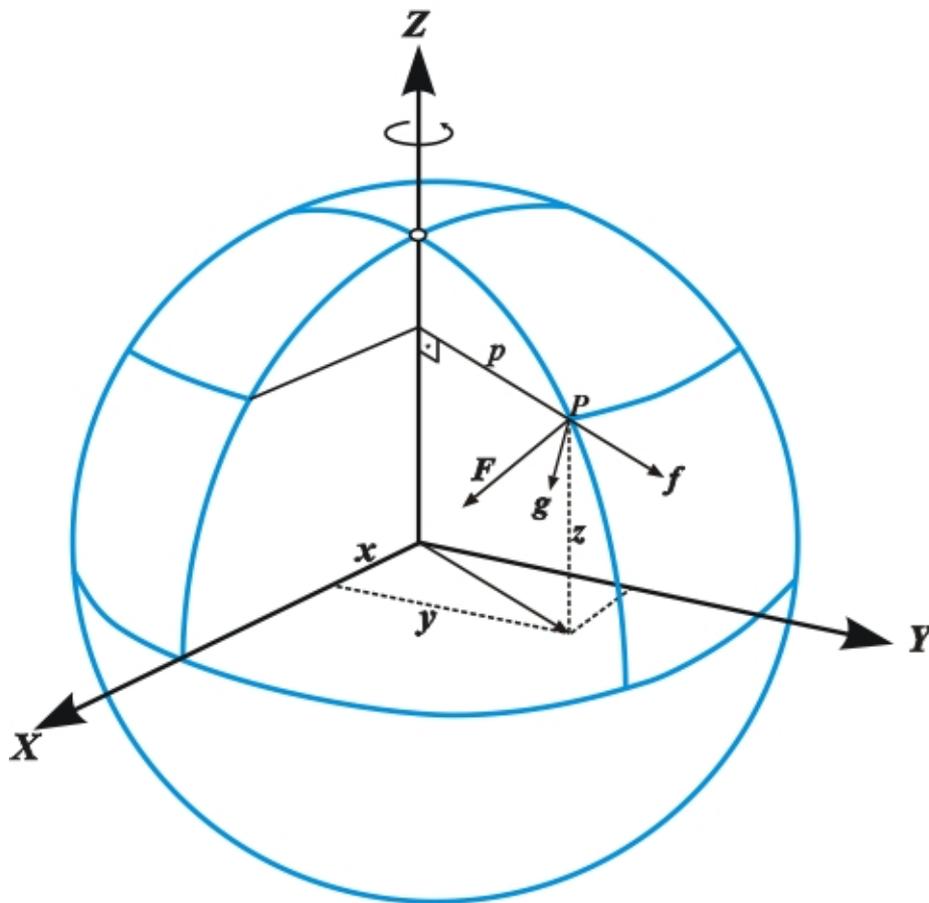


Figura 2.1 – Representação do campo de gravidade terrestre

O laplaciano do geopotencial é obtido a partir de (2.1):

$$\nabla^2 W = \nabla^2 V + \nabla^2 \Phi \quad (2.9)$$

com a qual se obtém a equação de Poisson generalizada, para pontos interiores às massas atrativas (Sá, 1988):

$$\nabla^2 W = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (2.10)$$

A equação de Laplace, para o exterior da massa atrativa, tem a forma (Vaníček & Krakiwsky, 1986):

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.11)$$

Adotando o sistema de coordenadas esféricas polares (Figura 2.2), no qual  $r$  é o raio vetor,  $\theta$  a distância polar e  $\lambda$  a longitude, os quais se relacionam as coordenadas cartesianas pelas expressões (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (2.12)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

A equação de Laplace em termos de coordenadas esféricas polares toma a forma:

$$2r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \operatorname{sen}^{-2} \theta \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (2.13)$$

cuja resolução pelo método de separação de variáveis proporciona a representação em séries de harmônicos esféricos (Sá, 1988):

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.14)$$

onde  $A_{nm}$  e  $B_{nm}$  são coeficientes determinados, a partir de elementos conhecidos do campo de gravidade e  $P_{nm}$  os polinômios de Legendre associados (Heiskanen & Moritz, 1967; Sá, 1988), dados por:

$$P_{nm}(\cos \theta) = \frac{\sin^m \theta}{2^n} \sum_{k=0}^I \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} \cos^{(n-m-2k)} \theta \quad (2.15)$$

onde I representa o maior inteiro contido em  $\frac{n-m}{2}$ . Reescrevendo (2.15), em termos da derivada em relação a  $\theta$ , obtém-se:

$$P_{nm}(\cos \theta) = \frac{\sin^m \theta}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{d^{n+m} \theta} (\cos^2 \theta - 1)^n \quad (2.16)$$

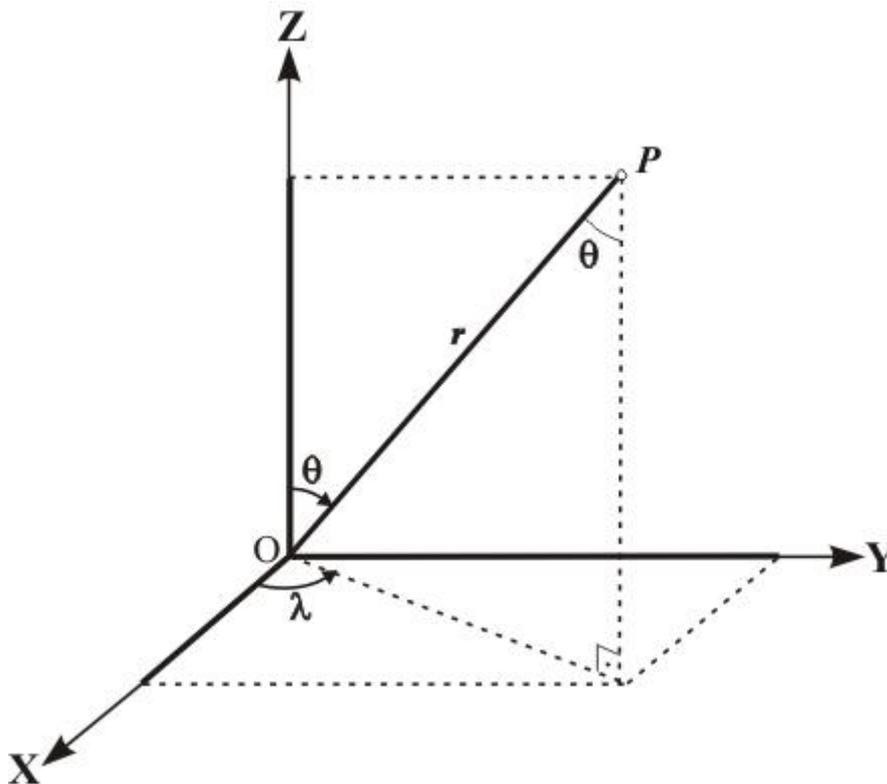


Figura 2.2 – Coordenadas cartesianas (x,y,z) e esféricas polares ( $r, \theta, \lambda$ )

Na prática, é conveniente utilizar coeficientes adimensionais e numericamente menores do que os originais da expressão (2.14), pela expressão:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right] \quad (2.17)$$

com:

$$C_{nm} = -\frac{A_{nm}}{GMa^n} \quad (2.18)$$

$$S_{nm} = -\frac{B_{nm}}{GMa^n}$$

onde  $GM$  é a constante gravitacional geocêntrica e  $a$  o semi-eixo maior do modelo elipsoidal.

Usando-se os coeficientes completamente normalizados, que são os mais utilizados, na expressão (2.17), resulta (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right] \quad (2.19)$$

### ***Geopotencial em harmônicos esféricos***

Para representar o geopotencial em harmônicos esféricos é necessário envolver o laplaciano dos potenciais gravitacional e centrífugo:

$$\nabla^2 W(r, \theta, \lambda) = \nabla^2 V(r, \theta, \lambda) + \nabla^2 \Phi(r, \theta, \lambda) \quad (2.20)$$

Portanto, utilizando (2.19) e o laplaciano do potencial centrífugo em coordenadas esféricas, tem a forma (Sá, 2004):

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{3} \omega^2 r_\theta^2 [1 - \bar{P}_{20}(\cos \theta)] \quad (2.21)$$

obtem-se a expressão do geopotencial em harmônicos esféricos:

$$W(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right] + \frac{1}{3} \omega^2 r_\theta^2 [1 - \bar{P}_{20}(\cos \theta)] \quad (2.22)$$

### *Superfícies equipotenciais*

As superfícies com o geopotencial constante são denominadas *superfícies equipotenciais* ou simplesmente *geopes*. A equipotencial que mais se aproxima do nível médio dos mares recebe a denominação de *geóide*. Sua equação é representada por (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$W(x, y, z) = W_0 = \text{constante} \quad (2.23)$$

Diferenciando (2.23), obtém-se:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \quad (2.24)$$

em notação vetorial, tem-se o produto escalar:

$$dW = \text{grad}W \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.25)$$

sendo  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ . Se o vetor  $d\mathbf{r}$  for tomado ao longo da equipotencial  $W = W_0$ , o geopotencial é constante e  $dW = 0$ ; portanto:

$$\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.26)$$

Se o produto escalar de dois vetores é zero, como ocorre na expressão (2.26), então os vetores são perpendiculares entre si e, nesse caso, o vetor gravidade é normal à superfície equipotencial.

Como as superfícies equipotenciais (Figura 2.3) não são paralelas, e as linhas perpendiculares a elas, denominadas linhas de força, são reversas, o vetor gravidade em P é tangente à linha de força que o contém e coincide com a vertical nesse ponto.

A altitude ortométrica ( $H$ ) do ponto P (Figura 2.3) é a distância a partir do geóide, contada sobre sua linha de força. Para  $d\mathbf{r}$ , ao longo da linha de força, na direção crescente de  $H$ , o comprimento será:

$$d\mathbf{r} = dH \quad (2.27)$$

com direção oposta a  $\mathbf{g}$ , e o ângulo entre  $d\mathbf{r}$  e  $\mathbf{g}$  é  $180^\circ$ , aplicando o produto escalar, tem-se:

$$dW = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = gdH \cos 180^\circ = -gdH \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.25), resulta:

$$dW = -gdH \quad (2.29)$$

que é a expressão fundamental para a determinação da altitude ortométrica, relacionando os conceitos geométricos ( $H$ ), e dinâmicos ( $W$ ) (Heiskanen & Moritz, 1967).

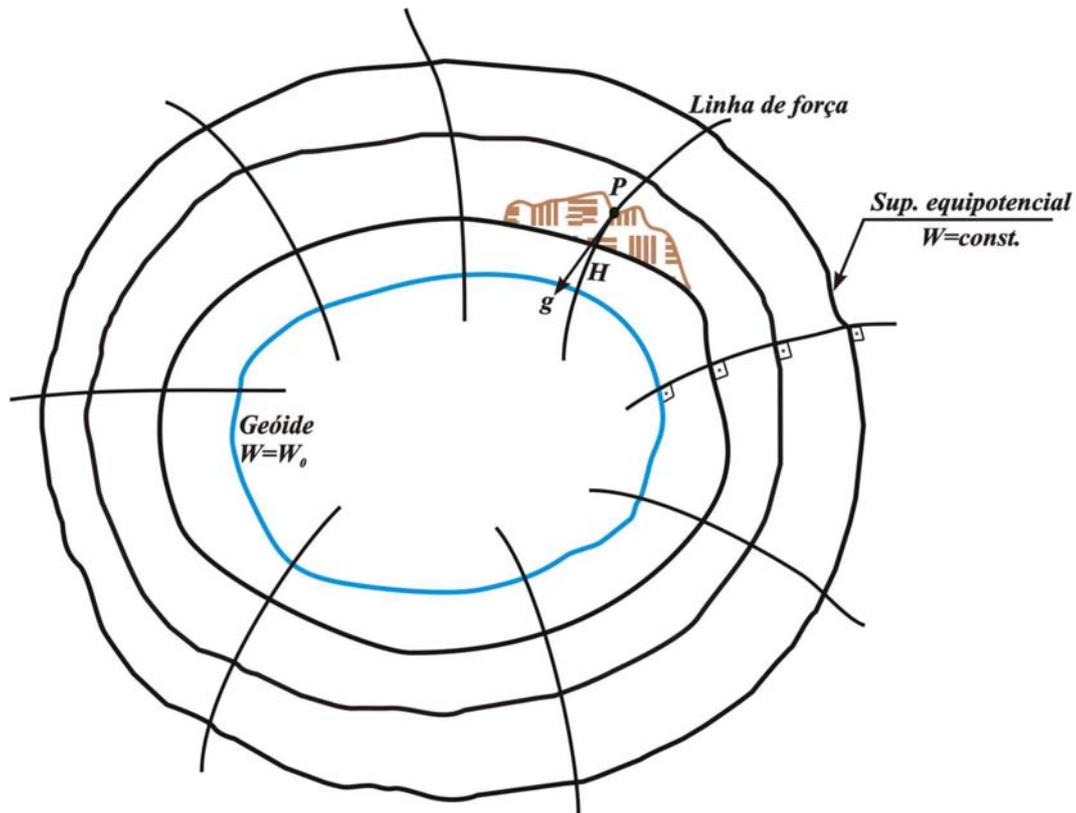


Figura 2.3 – Superfícies equipotenciais

### 2.1.2 Esferopotencial

A terra normal tem a forma de um elipsóide de revolução, ao qual se atribui a mesma massa e a mesma velocidade angular da Terra real, tal que a superfície limitante seja a equipotencial normal  $U_0 = W_0$  (Heiskanen & Moritz, 1967). A equipotencial do campo de gravidade normal é denominada *esferope*. O campo de gravidade normal constitui o campo vetorial conservativo ( $\gamma$ ), expresso a partir do escalar  $U = U(x, y, z)$ , chamado *esferopotencial*.

$$\gamma = \nabla U \quad (2.30)$$

$$U = V' + \Phi \quad (2.31)$$

onde  $V'$  é o potencial gravitacional do esferopotencial.

O desenvolvimento do esferopotencial  $U$  externo em harmônicos esféricos, por causa da simetria com relação ao plano equatorial, constitui um caso particular da série correspondente ao geopotencial (Sá, 1988). Neste caso,

$$C_{nm} = 0 \text{ se } m \neq 0$$

$$S_{nm} = 0 \text{ sempre}$$

Com isso, a expressão (2.14) se reduz à forma:

$$V'(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right] \quad (2.32)$$

Os coeficientes  $J_{2n}$  são calculados por:

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \left( 1 - n + \frac{5nJ_2}{e^2} \right) \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \quad (2.33)$$

sendo  $e$  a excentricidade do elipsóide e  $J_2 = 10.826,3 \times 10^{-7}$ , denominado fator dinâmico de forma. O coeficiente  $J_2$  aparece no Sistema de Constantes Astronômicas da *Internacional Astronomical Union* (IAU), fazendo parte da definição dos sistemas geodésicos de referência, como por exemplo, o *Geodetic Reference System 1980 (GRS80)*; IAG, 1980.

### **Gravidade Normal**

A gravidade teórica ( $\gamma$ ) depende somente da distância ao centro de massa da terra normal e da latitude ( $\varphi$ ). A gravidade normal tem a expressão (IAG, 1971):

$$\gamma = \gamma_e \left( 1 + \alpha \sin^2 \varphi + \beta \sin^2 2\varphi \right) \quad (2.34)$$

onde  $\gamma_e$  é a gravidade normal no equador,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dependentes das dimensões

do elipsóide de referência e da velocidade angular de rotação.

Em 1979, a *International Union of Geodesy and Geophysics* (IUGG), adotou oficialmente o GRS80. A expressão para gravidade normal ficou (IAG, 1980):

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad (2.35)$$

sendo:

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1 \quad (2.36)$$

onde  $a$  e  $b$  são os semi-eixos maior e menor do elipsóide adotado,  $\gamma_e$  é a gravidade no equador,  $\gamma_p$  é a gravidade no pólo.

Na Tabela 2.1 são apresentadas as constantes físicas e geométricas envolvidas na expressão 2.36.

Tabela 2.1 – Constantes físicas e geométricas para o GRS80 (IAG, 1980)

SÍMBOLO	DENOMINAÇÃO	CONSTANTES
$a$	Semi-eixo maior	6378137,000 m
$b$	Semi-eixo menor	6356752,314 m
$\gamma_e$	Gravidade no equador	9,780326776 m/s <sup>2</sup>
$\gamma_p$	Gravidade no pólo	9,832186368 m/s <sup>2</sup>
$e^2$	Primeira excentricidade	6,694380023 x 10 <sup>-3</sup>

### 2.1.3 Campo de gravidade anômalo

O potencial anômalo ( $T$ ), associado à heterogeneidade de massa da Terra real em relação à da terra normal, é a diferença entre o geopotencial e o esferopotencial no mesmo ponto (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$T(r, \theta, \lambda) = W(r, \theta, \lambda) - U(r, \theta, \lambda) \quad (2.37)$$

Como os potenciais centrífugos de  $W$  e  $U$  se cancelam no mesmo ponto, o potencial anômalo (2.37) é uma função harmônica no espaço exterior às massas, satisfaz à equação de Laplace.

A Figura 2.4 mostra as superfícies do geóide e do elipsóide de referência, com as grandezas envolvidas, na qual  $P_0$  é a projeção do ponto  $P$  sobre o geóide;  $Q$  é a projeção de  $P$  sobre o elipsóide, e  $N$  é a distância, contada sobre a normal, entre o geóide e o elipsóide.

Considerando o vetor gravidade  $\mathbf{g}_0$  no ponto  $P_0$  sobre o geóide e o vetor gravidade  $\gamma$  no ponto  $Q$  sobre o elipsóide, a diferença entre eles fornece o vetor anomalia de gravidade:

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \gamma \quad (2.38)$$

O ângulo formado pela vertical ( $v$ ) e a normal ( $n$ ) no ponto considerado é o desvio da vertical ( $i$ ), composto pela componente meridiana ( $\xi$ ), direção norte-sul:

$$\xi = \Phi - \phi \quad (2.39)$$

e pela componente primeiro vertical ( $\eta$ ), direção leste-oeste:

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi \quad (2.40)$$

sendo  $(\Phi, \Lambda)$  as coordenadas astronômicas latitude e longitude e  $(\phi, \lambda)$  as coordenadas geográficas.

As expressões (2.37 a 2.40), apresentadas sobre o campo anômalo, podem ser condensadas na fórmula de Bruns (Vanícek & Krakiwsky, 1986):

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (2.41)$$

e na *equação fundamental da geodésia física*, a qual relaciona a anomalia gravimétrica  $\Delta g$  com o potencial anômalo  $T$ .

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} + \Delta g = 0 \quad (2.42)$$

onde  $h$  é a altitude contada ao longo da normal.

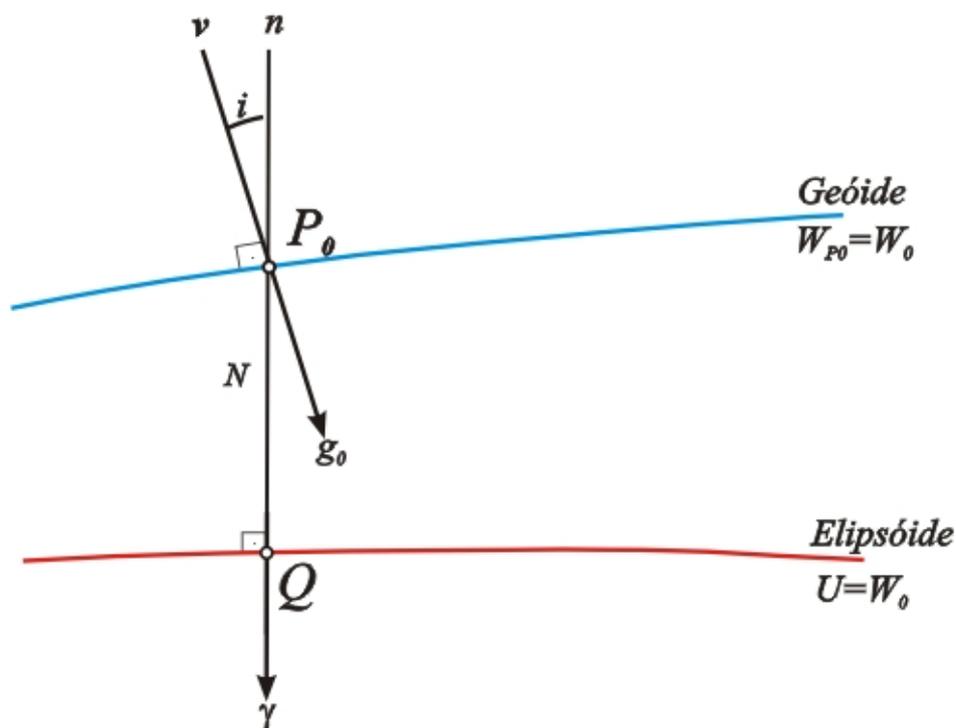


Figura 2.4 – Superfícies do geóide e do elipsóide

#### 2.1.4 Anomalias gravimétricas

Como as observações da aceleração de gravidade ( $g$ ) são realizadas na superfície física da Terra (Figura 2.5), são necessárias correções para se reduzir as medidas ao geóide ( $g_0$ ). Essas correções caracterizam diferentes tipos de anomalias, conforme a correção adotada; no entanto, as mais importantes no contexto desse trabalho são as anomalias: ar-livre, Bouguer e Helmert.

***Anomalia ar-livre***

A anomalia ar-livre é obtida a partir da correção homônima, que elimina o efeito da altitude do ponto de observação, sem considerar a massa topográfica existente entre esse ponto e o geóide (Sá, 2004):

$$C_a = -\frac{\partial g}{\partial H} H \cong 0,3086H \text{ (mGal)} \quad (2.43)$$

sendo  $\frac{\partial g}{\partial H}$  o gradiente vertical da aceleração da gravidade e  $H$  altitude ortométrica do ponto de medição. Portanto, a anomalia ar-livre tem a expressão:

$$\Delta g_a = g + 0,3086H - \gamma \quad (2.44)$$

onde  $g$  é a gravidade observada e  $\gamma$ , a gravidade teórica.

***Anomalia Bouguer***

Na anomalia Bouguer é considerada a massa topográfica existente entre o geóide e a superfície física da Terra, por meio da correção Bouguer, dada por:

$$C_b = -2\pi G\rho H \cong 0,1119H \text{ (mGal)} \quad (2.45)$$

onde  $G$  é a constante universal da gravitação e  $\rho$  é a densidade média da crosta. Por conseguinte, a anomalia Bouguer é expressa por:

$$\Delta g_b = \Delta g_a - 0,1119H \quad (2.46)$$

### *Anomalia Helmert*

A anomalia Helmert é obtida pelo segundo método de condensação introduzido por Helmert; ele consiste em condensar as massas topográficas sobre a superfície do geóide, formando uma superfície material de densidade proporcional à altitude (Sá, 2004). Assim, obtém-se a anomalia Helmert:

$$\Delta g_H = g + C_a + C_T - \gamma \quad (2.47)$$

onde  $C_T$  é a correção topográfica, muitas vezes negligenciada por ser de árdua obtenção, na qual se elimina as massas topográficas em relação da calota de Bouguer.

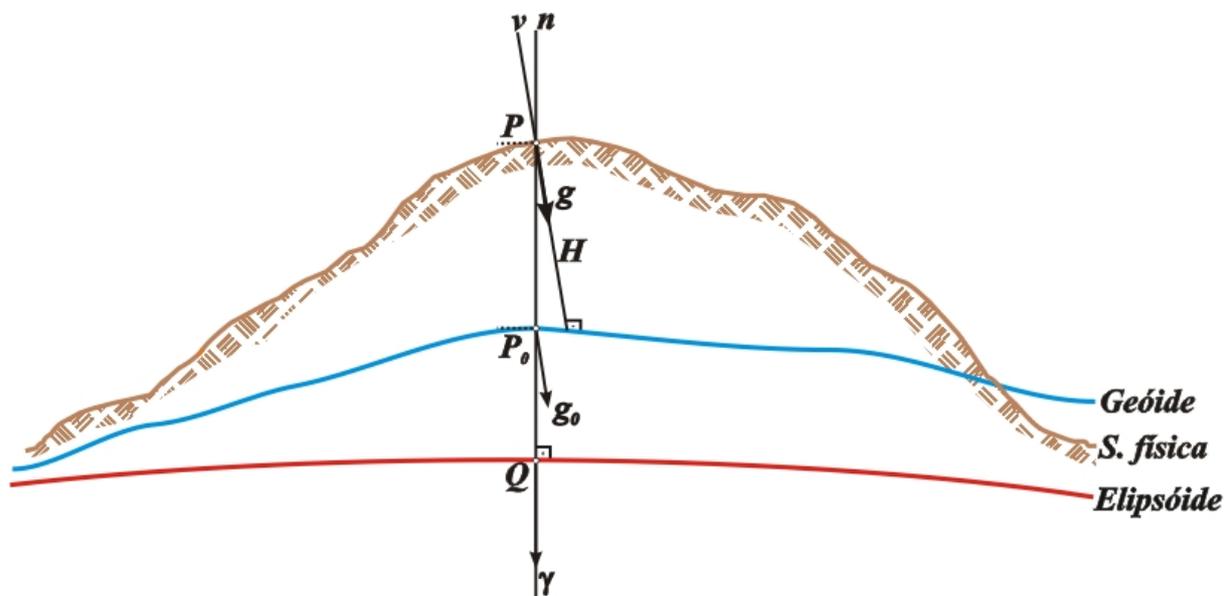


Figura 2.5 – Aceleração de gravidade observada ( $g$ ), reduzida ao geóide ( $g_0$ ) e teórica ( $\gamma$ )

#### 2.1.5 Determinação de geóide gravimétrico

O geóide é classicamente definido como a superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra que coincide com o Nível Médio dos Mares (NMM) não perturbados. Porém, esta é uma definição difícil de ser realizada na prática, pois o NMM pode variar de centímetros até alguns metros da superfície equipotencial, com efeitos de características

oceanográficas como variação de temperatura, salinidade, topografia da superfície oceânica, correntes marinhas, entre outras (Vanicek & Krakiwsky, 1986).

Há vários métodos para a determinação do geóide, mas a fórmula de Stokes, modificada para esferóides de alto grau, e a Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ) (Vanicek & Krakiwsky, 1986; Moritz, 1980) são os mais usados. Neste trabalho, foi usado o geóide gravimétrico calculado por meio da CMQ (Sá, 2004), combinando modelos geopotenciais, anomalias gravimétricas e dados topográficos.

Com essa metodologia, a altura geoidal é representada por meio de 3 componentes (Figura 2.6):

$$N = N_{MG} + N_{\Delta g} + N_H \quad (2.48)$$

onde  $N_{MG}$  foi determinada a partir de um modelo geopotencial, o *Earth Gravitational Model 1996* (EGM96), que contém coeficientes do potencial gravitacional expresso em harmônicos esféricos até o grau 360, o que significa uma resolução espacial de 30' de arco, na qual se representa as contribuições do longo comprimento de onda (Lemoine *et al.*, 1998).

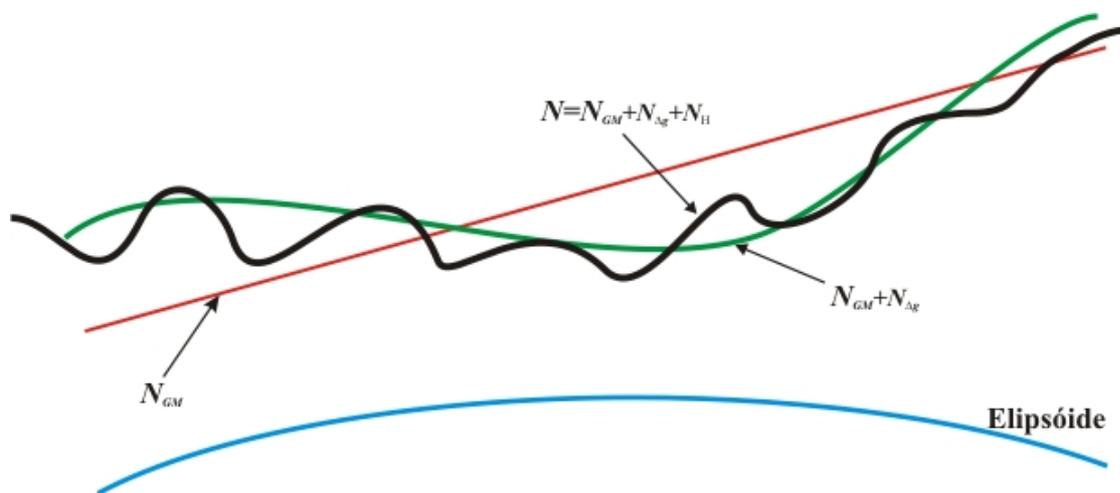


Figura 2.6 – Altura geoidal representada por meio de 3 componentes

A componente  $N_{\Delta g}$ , que representa as contribuições do médio comprimento de onda da altura geoidal usando a CMQ, tem a forma:

$$N_{\Delta g} = C_{N\Delta g} C^{-1} \Delta g \quad (2.49)$$

Com:

$$C^{-1} = \left( C_{\Delta g \Delta g} + \sigma_{\Delta g}^2 \right)^{-1} \quad (2.50)$$

onde,  $C_{\Delta g \Delta g}$  é a matriz covariância de dimensões  $n \times n$  entre as anomalias utilizadas,  $\sigma_{\Delta g}^2$  são as variâncias dessas anomalias,  $C_{N\Delta g}$  é a matriz covariância entre alturas geoidais e anomalias gravimétricas (Sá, 2004).

A componente  $N_H$ , que representa as informações do curto comprimento de onda do geóide, é normalmente obtida pelo método de condensação de Helmert, com a redução de dados gravimétricos na superfície do geóide. Em geral, a formulação do efeito indireto no geóide é realizada em termos de uma expansão das séries de Taylor, cujos três primeiros termos normalmente são considerados (Wichiencharoen, 1982). O cálculo do efeito indireto envolve dados de altitudes obtidos de um modelo topográfico digital, o qual recobre a área de interesse. Em áreas relativamente planas, o efeito indireto é muitas vezes negligenciado, introduzindo um erro pequeno nas alturas geoidais.

### 2.1.6 Fontes de erro do geóide gravimétrico

A partir da expressão (2.48), podem ser identificadas as fontes de erros das alturas geoidais, associadas às componentes  $N_{MG}$ ,  $N_{\Delta g}$  e  $N_H$ .

#### **Fontes de erros da componente $N_{MG}$**

O modelo geopotencial contribui com informações do longo comprimento de onda do geóide, mas introduz erros originados de dados de satélite, insuficiência de dados gravimétricos e erros sistemáticos da altimetria por satélite. Os dois principais tipos de erros no cálculo de  $N_{MG}$  podem ser divididos em (Fotopoulos, 2003): erros de omissão e erros de comissão. O primeiro ocorre devido ao truncamento da expansão em harmônicos esféricos

para o cálculo de  $N_{MG}$ , que na prática é obtida a partir de ( $n_{max} < \infty$ ). Já o segundo é devido ao ruído presente nos coeficientes da  $N_{MG}$ . As formulações detalhadas para o cálculo desses erros podem ser encontradas em Fotopoulos (2003) e Tscherning (2001).

### **Fontes de erros da componente $N_{\Delta g}$**

Os erros da componente  $N_{\Delta g}$  decorrem da distribuição geográfica, densidade e precisão dos dados gravimétricos envolvidos. A maior precisão na altura geoidal geralmente é obtida onde os dados gravimétricos são precisos e adequadamente distribuídos; porém, existem fontes de erros sistemáticos que influenciam a qualidade das anomalias gravimétricas, que são (Heck, 1990): inconsistência de *Data* gravimétricos, horizontais e verticais, e erros de aproximação devido ao uso de fórmulas simplificadas de reduções gravimétricas.

### **Fontes de erros da componente $N_H$**

Os erros do curto comprimento de onda da altura geoidal são introduzidos pela resolução espacial e precisão do modelo topográfico digital usado no cálculo de  $N_H$ . A modelagem do terreno é significativa, principalmente em regiões montanhosas, onde características topográficas têm maior efeito no modelo geoidal, além dos erros devido aos valores aproximados do gradiente vertical de gravidade (Sideris & Li, 1992).

## **2.2 ALTITUDES**

O posicionamento de pontos da superfície física da Terra envolve aspectos geométricos na determinação de coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) ou geodésicas ( $\varphi, \lambda, h$ ); e aspectos físicos na determinação da altitude ortométrica, cuja superfície de referência é a equipotencial que coincide com o nível médio dos mares (geóide), geralmente materializada por marégrafos.

O grande sucesso obtido com as técnicas espaciais na realização de referenciais geocêntricos, na representação do campo de gravidade e no aprimoramento de modelos geoidais está motivando estudos para a realização de referenciais altimétricos com

características globais. Atualmente, as coordenadas geodésicas obtidas por GPS, usando redes de referência adequadas, combinadas com alturas geoidais determinadas a partir de modelos geoidais gravimétricos, proporcionam a altitude ortométrica com precisão suficiente para muitas aplicações e, até mesmo, para a avaliação de distorções da RAFB.

Nesta seção serão apresentados os conceitos e procedimentos empregados na determinação dos diferentes tipos de altitudes usados em Geodésia.

### 2.2.1 Número Geopotencial

O nivelamento combinado com medição de gravidade proporciona a diferença de potencial, denominada número geopotencial ( $C$ ), o qual tem significado físico (Figura 2.7). O número geopotencial é a grandeza ideal para descrever o comportamento de massas no campo da gravidade, usando-se simplesmente a diferença entre os potenciais de gravidade no geóide e no ponto de interesse (Torge, 1991). Ele também pode ser interpretado como o trabalho realizado pelo campo de gravidade para transportar a unidade de massa entre as respectivas superfícies equipotenciais (Vanícek & Krakiwsky, 1986):

$$C_i = W_i - W_0 = \int_{P_0}^{P_i} g dl = \int_{P_0}^{P_i} g' dH' \quad (2.51)$$

onde a integral é calculada ao longo da superfície física ( $dl$ ) entre o geóide e o ponto  $P_i$ , ou ao longo da vertical ( $dH'$ ) do ponto  $P_i$ , como pode ser visto na Figura 2.7.

A unidade para o número geopotencial é  $kgal \times m$ , por ter valor numérico aproximadamente igual ao da respectiva altitude  $H$ , isto é,  $C = 0,98H$  (Vanícek & Krakiwsky, 1986). Por ser tratar da diferença de potencial, o número geopotencial possui algumas características: a) é univocamente definido para cada ponto ou, em outras palavras, independe da trajetória da linha de nivelamento; b) é positivo acima do geóide, zero no geóide e negativo abaixo do geóide; c) não tem dimensão de comprimento; a integral de  $C$  em um circuito fechado é zero; e d) é constante para pontos situados na mesma superfície equipotencial.

Na prática não se conhecem  $g$  e  $l$  como funções contínuas de posição, logo as integrais da expressão (2.51) são efetuadas numericamente, discretizando  $g$  e  $\Delta H$  ao longo da linha

nivelada (Vanícek & Krakiwsky, 1986):

$$C_{ij} \doteq \sum_{k=i}^j \bar{g}_k \Delta H_k \quad (2.52)$$

sendo:

$$\bar{g}_k = \frac{1}{2}(g_{k-1} + g_k) \quad (2.53)$$

onde  $\Delta H_k$  é o desnível bruto fornecido pela operação do nivelamento,  $g_k$  é o valor da gravidade observada na  $k$ -ésima RN.

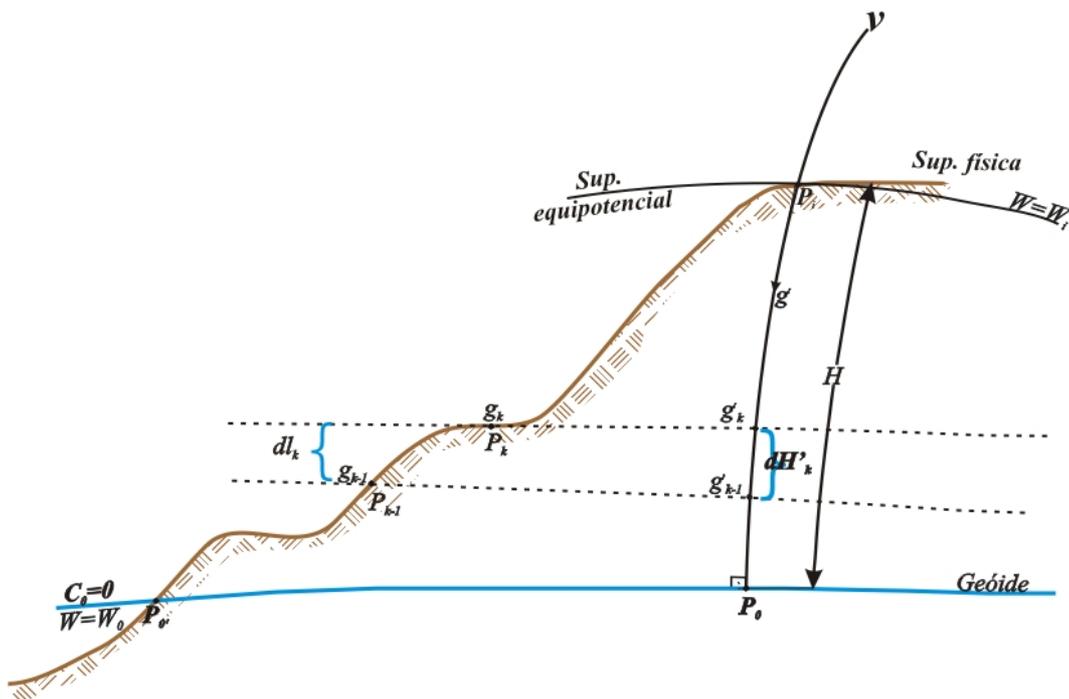


Figura 2.7 – Número geopotencial e diferença de altitude ortométrica

Do ponto de vista prático, não é viável e nem necessário ter o valor de  $g$  observado em todos os pontos; a única exigência é que  $g$ , qualquer que seja sua fonte, tenha boa precisão.

O espaçamento ideal correspondente à diferença de nível,  $\Delta H$ , e a precisão dos valores de  $g$  dependem das características topográficas e da variação do campo de gravidade

(Vanícek & Krakiwsky, 1986).

O número geopotencial tem o inconveniente de não ser expresso em unidade de comprimento. Como consequência desse problema, surgiram diferentes tipos de altitudes físicas. As mais importantes, no contexto deste trabalho, são: altitude dinâmica, altitude ortométrica, e altitude normal que são expressas em unidades de distância, visto que resultam da divisão do número geopotencial pela gravidade correspondente (Luz *et al.*, 2004):

$$H_i = \frac{C_i}{g'} \quad (2.54)$$

onde  $C_i$  é o número geopotencial e  $g'$  é a gravidade no ponto  $P_i$ .

### 2.2.2 Altitude dinâmica

A altitude dinâmica é obtida a partir de (2.54), adotando-se a gravidade normal como referência ( $\gamma_r$ ), isto é:

$$H_i^D = \frac{C_i}{\gamma_r} \quad (2.55)$$

A gravidade de referência também pode ser interpretada como um fator de escala para converter o número geopotencial em unidade de comprimento.

A altitude dinâmica (Figura 2.8) apresenta a conveniência de ser igual sobre uma mesma superfície equipotencial, para diferentes pontos, ou seja,  $H_1^D = H_2^D = H_3^D$ . No entanto, deve-se ter o cuidado para não interpretá-la como a distância geométrica entre o geóide e o ponto, isto é,  $l_1 \neq l_2 \neq l_3$  (Vanícek & Krakiwsky, 1986).

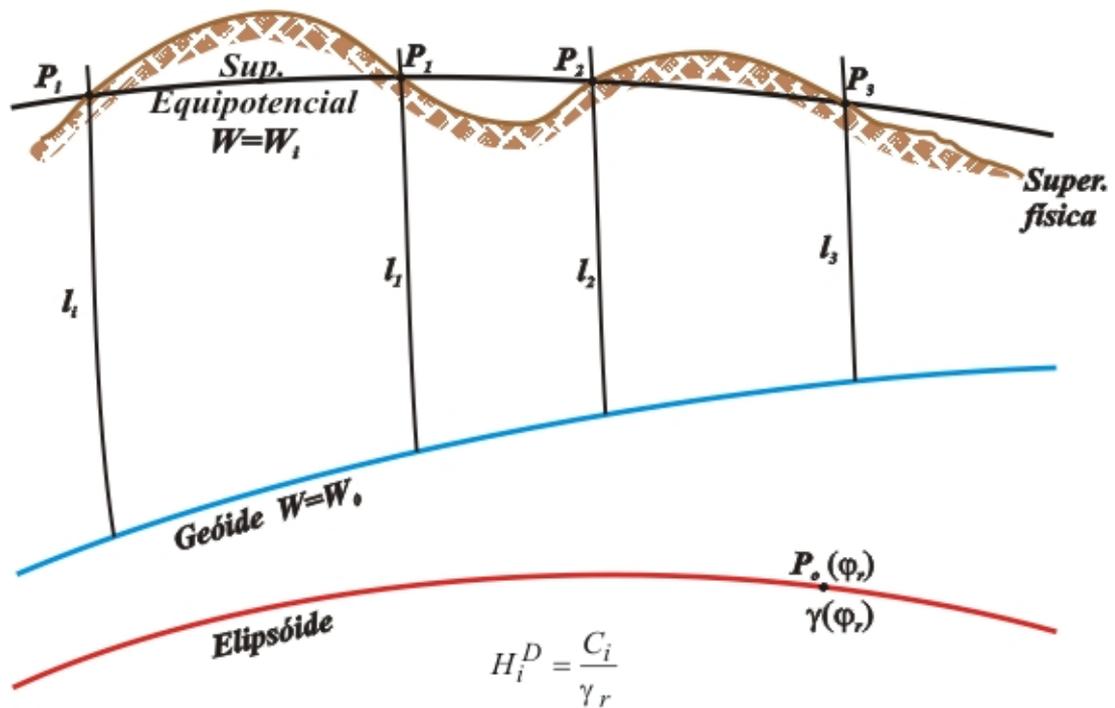


Figura 2.8 – Altitude dinâmica (Vanícek & Krakiwsky, 1986)

### 2.2.3 Altitude ortométrica

A altitude ortométrica é definida como a distância, medida ao longo da vertical, entre o geóide e o ponto de interesse (Figura 2.9). Portanto, a altitude ortométrica do ponto  $P$ , na superfície física da Terra, é dada por (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$H_i^O = -\int_0^P \frac{dW}{g} = \int_0^P \frac{dC}{g} \quad (2.56)$$

onde a integral é sobre a vertical.

Mas, por (2.51) obtém-se:

$$C_i = \int_0^P g'_i dH = H(1/H) \int_0^P g'_i dH \quad (2.57)$$

ou:

$$C_i = \bar{g}'_i H \quad (2.58)$$

onde  $\bar{g}'_i$  é o valor médio da gravidade ao longo da vertical entre os pontos  $O'$ , no geóide, e  $P$ , na superfície física, expresso por:

$$\bar{g}'_i = \left(1/H\right) \int_{O'}^P g'_i dH \quad (2.59)$$

Portanto, a altitude ortométrica pode ser obtida a partir de (2.58), usando (2.59), ou seja:

$$H_i^O = \frac{C_i}{\bar{g}'_i} \quad (2.60)$$

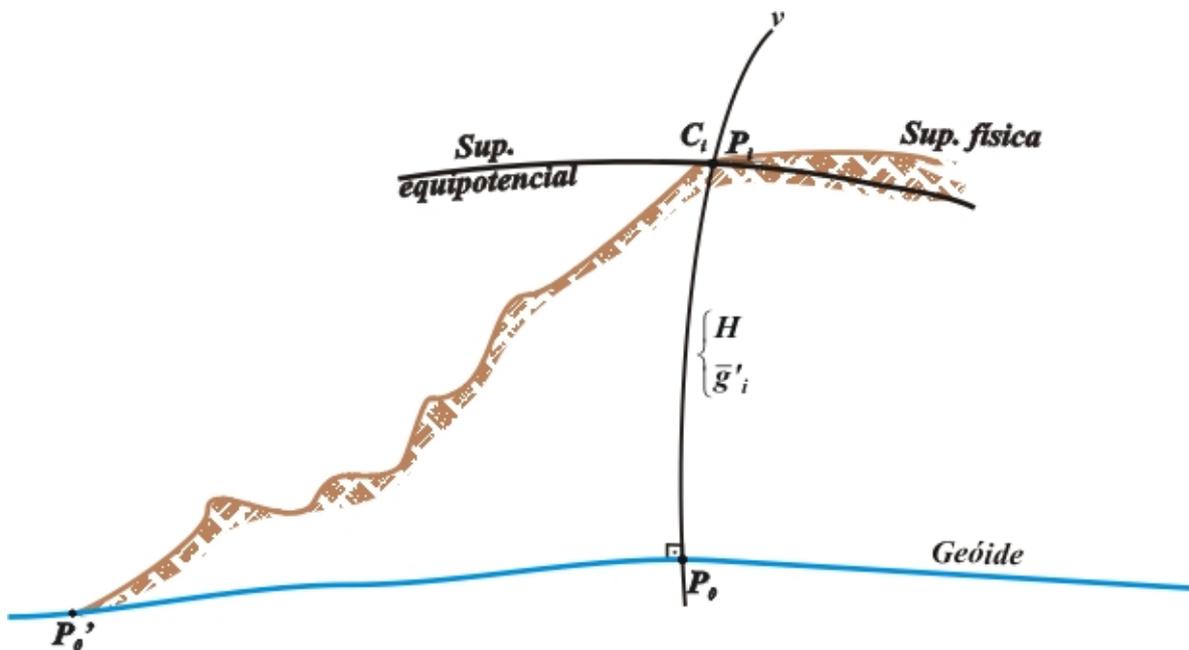


Figura 2.9 – Altitude ortométrica

O principal inconveniente da altitude ortométrica é a dificuldade em se obter  $\bar{g}'_i$ , pois não se conhece a distribuição de densidade no interior da Terra. Na prática, essa altitude não pode ser determinada exatamente (Heiskanen & Moritz, 1967). No entanto, utilizam-se

aproximações de  $\bar{g}'_i$  envolvendo informações complementares como, densidade, modelo crustal, modelo topográfico, entre outras. Assumindo hipóteses, surgem aproximações de  $\bar{g}'_i$  que conduz a um tipo especial de altitude ortométrica.

Dentre os métodos propostos, a altitude ortométrica de Helmert é a mais usada, sendo definida como (Jekeli, 2000):

$$H_i^H = \frac{C_i}{g_i^H} \quad (2.61)$$

com  $g_i^H$  obtida por:

$$g_i^H = g_i + 0,0424H_i \quad (2.62)$$

sendo  $g_i$  a gravidade em  $P_i$  na superfície terrestre e o fator 0,0424 é obtido com a redução de Poincaré-Prey, o qual fornece o valor de gravidade no interior da crosta (Jekeli,2000).

#### 2.2.4 Altitude normal

Como na prática não se pode determinar  $\bar{g}'_i$  (valor médio da gravidade ao longo da vertical), Molodenskij *et al.* (1960) introduziram o conceito de altitude normal  $H^N$  (Vaníček & Krakiwsky, 1986) na forma (Figura 2.10)

$$H_i^N = \frac{C}{\bar{\gamma}_i} \quad (2.63)$$

onde  $\bar{\gamma}_i$  é a gravidade normal média entre o elipsóide e o ponto de considerado.

A vantagem dessa altitude em relação à ortométrica é que, enquanto a gravidade real média é calculada na vertical entre os pontos de altitudes 0 (geóide) e  $H$  (terreno) e a

gravidade normal média é calculada na normal entre os pontos de altitude  $0$  (elipsóide) e  $H$  (teluróide) (Vanícek & Krakiwsky, 1986). A distância entre a superfície física e o teluróide é a anomalia de altitude, usualmente denotada por  $\zeta$  (Figura 2.10).

Para obter  $\bar{\gamma}_i$  a partir de  $\gamma_{0i}$ , Molodenskij propôs uma expressão precisa para o gradiente vertical de gravidade normal cuja altitude normal, definida dessa maneira, refere-se ao quase-geóide. Conseqüentemente, a altitude normal pode ser considerada como um tipo especial de altitude ortométrica referida ao quase-geóide (Vanícek & Krakiwsky, 1986). Mas há um inconveniente na adoção do quase-geóide em relação ao geóide, que é a falta de significado físico do quase-geóide. É apenas um artifício matemático, não se trata de uma superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra (Cordini, 1998).

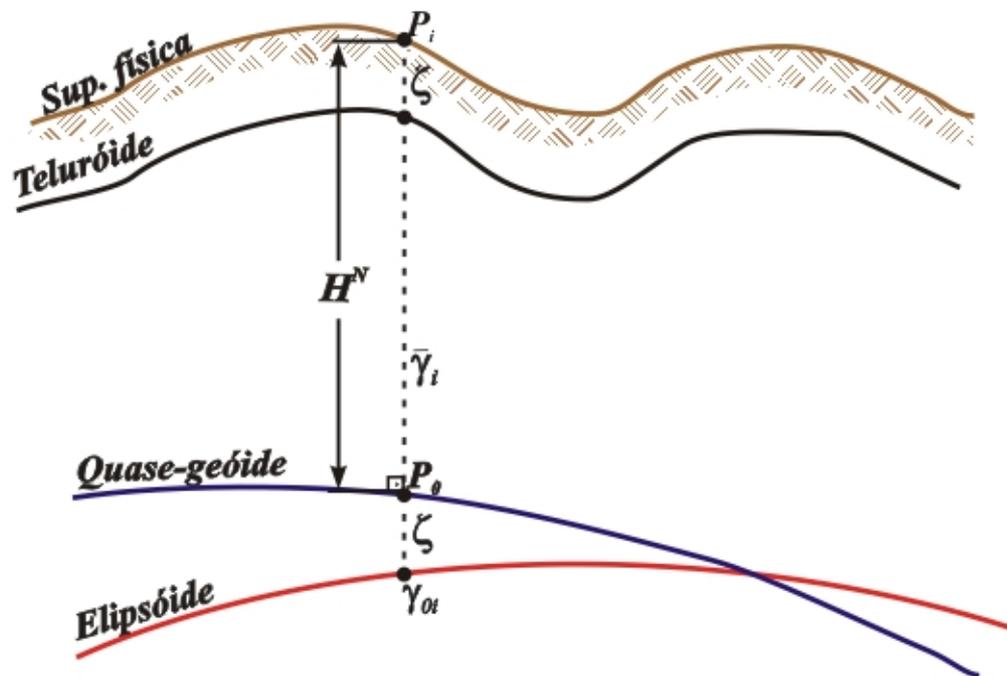


Figura 2.10 – Altitude Normal

### 2.2.5 Altitude geométrica

A altitude geométrica ou elipsoidal de um ponto é definida como a distância desse ponto a partir da superfície do elipsóide, medida ao longo da normal que passa pelo ponto (Figura 2.11). A altitude geométrica é obtida a partir das coordenadas cartesianas associadas a

um referencial geocêntrico, como o SIRGAS2000 adotado oficialmente no Brasil, determinadas com o GPS.

### 2.3 REDE ALTIMÉTRICA

As redes altimétricas são conjuntos de pontos materializados em chapas metálicas, fixadas em marcos ou estruturas de concreto, com altitudes ortométricas conhecidas. Essas redes são desenvolvidas por linhas de nivelamento geométrico que, ligadas entre si, formam um sistema de circuitos que se estendem por todo o país. Sua estrutura fundamental é destinada a apoiar o mapeamento, as grandes obras de Engenharia, projetos de saneamento básico, estradas e telecomunicações.

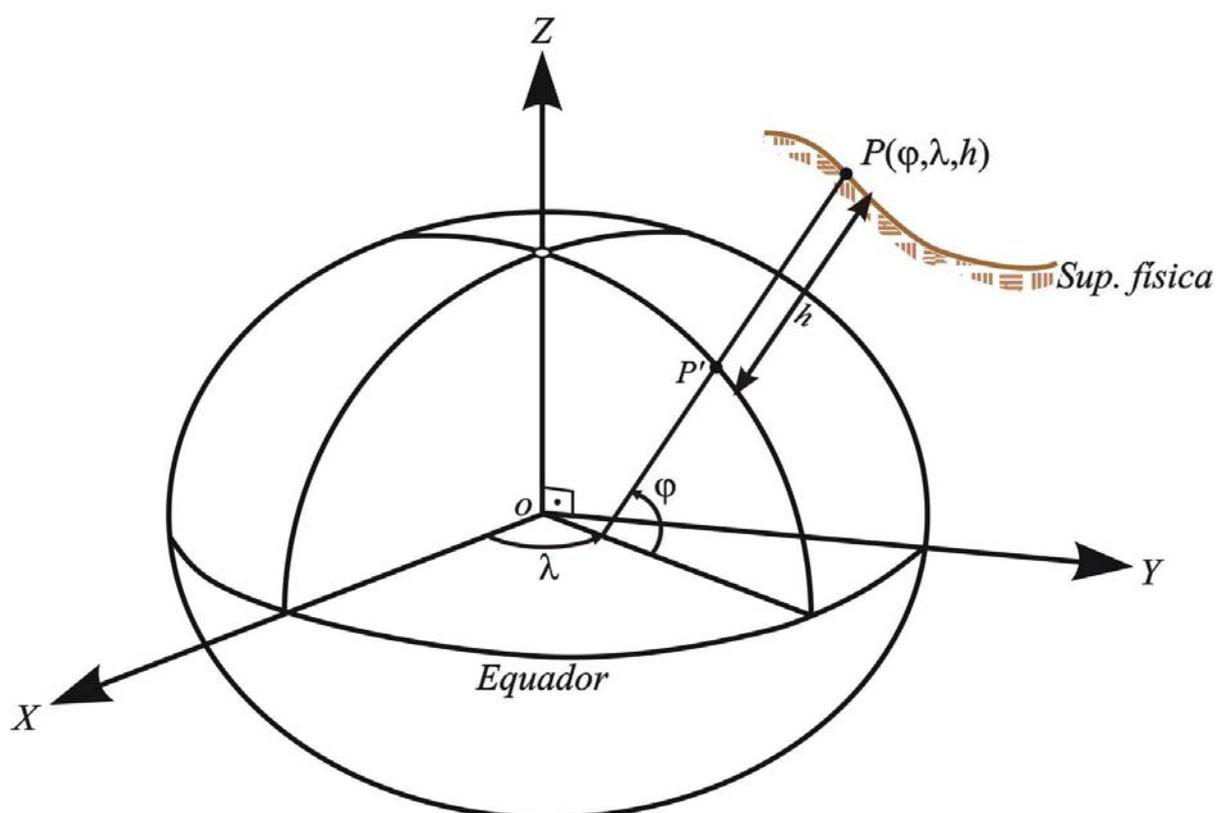


Figura 2.11 – Coordenadas elipsoidais

### 2.3.1 Histórico da rede altimétrica do Brasil

Como descreve Alencar (1968), em 13 de outubro de 1945, na região carbonífera do sul do Brasil, o IBGE deu início à implantação da RAFB a partir da RN 1-A, progredindo na direção norte do Brasil, pelas regiões com desenvolvimento econômico e demográfico (Figura 2.12a).

Em dezembro de 1946 foi realizada a conexão com a RN 4, determinada a partir do *Datum* de Torres, estabelecido pela estação maregráfica de Torres (RS), possibilitando o cálculo das altitudes em relação ao NMM das RNs já implantadas (Alencar, 1990).

Em 1958, quando a RAFB contava com mais de 30.000 quilômetros de nivelamento, o *Datum* de Torres foi substituído pelo *Datum* de Imbituba, definido pela estação maregráfica do Porto de Imbituba (SC) e materializado pela RN 4-X. Essa substituição trouxe uma melhora de definição do sistema de altitudes, uma vez que a estação de Imbituba contava na época com nove anos (1949-1957) de observações. No final da década de 70, as linhas de nivelamento geométrico chegaram aos pontos mais distantes do território brasileiro, nos Estados do Acre e de Roraima (Figura 2.12b). A partir da década de 80, foram iniciadas a densificação da rede nas áreas não cobertas anteriormente, assim como a reconstituição naquelas com alto índice de destruição (Luz *et al.*, 2002).

### 2.3.2 Nivelamento geométrico

O nivelamento geométrico consiste em determinar desníveis entre pontos, geralmente da superfície terrestre. O desnível  $\Delta H$  entre dois pontos adjacentes, ocupados por miras verticais, é determinado pela diferença entre as leituras de ré e de vante da respectiva mira. Assim, a diferença de altitude entre os pontos A e B é dada pelo somatório dos desníveis ao longo da linha de nivelamento que une esses pontos (Figura 2.1):

$$\Delta H_{AB} = \sum_{i=1}^n \Delta H_i \quad (2.64)$$

sendo  $n$  o número de desníveis entre A e B.

A altitude do ponto B é obtida a partir da altitude do ponto A e do respectivo desnível

$$H_B = H_A + \Delta H_{AB} \quad (2.65)$$

onde  $H_A$  é altitude ortométrica do ponto  $A$ , referida ao *Datum* vertical.

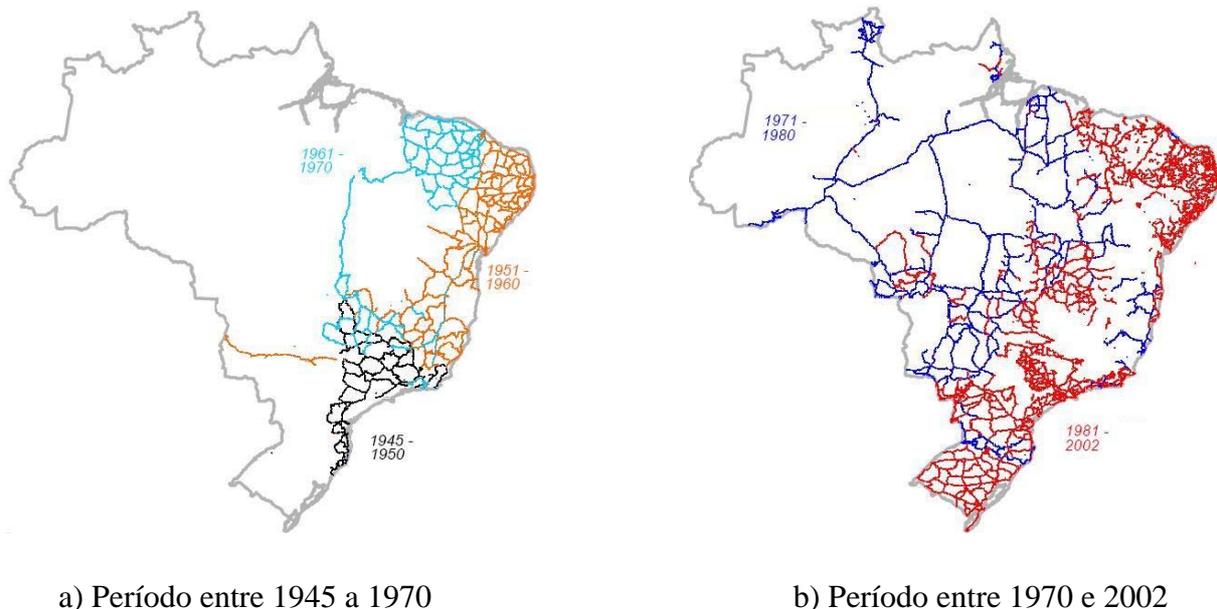


Figura 2.12 – Evoluções na implantação da RAFB (Luz *et al.*, 2002)

No Brasil, a rede altimétrica fundamental é projetada de forma que os itinerários do nivelamento formem polígonos fechados e/ou justaposto, com perímetros variando de 200 a 400 km, devidamente ligados ao *Datum* vertical (Figura 2.13). Um circuito, cujo comprimento máximo é da ordem de 100 km, é composto por linhas de nivelamento que interligam os pontos nodais da rede. As linhas, por sua vez, são formadas por seções com comprimento máximo de 3 km e conectam as estações adjacentes (IBGE, 1998). Os elementos da rede altimétrica são ilustrados na Figura 2.14.

Para reduzir o efeito de alguns erros nas operações de nivelamento, devem ser tomados alguns cuidados operacionais, tais como (Cordini, 1998): instalação do nível a igual distância de ré e vante, para evitar erros de colimação e neutralizar a influência da curvatura terrestre e da refração; limitação do comprimento da linha de visada para redução dos efeitos ambientais sobre as medidas; nivelamento e contra-nivelamento para evitar erros grosseiros.

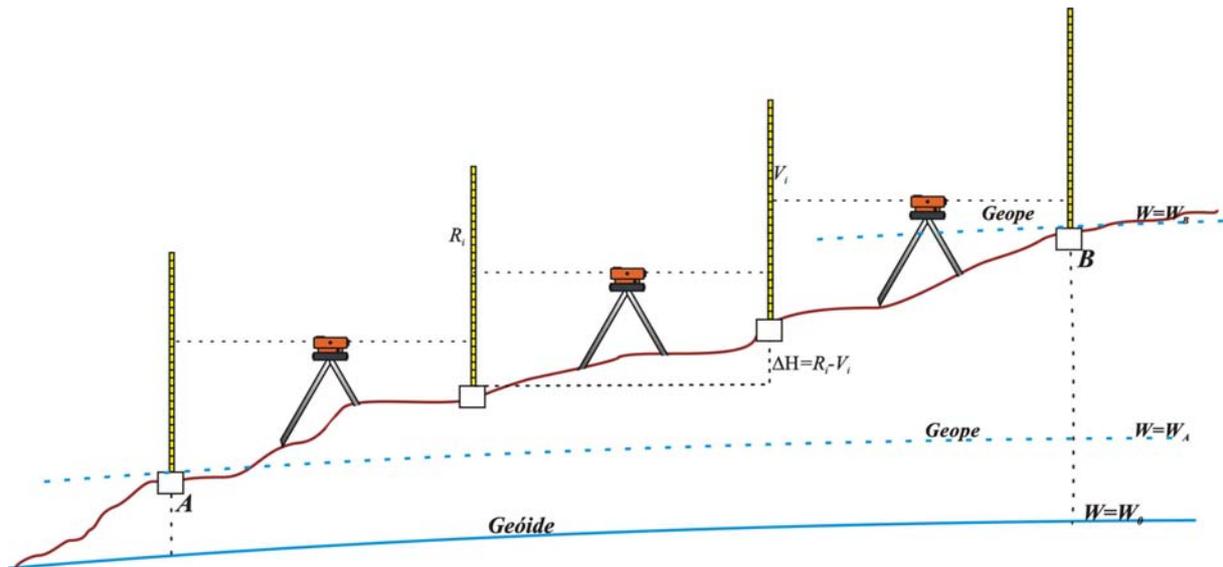


Figura 2.13 – Nivelamento Geométrico

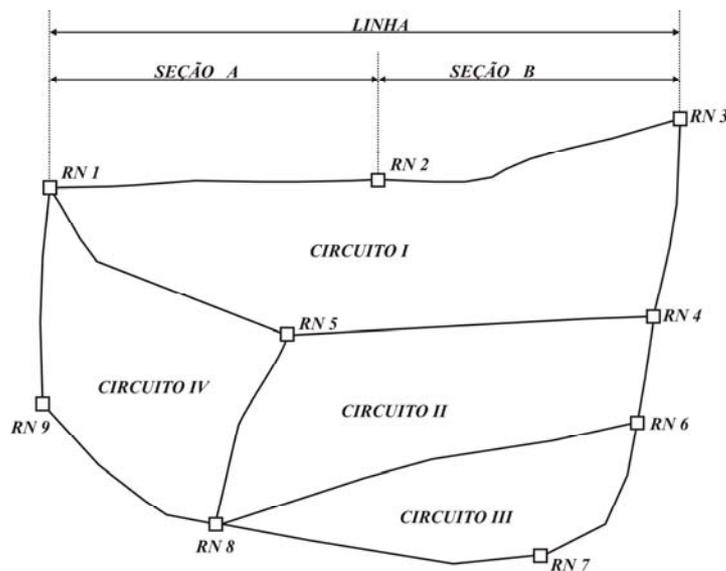


Figura 2.14 – Esquema de rede altimétrica

No nivelamento geométrico, os efeitos sistemáticos, que requerem cuidados especiais, são os seguintes (Bomford, 1983):

- Refração atmosférica: dentre todas as influências, é a que mais exige cuidado. Resulta do efeito de curvatura da linha de visada, causado pela variação de densidade das camadas da atmosfera, que está diretamente ligado à mudança de temperatura do ar;

- Colimação inadequada do nível: efeito da defasagem angular entre a linha de visada e a horizontal, associada ao processo de materialização da horizontalidade da linha de visada, surge com o uso contínuo do aparelho, evidenciando imperfeições no processo de materialização da linha de visada horizontal;
- Verticalidade incorreta da mira: efeito do deslocamento da mira em relação à direção da vertical em cada estação. Para minimizar esse efeito, deve-se usar níveis de bolha adaptados à mira e evitar trabalhos de campo em dias de vento forte;
- Erro de graduação: trata-se do efeito devido às incertezas nas graduações da mira, podendo ser eliminado pela calibração;
- Maré terrestre: efeito do desvio da vertical, causado pela componente horizontal do campo de maré gerado pela interação gravitacional da Terra com outros corpos celestes, principalmente sol e lua por estarem mais próximos.

Os desníveis observados nas redes de nivelamento dependem do percurso seguido no nivelamento, ou seja, para cada caminho escolhido, será obtido um valor diferente para a altitude do ponto  $P$  (Figura 2.15). Isso ocorre por causa da forma elipsoidal e outras irregularidades menores na distribuição de massa da Terra, tornando as superfícies equipotenciais não paralelas, significando que o requisito básico para determinação unívoca da altitude não é cumprido.

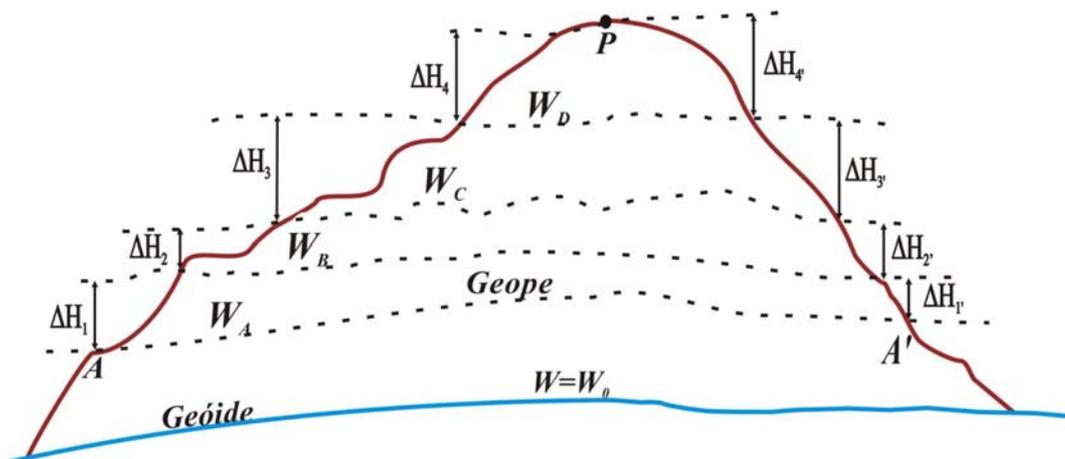


Figura 2.15 – Superfícies equipotenciais não paralelas

A única forma de tornar unívoca a determinação da altitude ortométrica, obtida pelo nivelamento geométrico, é introduzir uma correção que elimine o efeito do não paralelismo

das superfícies equipotenciais, denominada correção ortométrica. A introdução dessa correção dá um significado físico às altitudes (Cordini, 1998). Na prática, no entanto, só há soluções aproximadas para esse problema.

Em alguns países, inclusive no Brasil, a correção ortométrica, aplicada nas redes de nivelamento, elimina o efeito da variação da distância entre as geópes, conforme a variação de latitude. Ela independe de observações gravimétricas e é aplicada diretamente no desnível bruto medido, sendo ela dada por (Gemael, 2002):

$$\delta H = 1542 \times 10^{-9} H_m \delta \varphi' \operatorname{sen}(2\varphi) \quad (2.66)$$

onde  $\delta \varphi'$  é a variação em latitude da linha de nivelamento, em minutos de arco,  $\varphi$  é a latitude média do trecho e  $H_m$  é a altitude bruta média do trecho, cuja expressão tem a forma:

$$H_m = \frac{H_0 s_0 + H_n s_n - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} H_i (s_{i-1} + s_i)}{2 \sum_{i=0}^{n-1} s_i} \quad (2.67)$$

na qual  $s_0$  é a distância do ponto inicial ao 2º ponto da linha e  $s_{i-1}$ , a distância entre o anterior e o ponto  $i$ .

### 2.3.3 Datum altimétrico

O Datum altimétrico é uma superfície de referência, materializada por uma ou mais estações maregráficas, que possibilita a obtenção de altitude ortométrica de um ponto qualquer na superfície física terrestre (Rapp & Balasubramania, 1992).

A determinação do NMM (Figura 2.16), por meio de registros maregráficos, envolve diversos efeitos sistemáticos. Tais, efeitos separam o NMM do geóide, cuja esta separação é denominada Topografia do Nível Médio dos Mares (TNMM). As principais causas desses efeitos são: marés oceânicas, variações da pressão atmosférica, correntes marinhas, mudanças dos ventos, variações da densidade associadas à temperatura, pressão e salinidade, flutuações nas descargas dos rios, alterações nas feições batimétrica e fusão glacial, entre outras

(Vanicek & Krakiwsky, 1986).

As variações periódicas do nível do mar, em grande parte, são eliminadas no processo de filtragem na determinação do NMM. No entanto, influências não periódicas, como algumas componentes de maré, efeitos oceanográficos e meteorológicos, afetam o valor médio (Escobar, 1991).

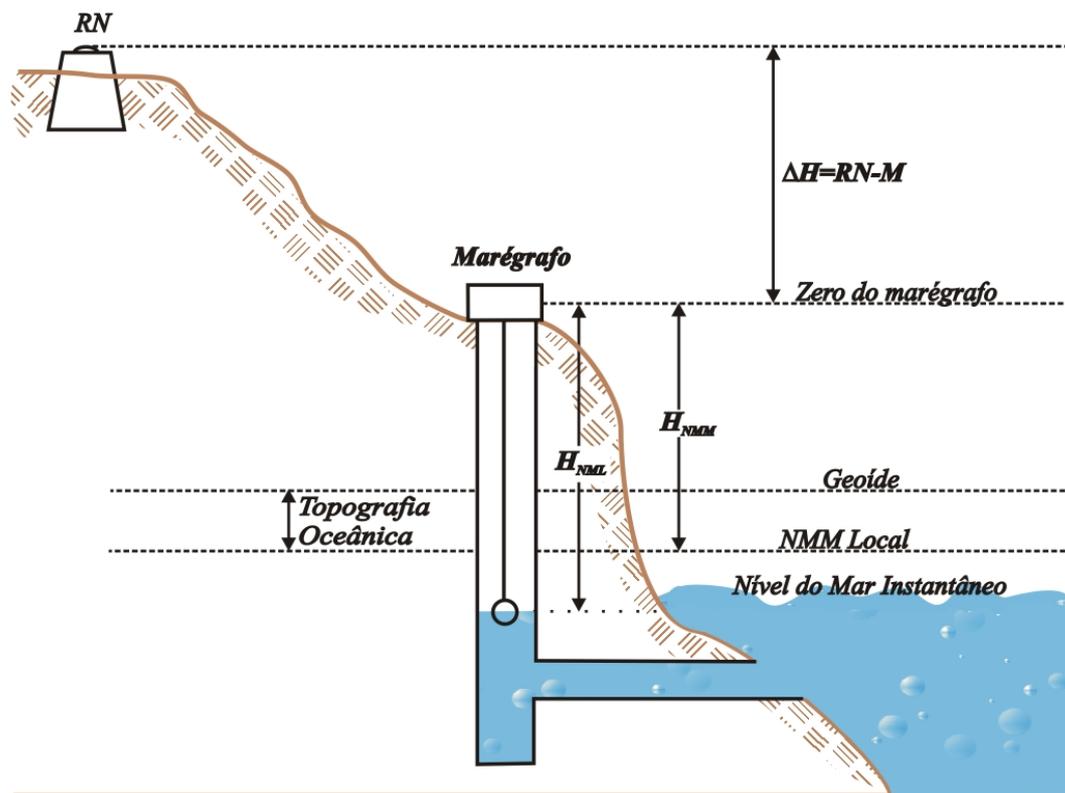


Figura 2.16 – Esquema de um *Datum* altimétrico convencional

### ***Datum altimétrico da RAFB***

A implantação da RAFB iniciou com adoção do *Datum* altimétrico de Torres, cujo NMM foi obtido a partir das observações do nível do mar coletadas no período de um ano (1919–1920). Em 1958, o *Datum* de Torres foi substituído pelo *Datum* de Imbituba, que nessa época já contava com um período de nove anos de observações (1949–1957), sob cuidados do *Inter Americam Geodetic Survey* (IAGS), permitindo a redefinição de forma mais precisa do *Datum* altimétrico do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), como descreve Alencar (1990). A

conexão do nivelamento existente foi realizada pela RN 4-X, que está diretamente vinculada ao NMM fornecido pelo marégrafo de Imbituba.

A implantação da RAFB possibilitou a interligação do marégrafo de Imbituba com outros instalados no litoral brasileiro, a fim de investigar a variabilidade do NMM ao longo da região costeira (Alencar, 1990), como ilustra a Figura 2.17.

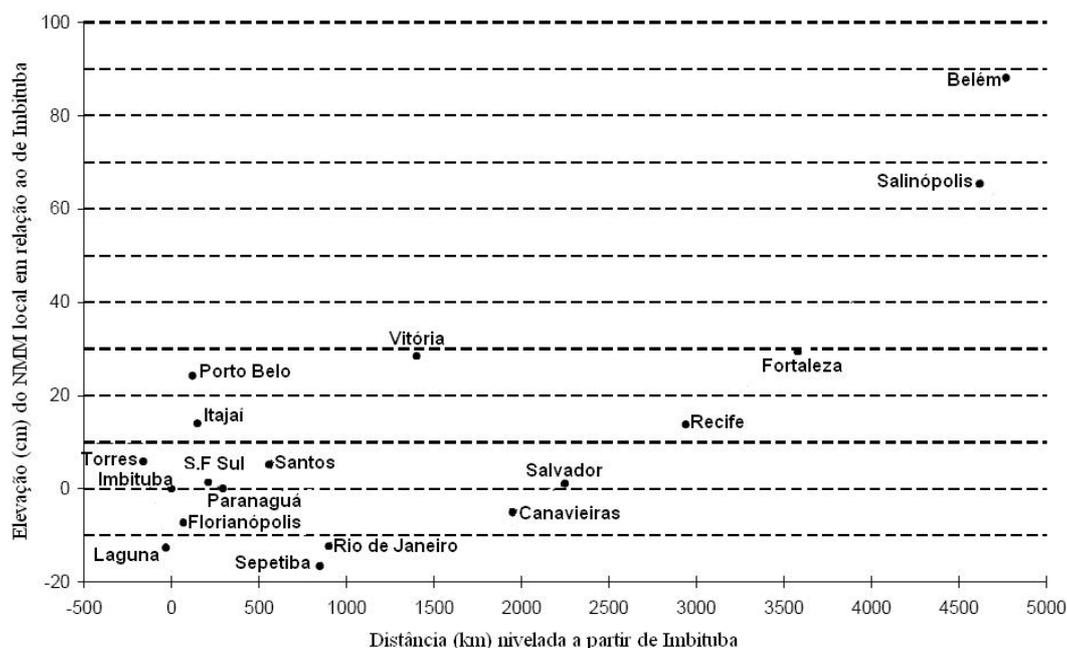


Figura 2.17 – Diferenças entre os NMM locais e o *Datum* de Imbituba (Alencar, 1990)

Nas regiões mais distantes, como é o caso da costa norte, os erros propagados no nivelamento geométrico atingem valores elevados, em torno de 13 cm, como pode ser visto na Figura 2.18. Essa degradação da precisão decorre da definição do *Datum* vertical baseada em um único ponto. Além disso, como não é possível cruzar o rio Amazonas com nivelamento geométrico, a porção de rede localizada no Estado do Amapá está referida ao *Datum* local de Santana (Luz & Guimarães, 2001). Com isso, houve a necessidade de instalar e manter uma rede de estações maregráficas permanente ao longo da costa brasileira. Assim, o IBGE idealizou, em 1997 a Rede Maregráfica Permanente para Geodésia (RMPG), com estações nos seguintes locais: Imbituba, Macaé, Salvador, Fortaleza e Santana (Figura 2.18). Os objetivos da RMPG são os seguintes: monitorar as diferenças entre o *Datum* de Imbituba e os diversos níveis de referência, definidos ao longo do litoral brasileiro, e acrescentar mais um caminho para a integração das modernas técnicas da Geodésia Espacial ao SGB, servindo

também como instrumento de transição para futuro *Datum* Vertical do Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas (DVSIRGAS) (Luz & Guimarães, 2001; Luz *et al.*, 2002). Essas estações já foram ocupadas na Campanha GPS SIRGAS 2000 e, em breve, a fazer parte também da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC) (Luz & Guimarães, 2003).

### ***Datum altimétrico SIRGAS***

Devido ao sucesso alcançado pelo projeto SIRGAS, seus objetivos foram redefinidos, visando incorporar a definição do *Datum* vertical para as Américas, o DVSIRGAS. Em 1997, na Assembléia Científica da IAG, foram discutidos os desdobramentos do projeto com relação à componente altimétrica do sistema de referência. Assim, foi criado o Grupo de Trabalho sobre *Datum* Vertical (GT III).

As primeiras recomendações do GT III apresentadas foram (Drewes *et al.*, 2002):

- O DVSIRGAS será definido por dois tipos de altitudes: as geométricas, referidas ao *Datum* SIRGAS, e as físicas, baseadas em números geopotenciais;
- Realização do sistema de referência vertical por um conjunto de estações com nivelamento geométrico, medições gravimétricas e coordenadas geodésicas, referidas ao sistema SIRGAS, incluindo os marégrafos que definem o *Datum* vertical clássico em cada país;
- Organização dos levantamentos de dados necessários para o cálculo dos números geopotenciais, sendo eles os elementos principais para a obtenção de altitudes físicas.

O GT III recomendou aos países associados ao SIRGAS que as altitudes vinculadas a este sistema sejam do tipo normal, isto é, obtidas por meio razão entre os números geopotenciais e o valor teórico da gravidade (Luz *et al.*, 2004).

O DVSIRGAS deverá unificar e aprimorar os sistemas de altitudes sul-americanos, integrando observações de nivelamento, gravidade e GPS, para definir um conjunto de altitudes fisicamente significantes e eliminando as diferenças entre as altitudes de cada *Datum* nacional nas áreas de fronteira, otimizando a realização de projetos conjuntos de mapeamento e engenharia.

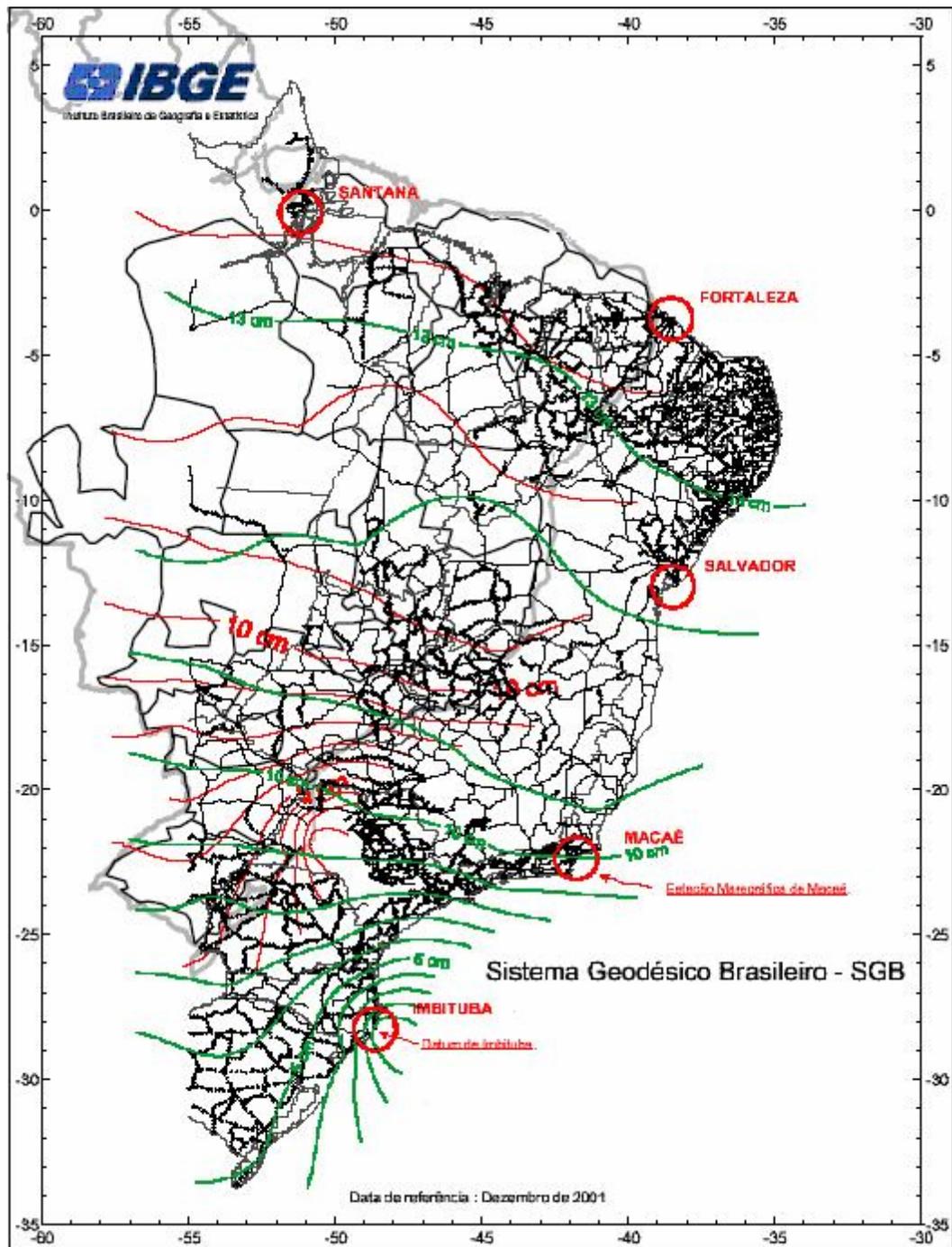


Figura 2.18 – Propagação dos erros do nivelamento geométrico e as estações da Rede Maregráfica Permanente para Geodésia (IBGE, 2005)

## 2.4 O SISTEMA GPS

O *Global Positioning System* (GPS) foi concebido pelo *US Department of Defense* no

início da década de 1960, e tem como objetivo principal a navegação. Assim, o sistema foi projetado de forma que em qualquer lugar do mundo e a qualquer instante haja pelo menos quatro satélites GPS acima do horizonte no local usuário. Essa configuração possibilita a determinação da posição, velocidade e do tempo de qualquer ponto na superfície da Terra ou em suas proximidades, em um sistema de referência apropriado (Leick, 1990).

A medição do vetor-posição da antena ( $r_A$ ), que recebe o sinal emitido pelos satélites (Figura 2.19), constitui a finalidade principal no sistema GPS (Seeber, 1993). Os fundamentos básicos do GPS baseiam-se na determinação da distância entre um ponto, o receptor ( $r_A^S$ ), a outros de referência, os satélites. Conhecendo as coordenadas do satélite em um sistema de referência apropriado, ( $r_S$ ), é possível calcular as coordenadas da antena do receptor no mesmo sistema de referência do satélite. Geometricamente, seria necessário determinar as distâncias do receptor a apenas 3 satélites, mas, na verdade, são necessários, no mínimo 4 satélites para determinar a posição corretamente, isto se deve ao não sincronismo dos relógios do satélite e receptor, gerando um erro denominado erro do relógio do receptor. Então, para sincronizar os relógios do satélite e receptor, uma nova incógnita ( $dt$ ) é adicionada ao modelo matemático. A distância ( $r_A^S$ ) é dada por:

$$r_A^S = c \left| (t_r + dt) - (t^e + dT) \right| = |\vec{r}_S - \vec{r}_A| + cdt - cdT = \left[ (x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 + (z_S - z_A)^2 \right]^{1/2} + c(dt - dT) \quad (2.68)$$

onde os subscritos  $A$  e  $S$  representam, respectivamente, a antena satélite; e  $r_A^S$  é a distância entre a antena do receptor e o oscilador do satélite;  $c$  é a velocidade da luz;  $t_r$ : instante de recepção do sinal;  $t^e$  é o instante de emissão do sinal;  $dt$  o erro do relógio do receptor;  $dT$  o erro do relógio do satélite;  $x_s$  a coordenada cartesiana do satélite na abscissa,  $x_a$  a coordenada cartesiana do antena na abscissa;  $y_s$  a coordenada cartesiana do satélite na ordenada;  $y_a$  a coordenada cartesiana da antena na ordenada;  $z_s$  a coordenada cartesiana do satélite na altura, e  $z_a$  a coordenada cartesiana da antena na altura.

Cada satélite transmite um sinal que é recebido pelo receptor; este, por sua vez, mede o tempo do percurso do sinal codificado. Multiplicando o tempo medido pela velocidade da luz, ou pela medição da fase da onda portadora, obtém-se a distância receptor-satélite. A

determinação do vetor-posição dos satélites rastreados no instante  $t$  requer o conhecimento da dinâmica dos satélites contidos nas “efemérides transmitidas”, emitidas nos sinais dos satélites (Seeber, 1993).

O sistema GPS permite que um usuário, em qualquer local da superfície terrestre, tenha no mínimo quatro satélites visíveis para serem rastreados em tempo real. Uma das grandes vantagens oferecidas pela tecnologia GPS é o fato de não haver necessidade de intervisibilidade entre as estações sob quaisquer condições climáticas (Monico, 2000).

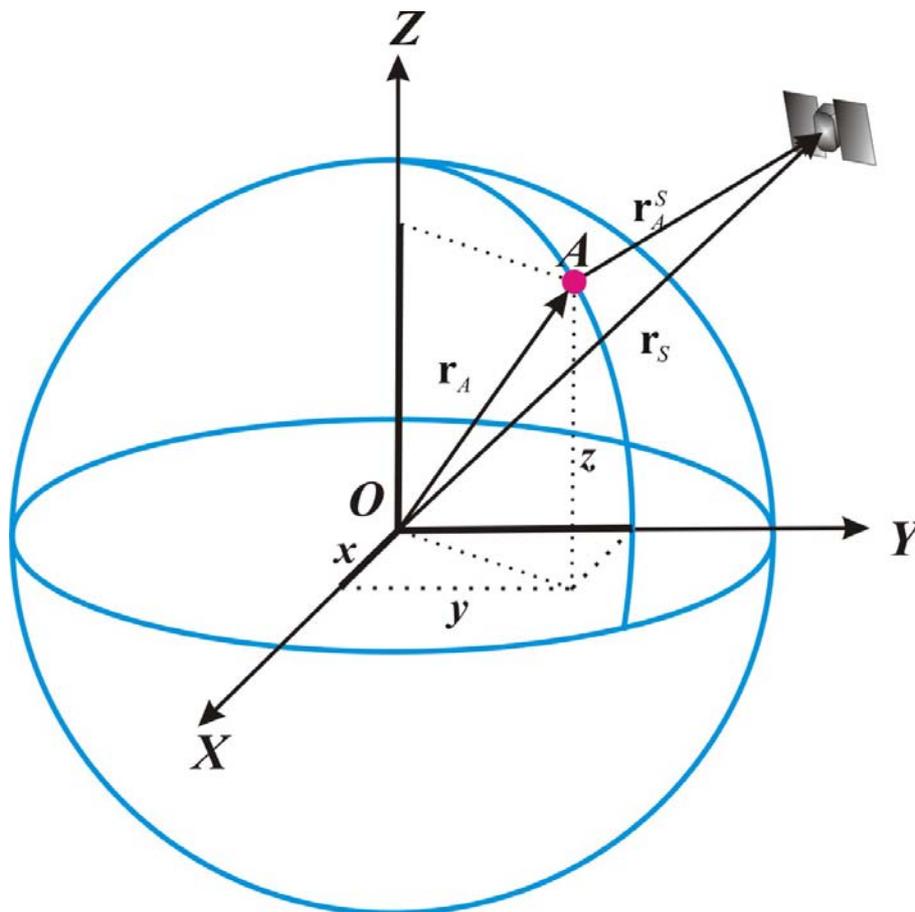


Figura 2.19 – Princípio básico do posicionamento por GPS

### 2.4.1 Segmentos do GPS

Para atingir seus objetivos, o sistema GPS foi estruturado em 3 segmentos (Figura 2.20): o segmento espacial, composto pelos satélites que emitam os sinais; o segmento de

controle, composto pelas estações de rastreamento terrestres, e o segmento do usuário, que utiliza o sistema GPS em diversas aplicações (Hofmann–Wellenhof *et al.*, 1994).

### a) Segmento espacial

O segmento espacial consiste em uma constelação de 24 satélites, orbitando a uma altitude aproximada de 20.000 km, distribuídos em 6 planos orbitais; cada órbita com inclinação de  $55^\circ$  em relação ao plano equatorial terrestre e cada satélite com um período de revolução de 12 horas siderais.

O objetivo do segmento espacial é gerar e transmitir os sinais GPS, que são derivados da frequência fundamental  $f_0 = 10,23 \text{ Mhz}$ , da seguinte forma:

$$\text{Ondas portadoras: } L1 = 154 \cdot f_0 = 1575,42 \text{ Mhz} \quad (\lambda \cong 19,0 \text{ cm}) \quad (2.69)$$

$$L2 = 120 \cdot f_0 = 1227,60 \text{ Mhz} \quad (\lambda \cong 24,4 \text{ cm}) \quad (2.70)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento da onda.

A portadora L1 contém dois códigos modulados, o código C/A (*Coarse/Acquisition*) e o código P (*Precise/Protected*); a portadora L2, apenas o código P. As portadoras são moduladas com uma mensagem de navegação contendo informações sobre as condições operacionais e posição dos satélites (efemérides transmitidas).

### b) Segmento de controle

O segmento de controle é constituído por 5 estações de monitoração, 3 estações de controle, e a estação principal (Monico, 2000). Além de ser responsável pela operação do sistema GPS, esse segmento tem como finalidade básica atualizar a mensagem de navegação transmitida pelos satélites. Na estação principal são processados os dados, transmitidos pelas estações de monitoração, para determinar as efemérides e as correções com os relógios dos satélites. Os resultados são transferidos para as estações de controle para injeção dos dados dos satélites.

O posicionamento de alta precisão requer efemérides mais precisas do que as transmitidas pelos satélites, o que tem levado diversos grupos a desenvolver pesquisas na determinação de órbitas a partir de redes globais como a International GNSS Service (IGS). Os resultados são divulgados pela *internet* cerca de 10 dias após a coleta dos dados.

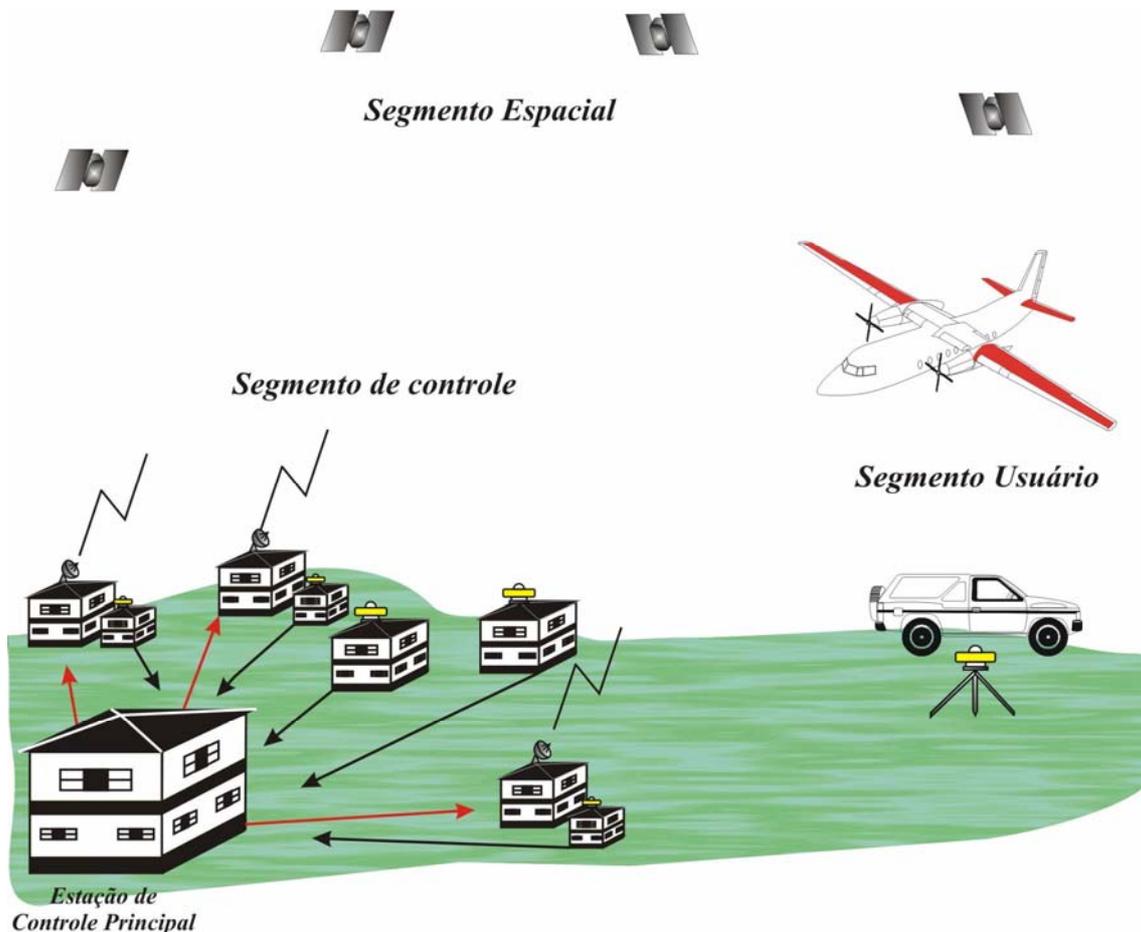


Figura 2.20 – Segmentos do sistema GPS

### c) Segmento do usuário

Este segmento envolve tudo o que relaciona com o usuário, visando o posicionamento e determinação de velocidade ou tempo. São os receptores, algoritmos, *software* para processamento, metodologias e técnicas de levantamentos, entre outros. Os receptores são constituídos basicamente de uma antena, um pré-amplificador e uma unidade onde estão integrados todos os elementos eletrônicos necessários ao controle, registro e visualização dos

dados.

### 2.4.2 Observações GPS

As observações básicas transmitidas pelos satélites do sistema GPS que permitem determinar posição, velocidade e tempo são: a pseudodistância obtida a partir do código e a fase da onda portadora (Mônico, 2000). A pseudodistância corresponde à distância entre antena do satélite e a antena do receptor GPS, no instante da recepção do sinal. Ela é obtida a partir da velocidade da luz, multiplicada pelo intervalo do tempo decorrido no deslocamento do sinal. É denominada pseudodistância em razão do não sincronismo entre os relógios do satélite e do receptor. A medição de tempo é realizada utilizando os códigos P e/ou C/A. Para determinar o intervalo de tempo, o receptor gera uma réplica do código e o compara com o código recebido, usando a técnica de correlação cruzada (Seeber, 1993).

A medida da fase da onda portadora é realizada a partir da diferença entre a fase gerada pelo satélite, no instante da transmissão do sinal, e sua réplica gerada pelo receptor, no instante de recepção de sinal. O comprimento de onda da portadora é muito mais curto que o comprimento do código, daí sua medida permitir atingir um nível de precisão superior ao da pseudodistância. No entanto, existe o problema do desconhecimento da ambigüidade de ciclo, ou seja, o número total de ciclos completos decorridos desde que o sinal deixou o satélite até o instante da sintonia. Há uma ambigüidade de ciclo para cada par receptor-satélite desde que não haja perda momentânea de sinal, nesse caso, uma nova ambigüidade é adicionada (Segantine, 1995).

### 2.4.3 Fontes de erros do sistema GPS

Atualmente, o GPS é um dos sistemas mais confiáveis para a realização do posicionamento espacial. Contudo, suas observações contêm os inevitáveis erros observacionais, cujo tratamento é importante para obtenção de resultados precisos. O posicionamento por GPS está sujeito a erros relacionados com os satélites, a propagação do sinal, o receptor/antena, a estação e a geometria inadequada dos satélites. Na Tabela 2.2, é apresentada uma subdivisão das fontes de erros e seus efeitos, outras podem ser encontradas em Monico (2000) e Seeber (1993).

Tabela 2.2 - Erros envolvidos nas observações GPS (Monico, 2000)

<i>Fonte</i>	<i>Erro</i>
Satélite	Erro da órbita
	Erro do relógio
	Relatividade
	Atraso entre as duas portadoras no <i>hardware</i> satélite
Propagação do Sinal	Refração troposférica
	Refração ionosférica
	Perdas de ciclos
	Multicaminho
	Rotação da Terra
Receptor/Antena	Erro do relógio
	Erro entre os canais
	Centro de fase da antena
Estação	Erro nas coordenadas
	Multicaminho
	Marés terrestres
	Movimento do pólo
	Carga dos oceanos
	Pressão da atmosfera

### a) Geometria dos satélites

A distribuição espacial dos satélites, no instante das observações, tem muita influência na qualidade e na propagação dos erros. Dependendo do momento da observação, a geometria dos satélites pode não ser adequada para a realização do posicionamento. Quanto mais esparsos os satélites estiverem no céu, mais adequada é a geometria dos satélites e melhor a precisão das observações. Assim, se um receptor GPS estiver recebendo sinais de 4 satélites posicionados na mesma região do céu, sua geometria é inadequada para o posicionamento (Figura 2.21).

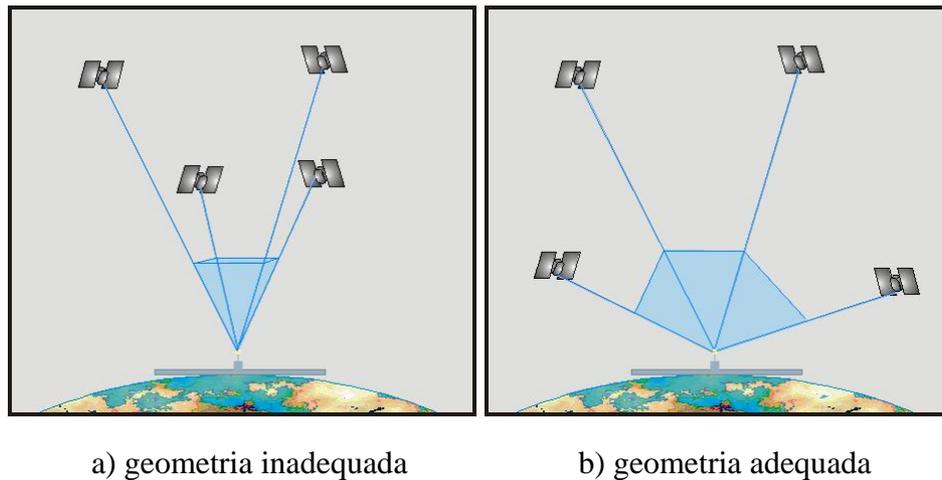


Figura 2.21 – Geometria espacial dos satélites

O sistema GPS não consegue evitar o efeito da imprecisão causada pela geometria inadequada dos satélites; no entanto, há técnicas disponíveis que conseguem reduzir esse efeito. Para isso, é necessário fazer um planejamento para observações e realizá-las nos horários em que o *dilution of precision* (DOP) estiver baixo. O fator DOP é um escalar que descreve o efeito da distribuição geométrica dos satélites na precisão obtida no posicionamento.

Os principais tipos de DOP são: *HDOP* - efeito da posição espacial dos satélites nas coordenadas geográficas; *VDOP* - efeito da posição espacial na determinação da altitude; *PDOP* - efeito da posição espacial no posicionamento tridimensional, e o *TDOP* - efeito na determinação do tempo (Seeber, 1993). O *PDOP* pode ser interpretado geometricamente como o inverso do volume  $V$  de um tetraedro formado pelas posições da antena do receptor e dos satélites ( $PDOP = 1/V$ ). A melhor configuração geométrica ocorre quando o volume é maximizado, implicando em um *PDOP* mínimo, ou seja, quanto menor o PDOP, melhor a geometria dos satélites.

### b) Efeitos atmosféricos

Os sinais emitidos pelos satélites propagam-se através da atmosfera terrestre, dividida em troposfera e ionosfera, cada uma com características diferentes. Assim, os sinais transmitidos pelos satélites sofrem influências que produzem variações na direção e velocidade de propagação, polarização e potência do sinal (Seeber, 1993).

A ionosfera é caracterizada pela presença de elétrons livres, e está localizada entre 50

a 1000 km acima da superfície terrestre. Quando as ondas encontram elétrons livres na atmosfera terrestre, há um atraso na modulação da portadora, conhecido como atraso da ionosfera. Esse fenômeno aparentemente aumenta o caminho percorrido pelo sinal emitido (Segantine, 1995).

A troposfera localiza-se entre a superfície terrestre e a ionosfera. Nessa região, ocorre refração dos sinais emitidos pelos satélites, ocasionando um atraso em sua propagação. Esse atraso depende da temperatura, umidade e pressão, que variam com a altitude do local (Segantine, 1995).

Os efeitos da refração ionosférica podem ser minimizados ou eliminados quando se dispõem das observações das portadoras L1 e L2 que é conhecida como “*ion-free*” (“*ionospheric free observation*”) ou portadora L3 (Monico, 2000). A utilização de receptores de simples frequência em bases longas condiciona o usuário a negligenciar esses efeitos, devendo recorrer ao uso de um modelo da ionosfera. Entretanto, no posicionamento relativo, usando receptores de simples frequência e distâncias curtas entre as estações (10 a 20 km), os erros devidos ao efeito da ionosfera são praticamente eliminados, pois são altamente correlacionados nas duas estações.

### **c) Multicaminho**

O erro causado pelo multicaminho (Figura 2.22) ocorre quando há um desvio do sinal, ao atingir um corpo qualquer e sofre reflexão antes de chegar à antena do receptor. É causado por superfícies próximas às estações, principalmente vegetação e edificações.

## **2.4.4 Métodos de posicionamentos por GPS**

O posicionamento consiste em determinar a posição de pontos por meio de coordenadas associadas a um referencial adotado (Mônico, 2000). Conforme o referencial e a estratégia usada, o posicionamento por GPS pode ser classificado como absoluto ou relativo.

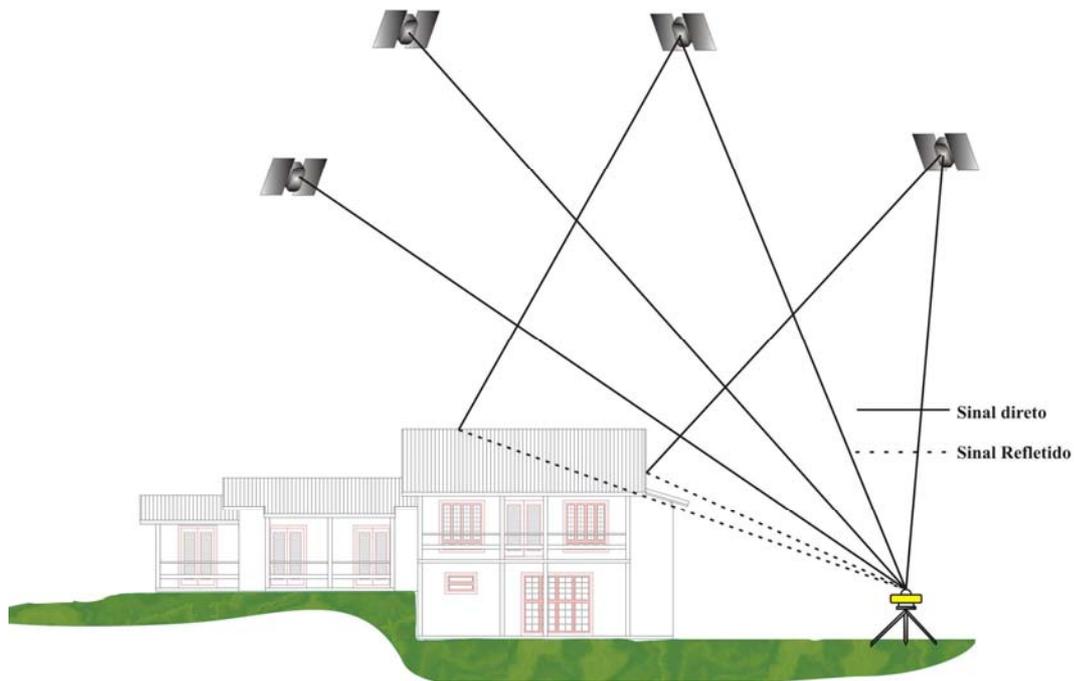


Figura 2.22 – Multicaminho

O posicionamento absoluto (Figura 2.23) baseia-se nas efemérides transmitidas e o ponto é determinado em relação a um sistema de referência geocêntrico, geralmente o WGS 84, utilizando apenas um receptor (Monico, 2000; Leick, 1995). Para sua realização é utilizada a pseudodistância, derivada do código C/A presente na portadora L1, e apresenta acurácia de cerca de 15 m, sendo utilizado em navegação de baixa precisão e em levantamentos expeditos (Santos, 2005).

O posicionamento relativo (Figura 2.24), caracteriza-se pelas observações simultâneas dos mesmos satélites, em 2 ou mais estações, entre as quais pelo menos uma deve ter coordenadas conhecidas. Um receptor é instalado na estação de referência ( $A$ ) e outro no ponto a ser posicionado ( $P_i$ ). As observações são pós-processadas com o objetivo de determinar as componentes  $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$  do vetor posição desse ponto em relação à estação de referência (Leick, 1995). Após o processamento as componentes são somadas as coordenadas da estação de referência e, assim, obtém-se as coordenadas do ponto desejado.

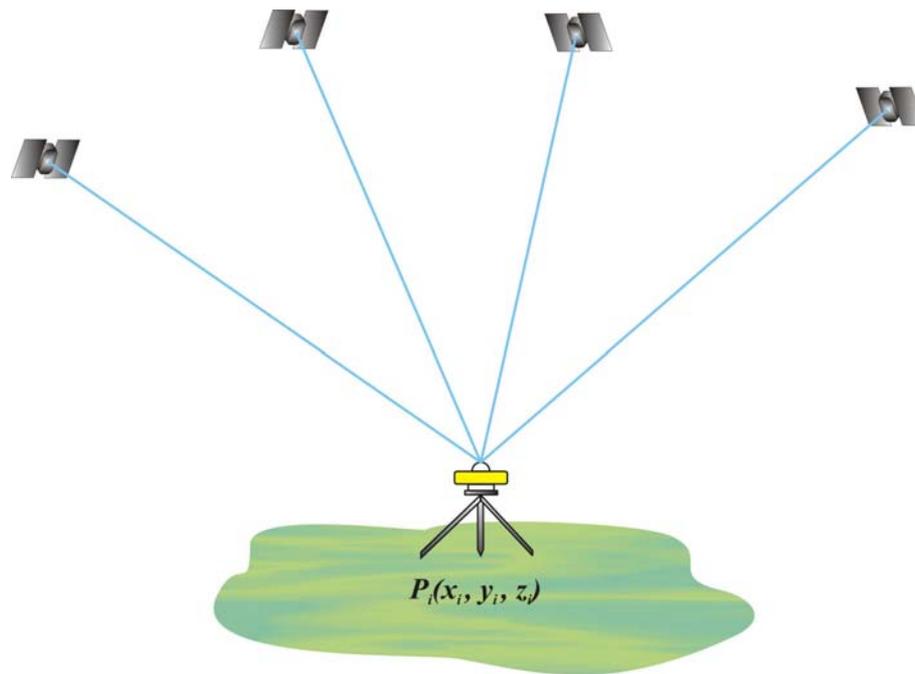


Figura 2.23 – Princípio do posicionamento absoluto

O posicionamento relativo tem maior acurácia que o absoluto por reduzir os efeitos de erros sistemáticos. Em levantamento geodésico de alta precisão é utilizado o posicionamento relativo com observações da fase da onda portadora, por ser mais precisa do que a pseudodistância. Atualmente, com a implantação das redes ativas, como a RBMC, essa técnica pode ser usada mesmo quando o usuário possuir apenas um receptor, pois os dados coletados pelas estações dessas redes podem ser usadas no processamento.

O posicionamento relativo pode ser dividido em estático (estático rápido e estático convencional) e cinemático (semi-cinemático e cinemático), os quais diferem principalmente quanto à duração da sessão, deslocamento da antena durante o rastreamento e a forma de resolução das ambigüidades. Se envolver dois receptores é denominado posicionamento com base simples; se envolver três ou mais receptores, posicionamento com multi-estações (Rodrigues, 2002). Este, apresenta vantagem no ajustamento por proporcionar maior número de observações.

O posicionamento relativo estático é usado em levantamentos que requeiram alta precisão, como a rede GPS, cujos dados foram usados neste trabalho.

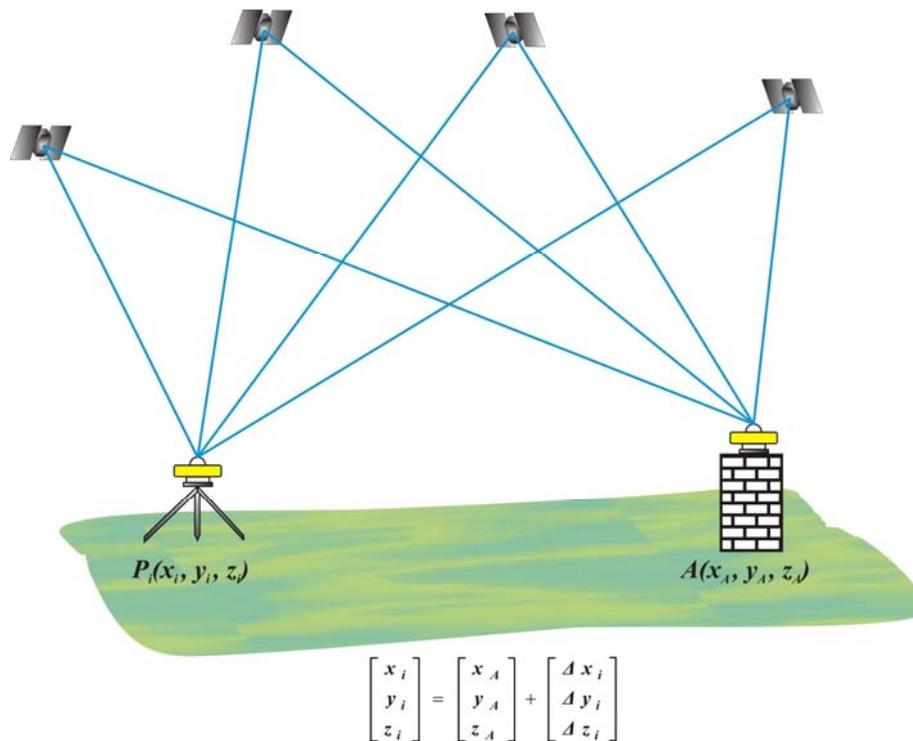


Figura 2.24 – Princípio do posicionamento relativo

### 2.4.5 Altimetria por GPS

Apesar dos avanços científicos e tecnológicos, o nivelamento clássico atravessou o último século sem ser substituído ou modificado. No entanto, com uso do GPS combinado com modelos geoidais, é possível substituir o nivelamento tradicional pelo método espacial, com os benefícios de simplicidade operacional, de rapidez e de baixo custo oferecidos pelo GPS (Fotopoulos, 2003). A determinação da altitude ortométrica por GPS, dependendo dos elementos envolvidos, pode ser no modo absoluto ou relativo. No modo absoluto, a altitude ortométrica é determinada a partir da altitude geométrica ( $h$ ) e da altura geoidal ( $N$ ) do ponto considerado (Figura 2.25):

$$H \cong h - N \quad (2.71)$$

cujos erros padrão são expressos com a propagação das variâncias dos dados envolvidos.

$$\sigma_H = \pm\sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_N^2} \quad (2.72)$$

onde  $\sigma_h^2$  e  $\sigma_N^2$  são as variâncias da altitude geométrica e da altura geoidal, respectivamente.

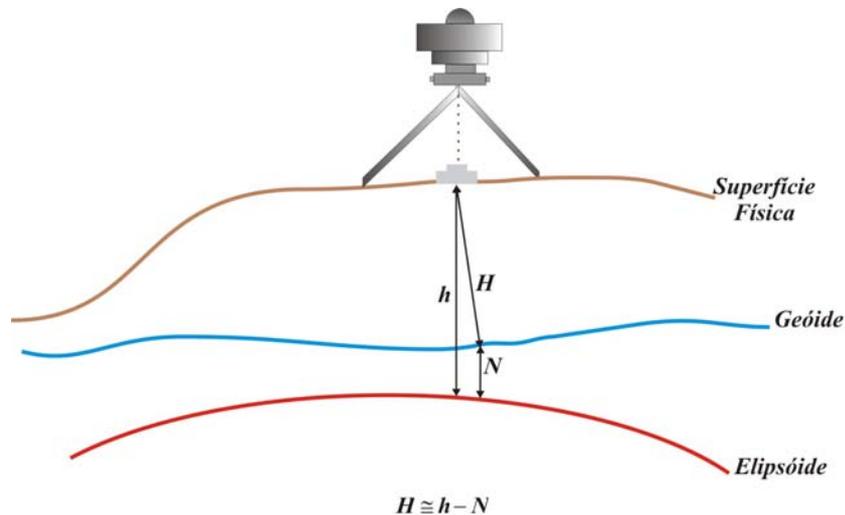


Figura 2.25 – Altimetria por GPS no modo absoluto

A determinação da altitude ortométrica no modo relativo envolve diferenças da altitude geométrica e da altura geoidal (Figura 2.26):

$$H_i = H_j + \Delta H_{ij} = H_j + \Delta h_{ij} - \Delta N_{ij} \quad (2.73)$$

com o erro padrão expresso a partir das variâncias:

$$\sigma_{H_i} = \pm\sqrt{\sigma_{H_j}^2 + \sigma_{\Delta h_{ij}}^2 + \sigma_{\Delta N_{ij}}^2} \quad (2.74)$$

As variâncias  $\sigma_{H_j}^2$ ,  $\sigma_{\Delta h_{ij}}^2$  e  $\sigma_{\Delta N_{ij}}^2$  serão melhor descritas na seção 4.3.2.

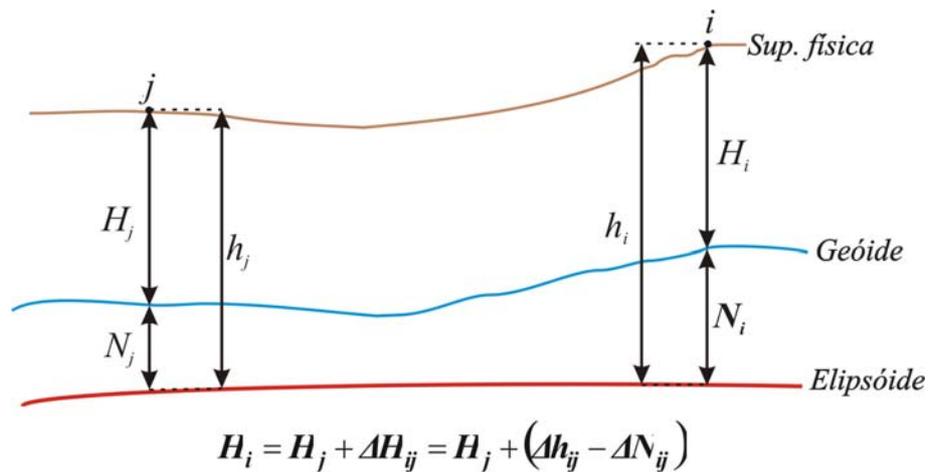


Figura 2.26 – Altimetria por GPS no modo relativo

A altimetria por GPS, sobretudo no modo relativo, tem sido tópico de estudos em vários centros de pesquisa (Sideris *et al.*, 1992; Ollikainen, 1997; Erol & Çelik, 2004; Roman, 2004). A principal dificuldade para explorar tal metodologia é a baixa precisão dos modelos geoidais em algumas regiões, pois os erros da altitude geométrica e da altura geoidal propagam-se na altitude ortométrica obtida. Na prática, a relação dada por (2.79), nunca é satisfeita em consequência dos erros, distorções sistemáticas e inconsistências nos dados de  $H$ ,  $h$  e  $N$  (Jian & Duquenne, 1996; Ollikainen, 1997; Fotopoulos *et al.*, 2001). Assim, um tratamento mais rigoroso para a integração desses tipos de dados requer um modelo paramétrico de correção. O papel desse modelo é absorver as inconsistências de *Data* e distorções sistemáticas existentes nos dados (Fotopoulos, 2003), como será visto na Seção 5.3.

### 3 DESCRIÇÃO DOS DADOS

A determinação da altitude ortométrica é imprescindível em várias atividades cotidianas. Porém, mesmo seguindo os padrões de controle recomendados para o nivelamento de alta precisão, as distorções são inevitáveis, o que torna necessário métodos e estratégias de avaliação. Os dados envolvidos na avaliação da RAFB no Sul/Sudeste do Brasil, proposta neste trabalho, são agrupados em três classes: 1) As RNs da RAFB existentes nessa região; 2) Redes GPS de referência, e 3) Geóide gravimétrico da região. Os dados e sua distribuição geográfica são descritos a seguir.

#### 3.1 REFERÊNCIAS DE NÍVEL

As RNs da RAFB, localizadas na região Sul/Sudeste do Brasil, resultaram de levantamentos de apoio geodésico realizados pelo IBGE, desde a década de 40, e pelo Instituto Geográfico e Geológico do Estado de São Paulo (IGGSP), entre 1945 e 1961 (IGG, 1962). Essas RNs foram implantadas ao longo das principais rodovias de modo a proporcionar uma distribuição geográfica adequada para mapeamento e trabalhos de Topografia, necessários para a urbanização das cidades e para a pavimentação de estradas. A Figura 3.1 ilustra a distribuição geográfica das RNs implantadas pelo IBGE e IGGSP na região Sul/Sudeste do Brasil..

As altitudes foram calculadas a partir de desníveis obtidos pelo nivelamento geométrico clássico, realizado com níveis geodésicos de alta precisão e miras de invar, com tolerâncias de  $\pm 4mm\sqrt{K}$ , até o ano de 1983, e  $\pm 3mm\sqrt{K}$ , de 1983 até hoje. Para o ajustamento dos desníveis, não foram usadas observações gravimétricas, mas, sim, foi realizada apenas a correção do não-parallelismo das superfícies equipotenciais (Luz *et al.*, 2002).

As RNs implantadas pelo IBGE e pelo IGGSP foram materializadas com retículo gravado em chapas metálicas incrustadas em marcos ou estruturas de concreto, como monumentos, soleiras de igrejas, plataformas de estações ferroviárias, pontes, etc. A Figura 3.2 mostra, para exemplificar, um marco de RN do IBGE.

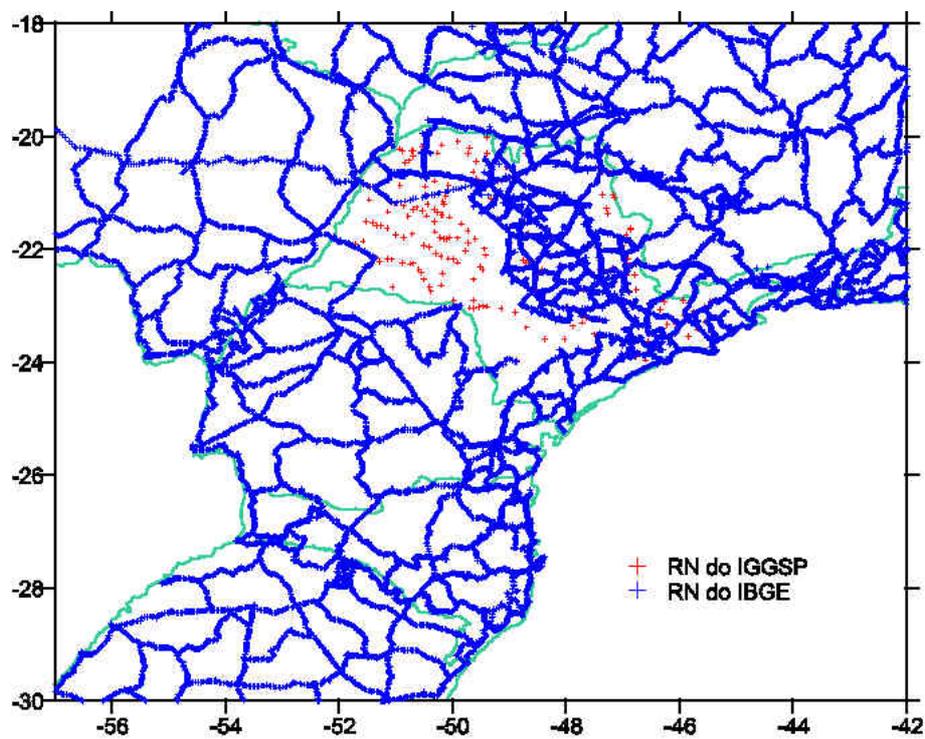


Figura 3.1 – Rede altimétrica na região Sul/Sudeste do Brasil



Figura 3.2 – Marco de uma Referência de Nível do IBGE

## 3.2 REDES GPS DE REFERÊNCIA

Neste trabalho, foram usados os dados de duas redes GPS de referência: a Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC) e a Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil (RGSB).

### 3.2.1 Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo

A RBMC tem por objetivo fornecer a infra-estrutura geodésica de referência para posicionamento, utilizando modernas técnicas apoiadas no GPS para facilitar o emprego do sistema GPS, pelo usuário, e garantir alta qualidade dos resultados obtidos. A RBMC é constituída atualmente de 20 estações operacionais, distribuídas pelo território brasileiro (Figura 3.3). Dessas, duas integram a rede *International GPS Service (IGS)*: Brasília (BRAZ) e Fortaleza (FORT), (IBGE, 2004). A RBMC, além de fornecer coordenadas precisas das estações, coleta observações dos satélites GPS continuamente nas duas frequências (L1 e L2) e disponibiliza-as de 24 horas até alguns dias após a coleta (Pereira *et al.*, 2003). Isso possibilita a qualquer usuário, com apenas um receptor, realizar o posicionamento relativo. Os arquivos das sessões de observações de cada estação da RBMC, com duração de 24 horas, estão disponíveis no formato *RINEX (Receiver Independent data Exchange format)*, via *internet*, na página <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/default.shtm> do IBGE. Os arquivos RINEX possuem formato padrão, podendo ser utilizados por qualquer programa de processamento GPS.

### 3.2.2 Rede GPS do Sul/Sudeste do Brasil

A RGSB é uma rede GPS passiva, constituída de aproximadamente 240 estações distribuídas nos Estados de São Paulo, Paraná, Santa Catarina e regiões adjacentes (Figura 3.4). As estações dessa rede GPS foram implantadas sobre RNs pertencentes à RAFB, possuindo coordenadas geodésicas  $(\varphi, \lambda, h)$  e altitude ortométrica  $(H)$ . A distância máxima entre as estações que constituem a RGSB é da ordem de 60 km, o que implica em bases máximas de 30 km para o posicionamento relativo por GPS, em qualquer ponto de abrangência da rede (Sá *et al.*, 2001).



Figura 3.3 – Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo – RBMC (IBGE, 2005)

Os objetivos principais da RGSB são o aprimoramento do geóide gravimétrico e o apoio básico local em termos de coordenadas geodésicas, altitude ortométrica e altura geoidal obtida por GPS. Trabalhos recentes sobre aprimoramento do geóide do Estado de São Paulo (Sá *et al.*, 2002; Souza, 2002), mostram discrepâncias entre as alturas geoidais fornecidas pelo geóide gravimétrico ( $N_g$ ) e as obtidas por GPS/Nivelamento ( $N_{GPS}$ ), os quais, provavelmente, são causadas por distorções na RAFB. A RGSB permitirá a avaliação das distorções da RAFB nos Estados de São Paulo, Paraná e Santa Catarina.

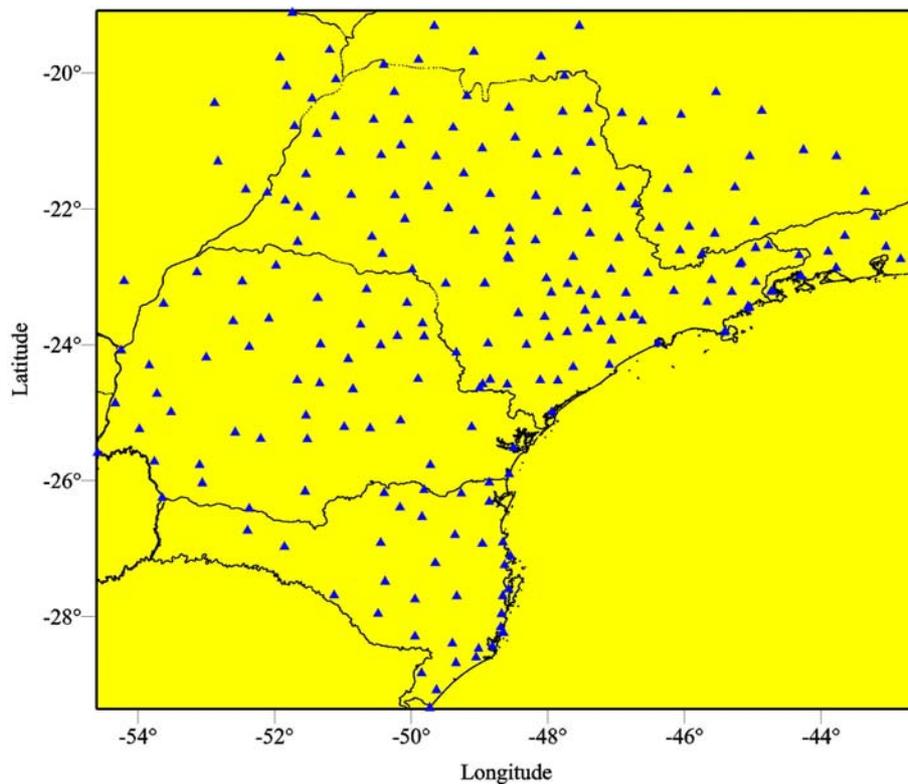


Figura 3.4 – Rede GPS no Sul/Sudeste do Brasil

#### a) Coleta de dados GPS sobre RNs

Na implantação da RGSP o posicionamento relativo estático foi realizado usando-se o receptor *ASHTECH Z12*, modelo Z12, com antena *ASH700718A* (Figura 3.5), instalada com auxílio de tripé sobre a RN de interesse. As estações da RBMC, equipadas com receptores *TRIMBLE*, modelo *4000SSI* e antena *DORNE MARGOLIN T* (Figura 3.6), das cidades de Brasília, Curitiba, Porto Alegre, Presidente Prudente, Rio de Janeiro e Viçosa foram usadas como referência. Os dados da RGSB foram coletados com sessões de 3 a 6 horas, com intervalo de amostragem de 15 segundos e ângulo de elevação mínima de 10°.

As altitudes ortométricas das RNs excêntricas foram determinadas por nivelamento geométrico, usando-se o nível automático, modelo *NI02*, de fabricação *Wild*, e miras convencionais com resolução nominal de 0,5 cm. A discrepância máxima entre os desníveis, obtidos no contra nivelamento, foi de 1 mm, o que corresponde ao erro máximo para uma distância de 100 m, pelo critério das normas de especificações de medições geodésicas (Sá *et al.*, 2002).



Figura 3.5 – Receptor, ASHTECH Z12 e antena ASHTECH ASH700718A



a) Antena *DORNE MARGOLIN T*



b) Receptor GPS *TRIMBLE 4000SSI*

Figura 3.6 – Receptor e antena utilizados nas estações da RBMC

### b) Processamento e ajustamento de dados GPS

O processamento e ajustamento da RGSP foram realizados com o auxílio do programa *GeoGenius*, versão 2.11, desenvolvida pela *Spectra Precision*. No *GeoGenius*, o processamento correspondente ao modo estático com as observações da fase da portadora, envolvendo três etapas: a tripla diferença de fase e fixação de perda de ciclos; a dupla diferença de fase com ambigüidade flutuante, e a dupla diferença de fase com ambigüidade solucionada.

O *GeoGenius* possui um módulo para o ajustamento simultâneo dos dados, utilizando a dupla diferença de fase. Os dados de entrada (observações) são as componentes  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , obtidas no processamento das bases e as respectivas matrizes variância-covariância (MVC). Os parâmetros (desconhecidos) são as coordenadas cartesianas dos pontos observados (SP, 2000).

Os dados coletados nas campanhas GPS foram processados e ajustados, utilizando-se os parâmetros referentes ao SIRGAS2000, para o estabelecimento de uma estrutura geodésica moderna.

### c) Determinação da altura geoidal

O posicionamento por GPS fornece a altitude geométrica ( $h$ ), que é uma grandeza geométrica; o nivelamento geométrico convencional proporciona a altitude ortométrica ( $H$ ). Portanto, a altura geoidal pode ser determinada facilmente pela simples diferença entre as altitudes geométrica e ortométrica, às vezes denominada altura geoidal geométrica:

$$N \cong h - H \quad (3.1)$$

A propagação das variâncias da altitude geométrica ( $\sigma_h^2$ ) e da altitude ortométrica ( $\sigma_H^2$ ) fornece diretamente o erro padrão ( $\sigma_{N_{GPS}}$ ) da altura geoidal calculada por (3.1), que é dado por:

$$\sigma_{N_{GPS}} = \pm \sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_H^2} \quad (3.2)$$

Para comparação com o geóide gravimétrico e identificação de eventuais erros grosseiros, um modelo geoidal foi gerado a partir dos dados de GPS/nivelamento, utilizando o programa de computador *Surfer 7.0*. Um modelo digital das alturas geoidais, com intervalo de 15' de arco em latitude e longitude, foi obtido pelo algoritmo e para a interpolação foi usado o método de Krige. A Figura 3.7 ilustra a representação gráfica do modelo geoidal obtido.

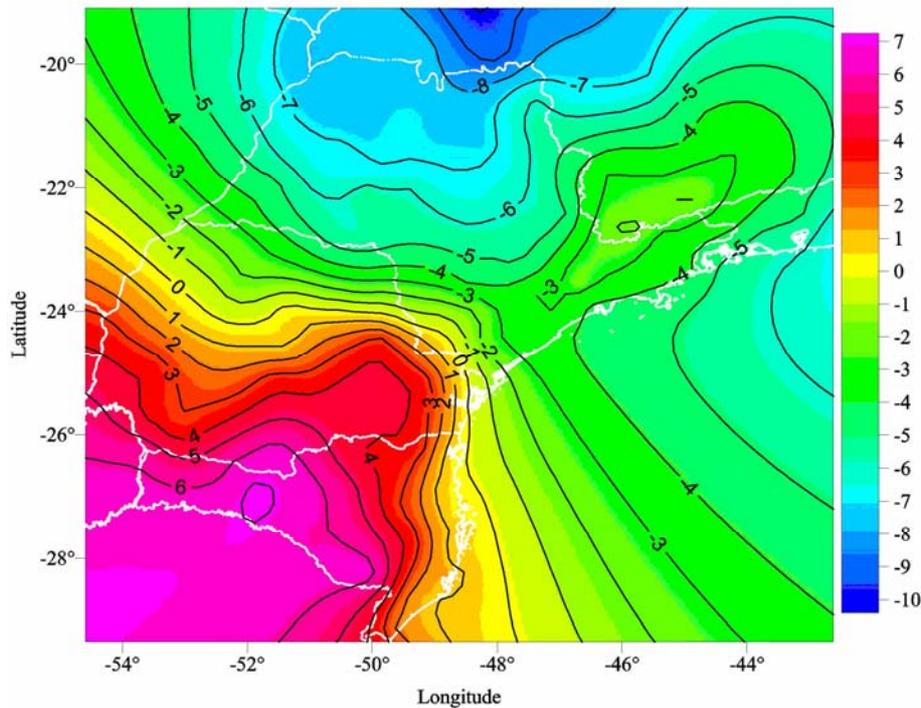


Figura 3.7 – Geóide GPS/Nivelamento da região  
(Unidade: m)

### 3.3 GEÓIDE GRAVIMÉTRICO

O geóide gravimétrico existente na região de estudo foi determinado a partir de dados do modelo geopotencial EGM96, dados gravimétricos terrestres e oceânicos, além dos dados topográficos digitais (Sá, 2004), por meio da Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ). Esse modelo geoidal gravimétrico, com resolução espacial de 5' de arco de latitude e longitude, é mostrado na Figura 3.8.

Alturas geoidais foram calculadas com o auxílio do programa GEOCOM, desenvolvido para uso de modelos digitais (Sá *et al.*, 2001). Nesse programa, as alturas geoidais podem ser calculadas de maneira absoluta ou relativa. Na primeira, o valor de N é

calculado diretamente do modelo, a partir das coordenadas geodésicas do ponto de interesse. Na segunda, o programa calcula a diferença de alturas geoidais entre dois pontos de coordenadas geodésicas conhecidas.

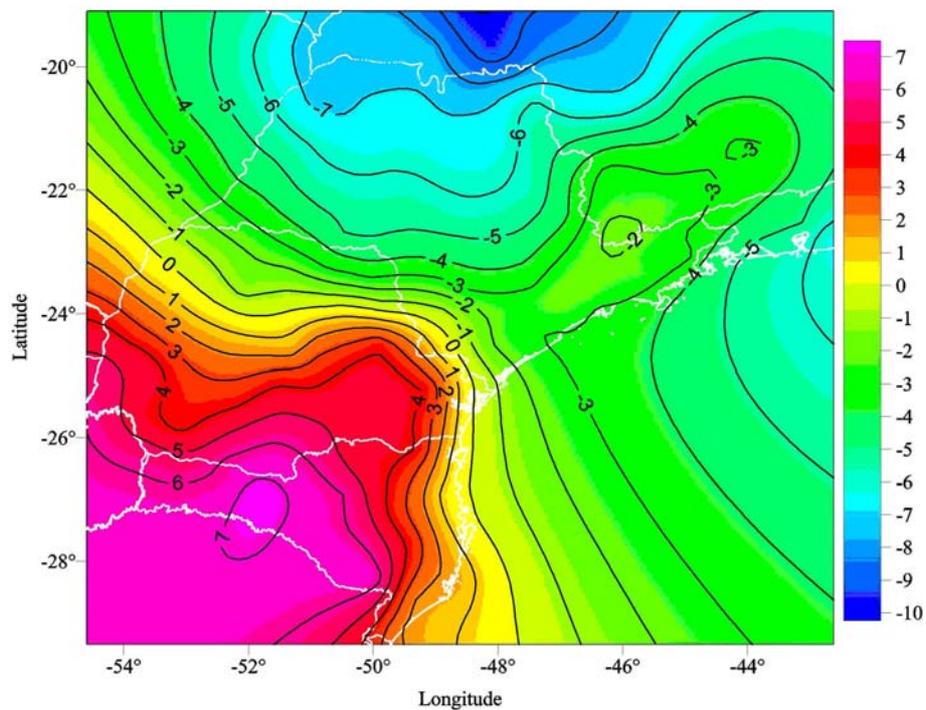


Figura 3.8 – Geóide gravimétrico da região  
(Unidade: m)

## 4 METODOLOGIA

Neste capítulo, são apresentados os principais aspectos metodológicos envolvidos no processo de avaliação das distorções da RAFB, usando-se a RGSB e o geóide gravimétrico. A metodologia empregada envolveu as seguintes etapas: 1) remoção de erros grosseiros; 2) compatibilização de geóides, e 3) avaliação de distorções.

### 4.1 REMOÇÃO DE ERROS GROSSEIROS

A combinação da altitude geométrica ( $h$ ), determinada por GPS, com a altitude ortométrica ( $H$ ), obtida no nivelamento geométrico, e a altura geoidal gravimétrica ( $N_g$ ), fornecida por um modelo geoidal gravimétrico, tem sido a chave de várias aplicações na Geodésia. Embora esses três tipos de informações sejam diferentes em termos físicos, de superfície de referência, de métodos observacionais e acurácia, elas satisfazem a simples relação geométrica (Kotsakis & Sideris, 1999):

$$(h - H) - N_g = N_{GPS} - N_g = 0 \quad (4.1)$$

onde  $N_{GPS}$  é a altura geoidal obtida pelo posicionamento GPS em pontos com altitudes ortométricas conhecidas e  $N_g$  é a altura geoidal, obtida pelo geóide gravimétrico.

Porém, devido a uma série de inconsistências, tais como ruído aleatório nos valores de  $h, H, N$ , inconsistências nos *Data*, distorções sistemáticas, erros grosseiros, efeitos geodinâmicos, entre outros já descritos no Capítulo 2, o fechamento da expressão (4.1) não ocorre. Esse erro de fechamento é também conhecido como componente sistemática do geóide, dada por:

$$\Delta N = N_{GPS} - N_g \quad (4.2)$$

que pode caracterizar distorções na rede altimétrica. Portanto, a componente sistemática será a chave para a avaliação de distorções da rede altimétrica em estudo.

Antes de efetuar a avaliação da rede altimétrica, deve-se realizar uma análise dos dados utilizados. Dessa forma, esta seção foi dividida em duas partes: a primeira trata da avaliação dos dados envolvidos, a segunda apresenta a estratégia utilizada na avaliação da rede altimétrica.

#### 4.1.1 Remoção de erros grosseiros dos dados

Para efetuar a avaliação da rede altimétrica, é necessária uma avaliação dos dados a serem utilizados, com o objetivo de detectar e eliminar erros grosseiros, que possam afetar a análise e interpretação dos resultados. Na análise de dados utilizam-se duas abordagens: a) as estimativas, com as quais os dados são associados a intervalos de confiança, b) os testes de hipóteses, com os quais os resultados são apresentados como valores de probabilidade por meio de testes estatísticos. Nesta seção, será apresentada a metodologia utilizada na detecção de erros grosseiros nos dados.

#### *Amostragem*

A comparação dos valores  $N_{GPS}$  e  $N_g$ , em um conjunto de pontos, fornece um conjunto de resíduos  $\Delta N$ , dado por:

$$\Delta N = \{\Delta N_1, \Delta N_2, \dots, \Delta N_n\} \quad (4.3)$$

ao qual se associa o conjunto de erros padrões correspondentes:

$$\sigma_{\Delta N} = \{\sigma_{\Delta N_1}, \sigma_{\Delta N_2}, \dots, \sigma_{\Delta N_n}\} \quad (4.4)$$

A função densidade de probabilidade que se postula para a amostra é a distribuição normal  $N(\mu_{\Delta N}, \sigma_{\Delta N}^2)$ , sendo  $\mu_{\Delta N}$  a média e  $\sigma_{\Delta N}^2$  a variância da amostra. Os parâmetros amostrais são calculados para testar a validade estatística desse postulado (Vanicek & Krakiwsky, 1986). A média é dada pela expressão:

$$\overline{\Delta N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta N_i \quad (4.5)$$

onde  $n$  é o número de elementos da amostra. A partir da média, calcula-se a variância

$$\sigma_{\Delta N}^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta N_i - \overline{\Delta N})^2 \quad (4.6)$$

A função normal tem representação gráfica em forma de sino (Figura 4.1). A área sob a curva normal, na verdade abaixo de qualquer função de densidade de probabilidade, é 1. Então, para quaisquer valores específicos, pode-se determinar a proporção da área sob a curva entre esses dois valores (Morrison, 1976).

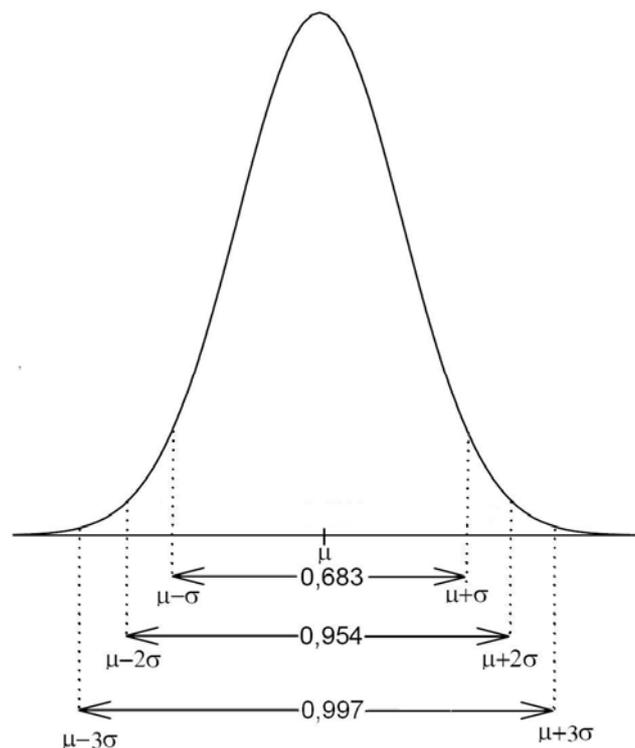


Figura 4.1 – Função densidade de probabilidade normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$

Para a distribuição normal, a probabilidade de os valores caírem dentro de um, dois, ou três desvios padrões da média são respectivamente 0,683, 0,954 e 0,9973, como ilustra a Figura 4.1. Essa distribuição é a comumente utilizada em estatística, pois nessa forma de

distribuição de frequências há um grande número de variáveis aleatórias.

### ***Testes estatísticos***

Os testes estatísticos permitem verificar se:

- a função densidade de probabilidade postulada para a amostra é adequada,
- os parâmetros populacionais estimados são confiáveis, e
- os valores obtidos são consistentes com os conhecidos *a priori*.

Portanto, a análise estatística dos resíduos permite testar se a componente sistemática é estatisticamente significativa (Sá, 1988). O aparecimento de resíduos anômalos, isto é, muito discrepantes em relação aos demais, pode indicar a existência de erros grosseiros na altura geoidal obtida pela combinação do GPS com o nivelamento ótico ( $N_{GPS}$ ) e, conseqüentemente, na altitude ortométrica nessas estações.

#### **a) Teste para rejeição de resíduos anômalos**

Para identificar e excluir eventuais erros grosseiros nas RNs, foi aplicado o teste *t* (*Student*), que examina os elementos amostrais para identificar aqueles que são estatisticamente incompatíveis com os demais. O teste supõe normalidade e independência das observações, isto é, os dados devem ser normalmente distribuídos, significando que seguem uma distribuição normal, e os valores são concentrados simetricamente em torno da média (Wetherill, 1967). Nesse caso, as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \Delta N_i \in N\left\{\mu_{\Delta N}, \sigma_{\Delta N}^2\right\} \\ H_1 : \Delta N_i \notin N\left\{\mu_{\Delta N}, \sigma_{\Delta N}^2\right\} \end{cases} \quad (4.7)$$

Calcula-se a estatística amostral, *t*, e verifica-se se o valor encontrado está no intervalo de aceitação da hipótese nula:

$$t = \frac{\Delta N_i - \overline{\Delta N}}{\sigma_{\overline{\Delta N}} / \sqrt{n}} \quad (4.8)$$

no nível de significância  $\alpha$ . O intervalo de confiança é expresso por:

$$\overline{\Delta N} - \frac{\sigma_{\overline{\Delta N}}}{\sqrt{n}} t\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \Delta N_i < \overline{\Delta N} + \frac{\sigma_{\overline{\Delta N}}}{\sqrt{n}} t\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.9)$$

onde  $\Delta N_i$  é a componente sistemática do geóide na RN analisada.

Se a estatística  $t$  for satisfeita, aceita-se a hipótese nula, o que significa que, no dado testado, não há erro grosseiro.

#### b) Teste de curtose e assimetria

A curtose é a medida do grau de achatamento da distribuição normal em relação à distribuição normal que reflete a dispersão dos valores em torno da média. O coeficiente é calculado a partir do quarto momento em torno da média (Chissom, 1970):

$$\alpha_4 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 \quad (4.10)$$

com:

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta N_i - \overline{\Delta N}|^k}{n} \quad (4.11)$$

Para a distribuição normal será denominada mesocúrtica se  $\alpha_4 = 0$ ; leptocúrtica, se  $\alpha_4 > 0$ , e platicúrtica, se  $\alpha_4 < 0$ , como ilustra a Figura 4.2.

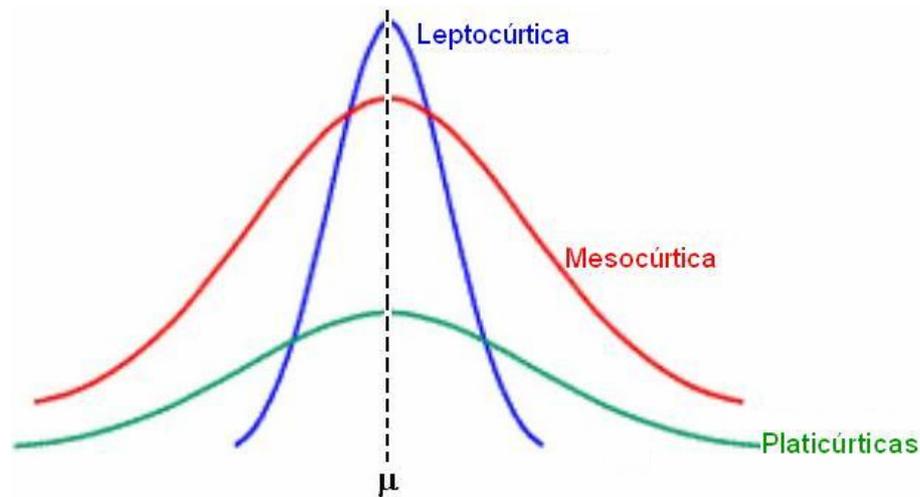


Figura 4.2 – Distribuição dos dados quanto à curtose

Outro aspecto importante sobre a distribuição normal é a assimetria em relação à média, expressa pelo coeficiente (Joanes & Gill, 1998):

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}} \quad (4.12)$$

onde  $m_2$  e  $m_3$  são os momentos de ordem 2 e 3, respectivamente, centrados para a média. A interpretação do coeficiente de assimetria é a seguinte:

- $\alpha_3 < 0$  distribuição assimétrica à esquerda;
- $\alpha_3 = 0$  distribuição simétrica;
- $\alpha_3 > 0$  distribuição assimétrica à direita.

## 4.2 MODELAGEM DA COMPONENTE SISTEMÁTICA

Para modelar a componente sistemática e adicioná-la ao geóide gravimétrico, tornando-o compatível com aquele obtido por GPS, são usados modelos matemáticos do tipo (Vergos & Sideris, 2002; Mainville *et al.*, 1997)

$$h_i - H_i - N_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor ( $n \times 1$ ) dos parâmetros a serem determinados,  $\mathbf{a}_i$  é o vetor ( $n \times 1$ ) dos coeficientes conhecidos e  $\mathbf{v}$  é o vetor dos resíduos. O termo paramétrico  $(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x})$ , descreve inconsistências entre os diferentes *Data*, erros das coordenadas RNs e outros efeitos sistemáticos existentes nos dados.

Nesta Seção serão descritos os modelos matemáticos e o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), usados na determinação dos parâmetros para representação da componente sistemática.

#### 4.2.1 Modelo matemático do método paramétrico

Quando os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados, isto é, quando o modelo matemático tem a forma (Gemael, 2002):

$$\mathbf{L}_a = F(\mathbf{X}_a) \quad (4.14)$$

o ajustamento se processa pelo método paramétrico, sendo:

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_b + \mathbf{V} \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{L}_a$  é o vetor ( $n \times 1$ ) das observações ajustadas;  $\mathbf{X}_a$  é o vetor ( $m \times 1$ ) dos parâmetros ajustados;  $F(\mathbf{X}_a)$  são equações do modelo matemático calculadas com parâmetros ajustados;  $\mathbf{L}_b$  é o vetor ( $n \times 1$ ) das observações brutas, e  $\mathbf{V}$  é o vetor ( $n \times 1$ ) dos resíduos (ou correções) que transformam as observações brutas ( $\mathbf{L}_b$ ) em observações ajustadas ( $\mathbf{L}_a$ ).

No modelo matemático do método paramétrico, os parâmetros que compõem o vetor dos parâmetros ajustados é expresso pela combinação

$$\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X} \quad (4.16)$$

sendo  $X_0$  o vetor ( $m \times 1$ ) dos parâmetros aproximados.

Substituindo-se as expressões (4.15) e (4.16) na expressão (4.14) e usando a aproximação linear da fórmula de Taylor, tem-se:

$$L_b + V = F(X_0 + X) = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a=X_0} \cdot X \quad (4.17)$$

Designando a função dos parâmetros aproximados por:

$$L_0 = F(X_0) \quad (4.18)$$

e representando as derivadas parciais das equações em relação aos parâmetros, por:

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a=X_0} \quad (4.19)$$

resulta:

$$L_b + V = L_0 + AX \quad (4.20)$$

ou:

$$V = AX + L_0 - L_b \quad (4.21)$$

Fazendo:

$$L = L_0 - L_b \quad (4.22)$$

resulta o modelo matemático do método paramétrico:

$${}_nV_1 = {}_nA_m \quad {}_mX_1 + {}_nL_1 \quad (4.23)$$

que representa um sistema de  $n$  equações lineares e  $m$  parâmetros. O número de incógnitas  $(n + m)$  é maior que o número de equações  $(n)$ . Aplicando-se o princípio do MMQ:

$$\phi = V^T P V = \textit{mínimo} \quad (4.24)$$

sendo:

$$P = \sigma_0^2 \sum L_b^{-1} \quad (4.25)$$

onde  $\sigma_0^2$  é um escalar conhecido como fator de variância *a priori* e  $\sum L_b^{-1}$  é a matriz variância-covariância (MVC) das observações, isto é, estimativa da precisão destas.

Substituindo a expressão (4.23) na (4.24), fazendo algumas manipulações algébricas e igualando a zero a primeira deriva em relação a  $X$ , tem-se:

$$X = -(A^T P A)^{-1} (A^T P L) \quad (4.26)$$

ou:

$$X = (N)^{-1} (U) \quad (4.27)$$

A MVC dos parâmetros ajustados é obtida, aplicando-se a lei de propagação de variâncias na expressão (4.26), resultando em (Gemael, 2002):

$$\sum_{X_a} = \sigma_0^2 N^{-1} A^T P P^{-1} P A N^{-1} \quad (4.28)$$

Para obter-se a MVC das observações ajustadas, é necessário aplicar a lei de propagação de variâncias na expressão (4.14), a qual resulta em:

$$\sum_{L_a} = \sigma_0^2 A N^{-1} A^T \quad (4.29)$$

#### 4.2.2 Tipos de modelos

A escolha da forma paramétrica para modelar a correção não é trivial. Em princípio, a seleção do modelo é arbitrária, a menos que algum significado físico possa ser atribuído às diferenças entre  $N_{GPS}$  e  $N_g$  (Fotopoulos, 2003):

$$a_i^T x = N_{GPS} - N_g \quad (4.30)$$

No passado, eram usados modelos lineares simples os quais, em vários casos, satisfaziam as exigências de precisão. Porém, com a precisão realizável do GPS e a determinação de alturas de geoidais mais precisas, o uso de um modelo simples pode não ser suficiente.

Uma aproximação comum para a expressão (4.13) é a tendência paramétrica na forma linear:

$$p = b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_q f_q \quad (4.31)$$

onde  $b_1, b_2, \dots, b_q$  são coeficientes a serem determinados por MMQ,  $f_1, f_2, \dots, f_q$  são funções

fases conhecidas, que podem variar. Uma possibilidade é a aproximação polinomial da forma:

$$a_i^T x = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (\varphi_i - \bar{\varphi})^n (\lambda_i - \bar{\lambda})^m x_q \quad (4.32)$$

onde  $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$  são as latitudes e longitudes médias dos pontos levantados, respectivamente, e  $x_q$  contém os  $q$  coeficientes desconhecidos. O parâmetro  $q$  varia de acordo com o número de termos até um máximo de  $q = (N+1) \cdot (M+1)$ . Aplicações desse modelo podem ser encontrados em Santos (2005), Souza (2002), Poutanen (1999) e Zhong (1997).

Outros modelos muito utilizados são baseados na transformação de similaridade, como o de 4 parâmetros, discutido em Heiskanen e Moritz (1967)

$$a_i^T x = \cos \varphi_i \cos \lambda_i dX + \cos \varphi_i \sin \lambda_i dY + \sin \lambda_i dZ + da \quad (4.33)$$

onde  $dX, dY, dZ$  são parâmetros de translações em relação aos eixos  $X, Y$  e  $Z$ , respectivamente, e  $da$  é a diferença do semi-eixo maior entre os elipsóides envolvidos.

Uma versão mais geral do modelo anterior é obtida com a inclusão do quinto parâmetro:

$$a_i^T x = \cos \varphi_i \cos \lambda_i dX + \cos \varphi_i \sin \lambda_i dY + \sin \lambda_i dZ + da + a \sin^2 \varphi_i df \quad (4.34)$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior e  $df$  é a diferença entre os achatamentos dos elipsóides de referência.

A transformação de similaridade mais geral, envolvendo 8 parâmetros, foi desenvolvida e testada no Canadá e Malásia (Kotsakis *et al.*, 2001):

$$\begin{aligned}
a_i^T x &= \cos \varphi_i \cos \lambda_i dX + \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i dY + \operatorname{sen} \lambda_i dZ + \\
&+ \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i}{W_i} e^2 a d\omega_x + \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i}{W_i} e^2 a d\omega_y + \\
&(aW_i + h_i) ds + \frac{1 - f^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} da + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} \sqrt{1 - e^2} df
\end{aligned} \tag{4.35}$$

com

$$W_i = \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i} \tag{4.36}$$

sendo  $e^2$  e  $f$  a primeira excentricidade e o achatamento do elipsóide de referência, respectivamente,  $d\omega_x$  e  $d\omega_y$ , as rotações em  $X$  e  $Y$ ,  $h_i$  a altitude geométrica do ponto determinado e  $ds$  um fator de escala.

Outras formas variantes da expressão (4.35), com alguns parâmetros excluídos, também são usadas (Kotsakis *et al.*, 2001):

$$\begin{aligned}
a_i^T x &= \cos \varphi_i \cos \lambda_i dX + \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i dY + \operatorname{sen} \lambda_i dZ + \\
&+ \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i}{W_i} e^2 a d\omega_x + \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i}{W_i} e^2 a d\omega_y + \\
&+ \frac{1 - f^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} da + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} \sqrt{1 - e^2} df
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Para compatibilizar o geóide gravimétrico com o geóide materializado pelo marégrafo no *Datum* altimétrico, as diferenças de alturas geoidais, nas estações da RGSB, foram representadas com os modelos matemáticos descritos e adicionadas ao geóide gravimétrico.

### 4.3 DETERMINAÇÃO DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA POR GPS

Há duas alternativas para o uso do geóide gravimétrico na determinação da altitude ortométrica por GPS: a) determinação absoluta a partir da altitude geométrica e altura geoidal, e b) determinação relativa usando diferenças de altitude geométrica e altura geoidal, já discutidos no Capítulo 2. Nesta Seção será mostrada, de forma mais detalhada, a determinação na forma relativa, utilizada neste trabalho.

#### 4.3.1 Altimetria por GPS no modo relativo

Para a determinação da altitude ortométrica no modo relativo, inicialmente determina-se as coordenadas geodésicas de cada RN posicionada  $(\varphi_i, \lambda_i, h_i)$  e seus erros padrões  $(\sigma_{\varphi_i}, \sigma_{\lambda_i}, \sigma_{h_i})$ . A partir das coordenadas geodésicas, a altitude ortométrica das RNs são determinadas no modo relativo, pela expressão (2.73), com a integração dos dados da RGSB e do geóide gravimétrico da região em estudo.

Com o objetivo de reduzir o efeito de eventuais erros grosseiros na altimetria por GPS, a altitude ortométrica das RNs posicionadas  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  foram obtidas a partir das estações de referência  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  mais próximas (Figura 4.3). Assim, para cada RN posicionada com GPS, foi obtido um conjunto de altitudes  $\{H_1, H_2, H_3, \dots, H_m\}$  e os respectivos erros padrões  $\{\sigma_{H_1}, \sigma_{H_2}, \sigma_{H_3}, \dots, \sigma_{H_m}\}$ . As altitudes das RNs foram determinadas por meio da ponderação daquelas obtidas pelas estações de referência (Santos, 2005):

$$H_i = \frac{\sum_{j=1}^m P_j H_j}{\sum_{j=1}^m P_j} \quad (4.38)$$

onde  $P_j$  corresponde a:

$$P_j = \frac{1}{\sigma_{H_j}^2} \quad (4.39)$$

$$\sigma_{H_i} = \left( \frac{\sum_{j=1}^m (H_i - H_j)^2 \frac{1}{\sigma_{H_j}^2}}{(m-1) \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{H_j}^2}} \right)^{1/2} \quad (4.40)$$

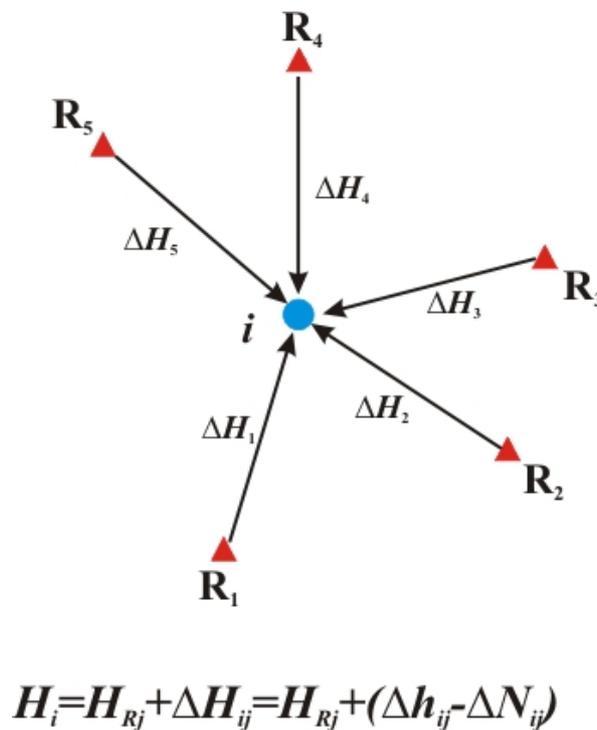


Figura 4.3 – Altimetria por GPS com superabundância. Triângulos vermelhos: estações de referência; círculo azul: RN posicionada (Santos, 2005)

### 4.3.2 Erros padrões

Para o cálculo do erro padrão da altitude ortométrica determinada por GPS, pela expressão 2.74, são necessários:

- O erro padrão da altitude ortométrica da estação de referência, no qual foi estimado a partir do *Datum* altimétrico de Imbituba, considerando o limite da propagação de erros no nivelamento geométrico dado por:

$$\sigma_H = \pm C \sqrt{k} \quad (4.41)$$

onde  $C$  representa uma constante, dada em milímetros e  $k$ , a distância (em km) do *Datum* à RN de interesse. Atualmente, o valor de  $C$  é 3 mm; porém, em levantamentos mais antigos, era 4 mm. Por esse motivo, neste trabalho, foi usada a constante de 4 mm.

- O erro padrão da diferença de altitude geométrica entre a RN posicionada e a estação de referência.

Como a diferença de altitude geométrica entre uma RN posicionada por GPS ( $i$ ) e uma estação de referência ( $j$ ) é dada por  $\Delta h_{ij} = h_i - h_j$ , o erro padrão desta diferença foi calculado pela propagação de variâncias observacionais:

$$\sigma_{\Delta h_{ij}} = \pm \sqrt{\sigma_{h_i}^2 + \sigma_{h_j}^2} \quad (4.42)$$

onde  $\sigma_{h_i}$  foi determinado com as estratégias de processamento e  $\sigma_{h_j}$  é dado pelas estações de referência da RGSB.

- E o erro padrão relativo da diferença de altura geoidal dos pontos da RGSB.

O erro relativo baseou-se na comparação das diferenças de alturas geoidais, obtidas por GPS ( $\Delta N_{GPS_{ij}}$ ), e as respectivas diferenças, obtidas no geóide gravimétrico ( $\Delta N_{g_{ij}}$ ), em pares de Referências de Nível  $RN_i$  e  $RN_j$ :

$$\delta \Delta N_{ij} = \Delta N_{GPS_{ij}} - \Delta N_{g_{ij}} \quad (4.43)$$

onde:

$$\Delta N_{GPS_{ij}} = (h_i - H_i) - (h_j - H_j) = \Delta h_{ij} - \Delta H_{ij} \quad (4.44)$$

sendo  $\Delta h_{ij}$  e  $\Delta H_{ij}$ , respectivamente, as diferenças entre as altitudes geométrica e ortométrica entre as RNs;  $\Delta N_{g_{ij}}$ , a diferença entre as alturas geoidais obtidas com o modelo geoidal em avaliação.

#### 4.4 AVALIAÇÃO DE DISTORÇÕES

A avaliação de distorções na rede altimétrica foi realizada pela comparação entre altitude ortométrica de referência ( $H_{RN}$ ) e a obtida por GPS ( $H_{Cal}$ ), no modo relativo, a partir de:

$$\Delta H = H_{RN} - H_{Cal} \quad (4.45)$$

onde  $\Delta H$  é chamada de componente residual da altitude ortométrica.

Para cada componente obtida, foram calculados os erros padrões correspondentes, pela propagação de variância observacional, dada por:

$$\sigma_{\Delta H_i} = \pm \sqrt{\sigma_{H_{RN}}^2 + \sigma_{H_{Cal}}^2} \quad (4.46)$$

onde  $\sigma_{H_{RN}}^2$  e  $\sigma_{H_{Cal}}^2$  são, respectivamente, as variâncias das altitudes ortométrica de referência e a calculada no modo relativo.

Por representar as contribuições das fontes de erros das grandezas envolvidas,  $3\sigma_{\Delta N_i}$  indica o limite esperado para cada componente sistemática. Portanto, se a componente sistemática for maior do que três vezes o respectivo erro padrão, pode haver alguma fonte de erro grosseiro. Nesse caso, uma avaliação minuciosa deverá ser realizada para verificar a fonte de erro que pode estar localizada em uma das componentes  $h$ ,  $H$  e  $N$ .

## 5 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos no desenvolvimento do trabalho. Inicialmente, foi realizada uma análise estatística dos dados, com a qual foram identificados e eliminados erros grosseiros. Na Seção 5.2, é selecionado o modelo para compatibilizar o geóide gravimétrico ao do sistema altimétrico local. A Seção 5.3, apresenta os resultados sobre a determinação da altitude ortométrica com GPS e o geóide gravimétrico compatibilizado. Finalmente, na Seção 5.4 é realizada a identificação e análise das distorções na RAFB.

### 5.1 ESTATÍSTICA DOS DADOS

Para análise estatística dos dados ( $\Delta N$ ), as alturas geoidais gravimétricas foram comparadas com as obtidas por GPS, nas estações da RGSB usando a expressão (4.2). Os dados básicos envolvidos encontram-se na Tabela A.1; os resultados obtidos na análise estatística são apresentados na Tabela 5.1. A média não nula indica que o geóide gravimétrico é incompatível com geóide do sistema altimétrico nessa região, algumas causas prováveis foram apresentadas no Capítulo 2. O histograma da componente sistemática (Figura 5.1) mostra como os dados estão distribuídos em torno da média. Esse histograma e os parâmetros estatísticos da componente sistemática mostram que a distribuição é assimétrica à direita (deformação maior que a normal) e leptocúrtica (pico mais elevado que a normal).

Tabela 5.1 – Parâmetros estatísticos dos dados

Estatísticas de $\Delta N$	Valor numérico
Número de dados	236
Mínimo (m)	-1,230
Máximo (m)	0,747
Amplitude (m)	1,977
Média (m)	-0,409
Desvio padrão (m)	0,343
Assimetria	0,337
Curtose	0,266

Analisando as medidas de dispersão, observa-se que há valores discrepantes, os quais

podem ter sido ocasionados por erros grosseiros envolvidos nas medidas e cálculo das altitudes ( $H$  e  $h$ ) e altura geoidal ( $N_g$ ), que influenciam o não ajuste dos dados a uma distribuição normal. Essa discrepância também pode ser constatada na Figura 5.2, onde aparecem em algumas áreas da região de estudo, feições anômalas na representação da componente sistemática.

A eliminação dos dados contaminados com erros grosseiros implica em menor valor na média da componente sistemática e, conseqüentemente, uma diminuição na distorção da RAFB.

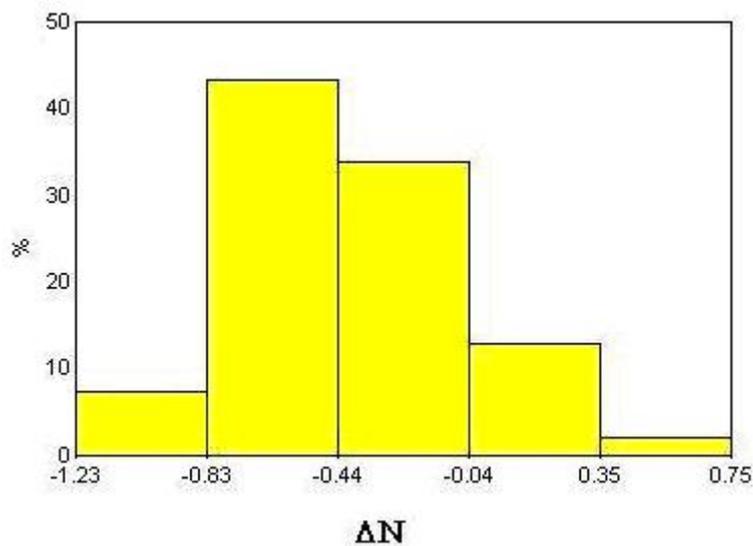


Figura 5.1 – Histograma da componente sistemática  
(Unidade: m)

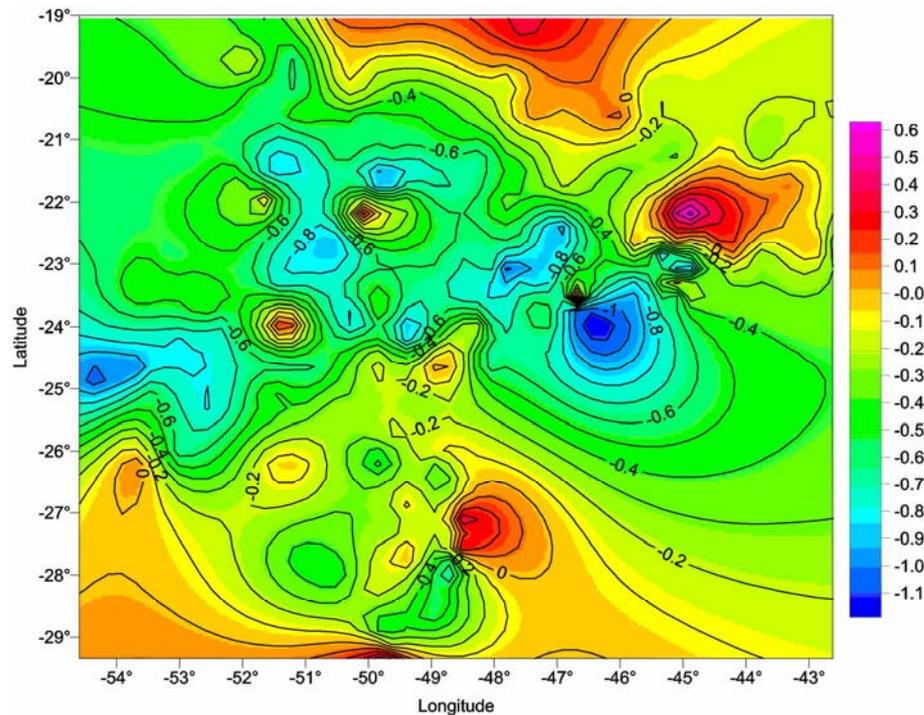


Figura 5.2 – Componente sistemática do geóide usando todos os dados  
(Unidade: m)

### 5.1.1 Identificação de erros grosseiros

Para identificar erros grosseiros na RAFB, os dados foram submetidos ao teste  $t$  (*Student*), no qual verificou-se a probabilidade de uma amostra estar dentro do intervalo de confiança (expressão 4.9) ao nível de significância de 5%.

A Figura 5.3 apresenta um exemplo de altitude ortométrica com erro grosseiro, identificada pelo teste  $t$ , que apresenta discrepância exagerada da componente sistemática na estação Capão Bonito em relação as 5 mais próximas.

Com a realização dessa análise, no conjunto de 236 dados, foram identificadas 20 delas contendo erros grosseiros (Tabela 5.2). A Figura 5.4 mostra as RNs com altitudes corretas (azul) assim como que contêm erros grosseiros (vermelho).

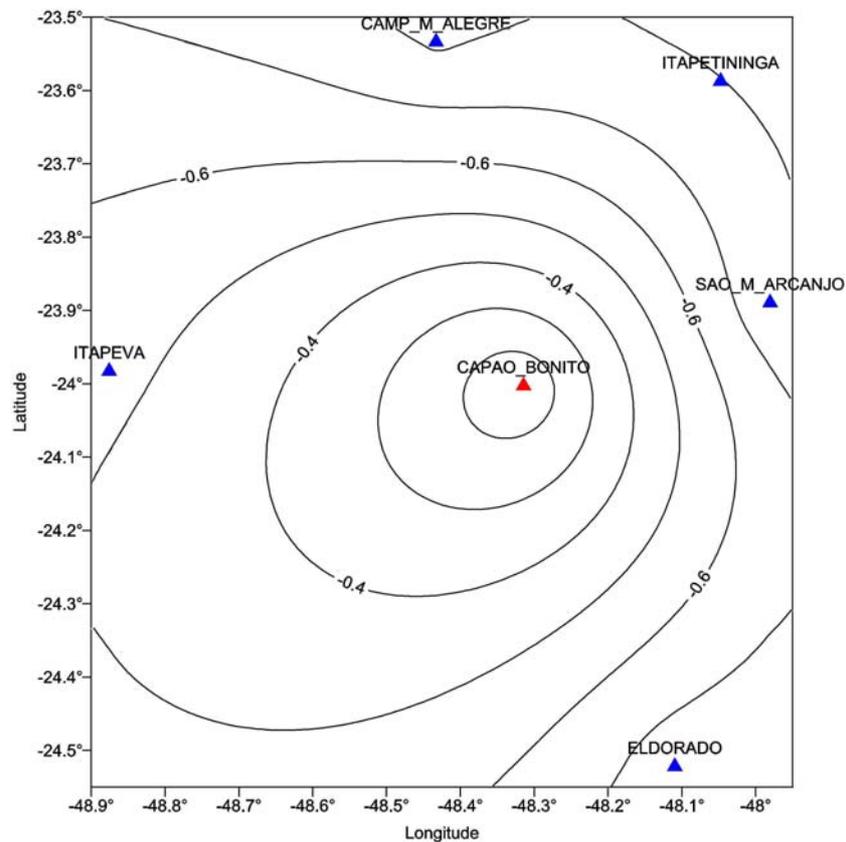


Figura 5.3 – Exemplo de altitude com erro grosseiro  
(Unidade: m)

Tabela 5.2 – Estações identificadas com erros grosseiros

<i>Estação</i>	$\varphi(^{\circ})$	$\lambda(^{\circ})$	$\Delta N(m)$	<i>Média(m)</i>	$\sigma_{\Delta N}(m)$
BENEDITO_NOVO	-26,800878	-49,358935	-0,035	-0,243	0,053
CAPAO_BONITO	-24,002361	-48,314642	-0,115	-0,735	0,117
DION_CERQUEIRA	-26,253500	-53,640273	0,111	-0,548	0,196
FAXINAL	-23,991553	-51,327575	0,393	-0,630	0,159
FLORIANOPOLIS_A	-27,597463	-48,576425	0,357	-0,486	0,192
FLORIANOPOLIS_B	-27,106428	-48,546833	0,426	-0,162	0,113
GUARATINGUETA_B	-22,817086	-45,191795	-1,189	-0,186	0,248
IBAITI	-23,873503	-50,202908	-0,934	0,534	0,138
INOCENCIA	-19,773725	-51,919389	-0,145	-0,580	0,046
ITARARE	-24,115759	-49,340844	-1,050	-0,196	0,301
JOINVILLE	-26,310601	-48,855047	-0,482	-0,140	0,064
MAFRA	-26,138996	-49,812661	-0,597	-0,252	0,068
ORIENTE	-22,152943	-50,091925	0,295	-0,733	0,332
POUSO_ALTO	-22,195042	-44,972108	0,747	-0,032	0,100
SAO_PAULO_B	-23,563487	-46,721232	0,370	-0,713	0,217
STA_JULIANA	-19,309143	-47,537060	0,327	-0,063	0,122
TIETE	-23,101973	-47,714323	-1,230	-0,752	0,149
TORRES	-29,341675	-49,727900	0,594	-0,433	0,118
UBATUBA_B	-23,451352	-45,046907	0,199	-0,070	0,119
UBATUBA_C	-23,433510	-45,069523	0,204	-0,457	0,215

Na Figura 5.5, nota-se que, após a remoção das RNs contendo erros grosseiros, a componente sistemática do geóide passa a ser mais suave do que na Figura 5.4. Mesmo seguindo os padrões de controle recomendados para o nivelamento de alta precisão, essas distorções são inevitáveis. Elas ocorrem devido ao referencial adotado, erros aleatórios e sistemáticos no nivelamento geométrico, tais como: refração atmosférica, erro de colimação, erro de verticalidade da mira, erro de graduação da mira e inversão de leitura.

Na Tabela 5.3, são apresentadas as estatísticas da componente sistemática do geóide após a remoção dos erros grosseiros. Como pode ser observado, as componentes possuem média de -0,437 m e desvio padrão de 0,289 m e, na Figura 5.6, é apresentado o histograma de frequência, no qual ainda há uma irregularidade na distribuição dos dados.

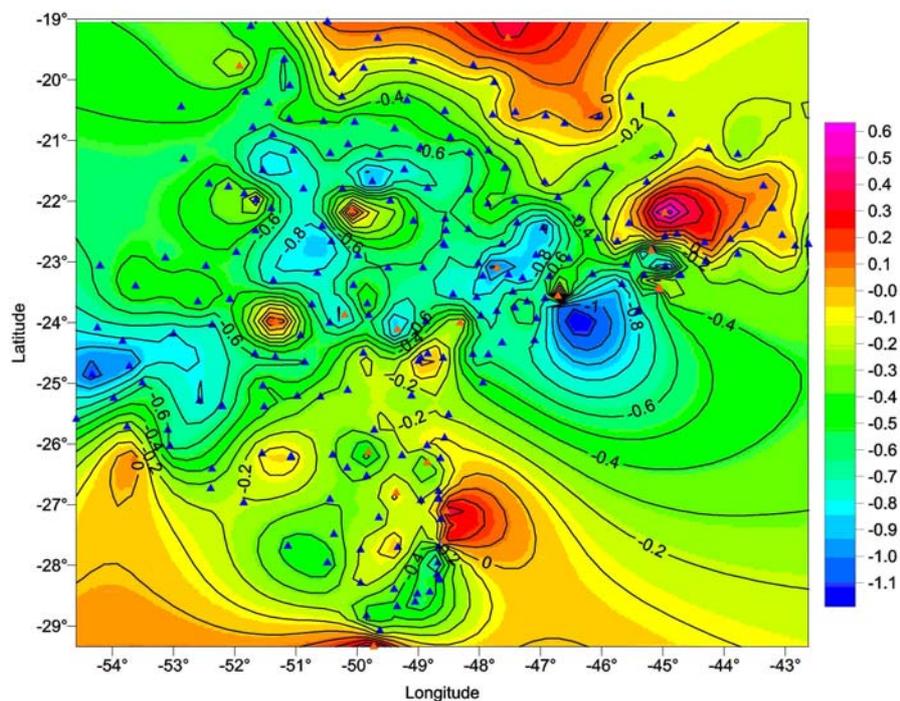


Figura 5.4 – Componente sistemática do geóide com erros grosseiros identificados  
(Unidade: m)

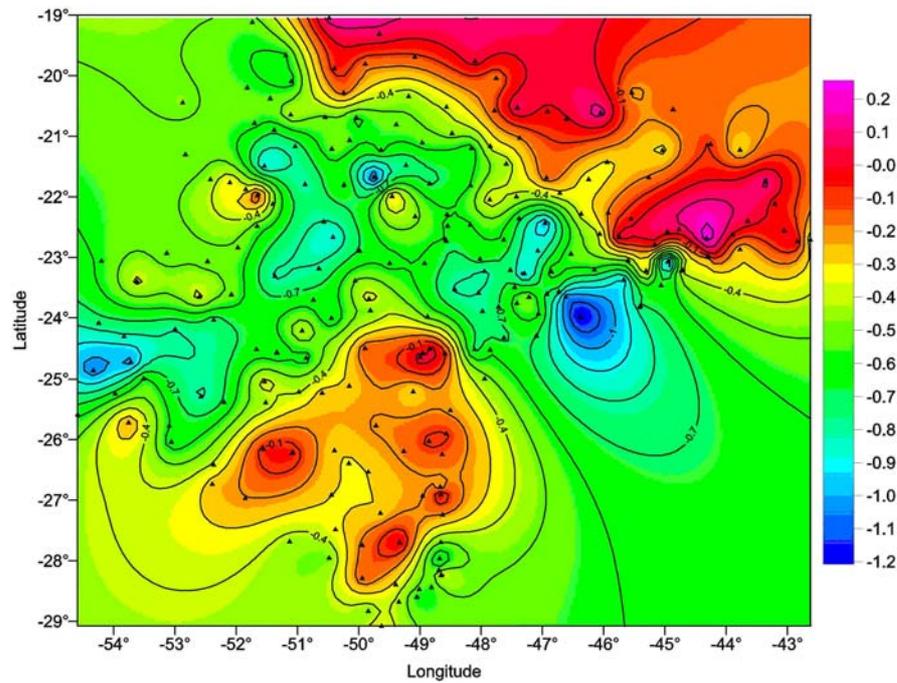


Figura 5.5 – Componente sistemática do geóide após a remoção dos erros grosseiros  
(Unidade: m)

Mesmo após a remoção das altitudes com erros grosseiros, ainda há uma média não nula na componente sistemática, indicando que o geóide gravimétrico continua incompatível com o geóide do sistema altimétrico brasileiro nessa região.

Tabela 5.3 – Parâmetros estatísticos dos dados

Estatísticas de $\Delta N$	Valor numérico
Número de dados	216
Mínimo (m)	-1,222
Máximo (m)	0,260
Amplitude (m)	1,482
Média (m)	-0,437
Desvio padrão (m)	0,289
Assimetria	0,008
Curtose	-0,413

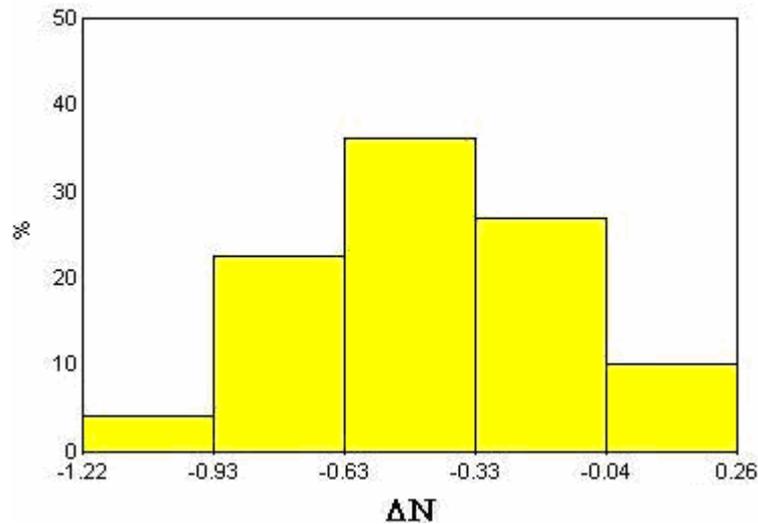


Figura 5.6 – Histograma da componente sistemática após a remoção dos erros grosseiros  
(Unidade: m)

## 5.2 COMPATIBILIZAÇÃO DOS GEÓIDES

Como foi mencionado em capítulos anteriores, as alturas geoidais determinadas por GPS/nivelamento são, geralmente, diferentes daquelas obtidas a partir do modelo geoidal gravimétrico. Entre as causas dessas diferenças, a predominante é a incompatibilidade de referenciais adotados nos dados envolvidos. Além disso, o *datum* altimétrico local, cujas altitudes ortométricas são referidas, não corresponde ao valor de referência do modelo geopotencial ou ao sistema de referência do *GPS* (Fotopoulos, 2003).

A incompatibilidade de referenciais é um efeito que pode ser estimado por modelos de correção, determinados a partir das diferenças. Assim, o objetivo desta seção é apresentar os resultados obtidos com os modelos descritos na seção 4.2.2, a fim de se escolher o mais adequado para compatibilizar o geóide gravimétrico ao do *Datum* altimétrico brasileiro.

### 5.2.1 Correções ajustadas

A rotina para ajustamento por MMQ, descrito na Seção 4.2.1, foi implementada no *software* MatLab, cujas etapas principais, para a modelagem, de correções estão resumidas na Figura 5.7; os coeficientes calculados são apresentados na Tabela 5.4. Os modelos foram usados para compatibilizar o geóide gravimétrico com o materializado por marégrafo no *Datum* altimétrico de Imbituba. Os parâmetros estatísticos calculados para os modelos

paramétricos analisados (Tabela 5.5), mostram que a componente sistemática foi adequadamente modelada com a maioria dos modelos usados, como indicam as médias dos resíduos. Entretanto, os desvios padrões variam conforme o modelo.

As componentes sistemáticas, modeladas com os modelos usados, foram representadas, graficamente, nas Figuras 5.8 a 5.13.

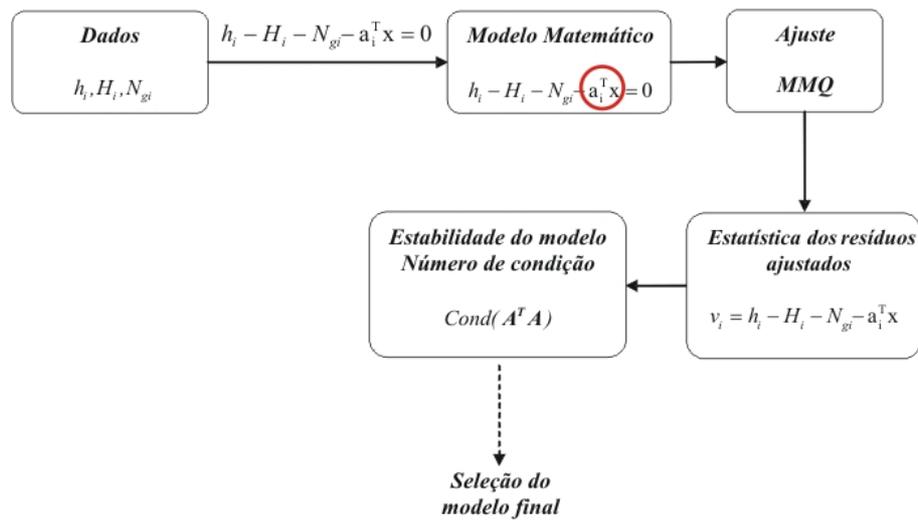


Figura 5.7 – Procedimentos no MatLab para calcular os parâmetros dos modelos usados

Tabela 5.4 – Coeficientes dos modelos usados

<i>Modelos polinomiais e respectivas ordens dos parâmetros</i>								
	1	2	3	4	5	6	7	8
Bilinear	20,701	0,859	0,436	0,017				
Biquadrático	-10,841	-46,373	-28,116	53,547	5,218	65,002		
<i>Transformação de similaridade e respectivas ordens dos parâmetros</i>								
4 Parâmetros	63,219	-37,023	45,354	25,353				
5 Parâmetros	-23,659	29,868	36,190	-44,918	0,000003			
7 Parâmetros	777,488	-941,829	-3944,112	-0,055	-0,045	-1344,460	-0,000223	
8 Parâmetros	774,754	-936,826	-3920,993	-0,0549	-0,045	-0,000001	-1248,082	-0,000221

Tabela 5.5 – Parâmetros estatísticos dos modelos

Modelo	Bilinear	Biquadrático	4 Parâmetros	5 Parâmetros	7 Parâmetros	8 Parâmetros
Número de dados	216	216	216	216	216	216
Mínimo (m)	-0,777	-0,707	-0,817	-0,773	-0,720	-0,725
Máximo (m)	0,811	0,616	0,599	0,604	0,627	0,626
Amplitude (m)	-1,588	-1,323	-1,415	-1,377	-1,347	-1,351
Média (m)	0,009	0,008	0,007	0,004	0,001	0,001
Desvio padrão (m)	0,274	0,256	0,265	0,260	0,233	0,233

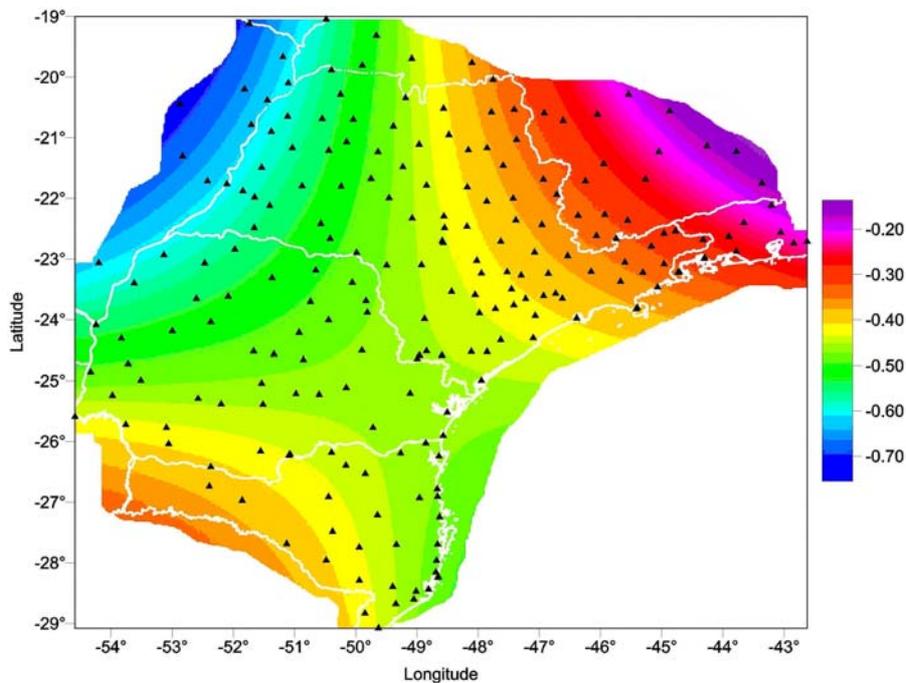


Figura 5.8 – Correções pelo modelo bilinear  
(Unidade: m)

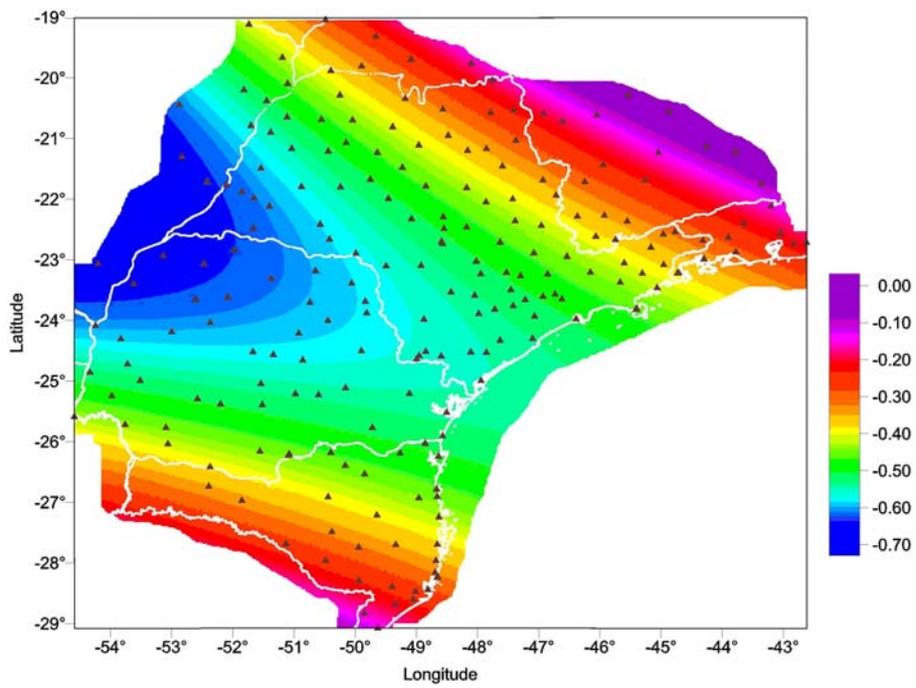


Figura 5.9 – Correções pelo modelo biquadrático  
(Unidade: m)

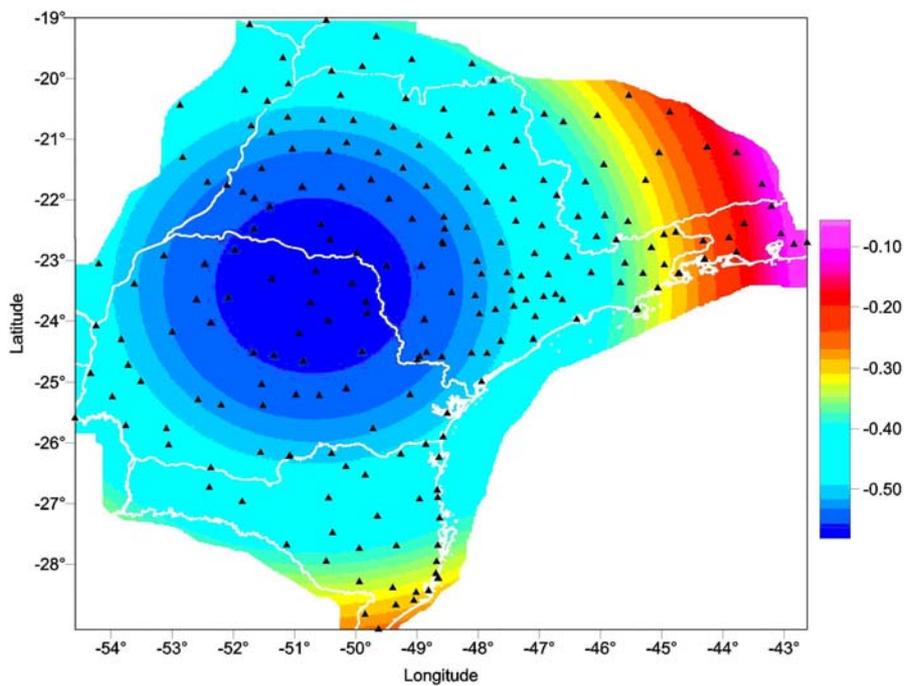


Figura 5.10 – Correções pela transformação de similaridade de 4 parâmetros  
(Unidade: m)

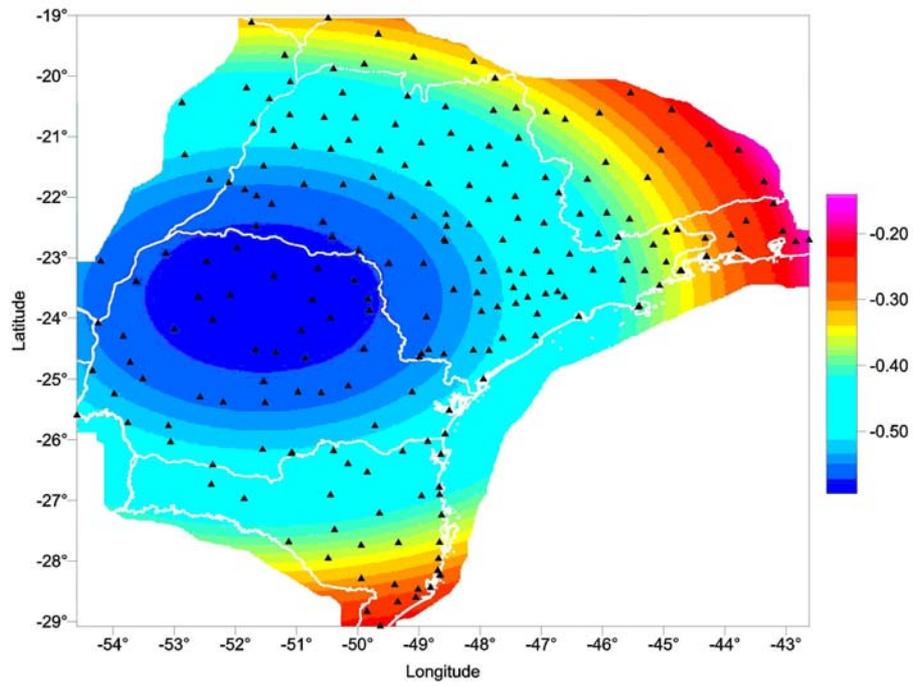


Figura 5.11 – Correção pela transformação de similaridade de 5 parâmetros  
(Unidade: m)

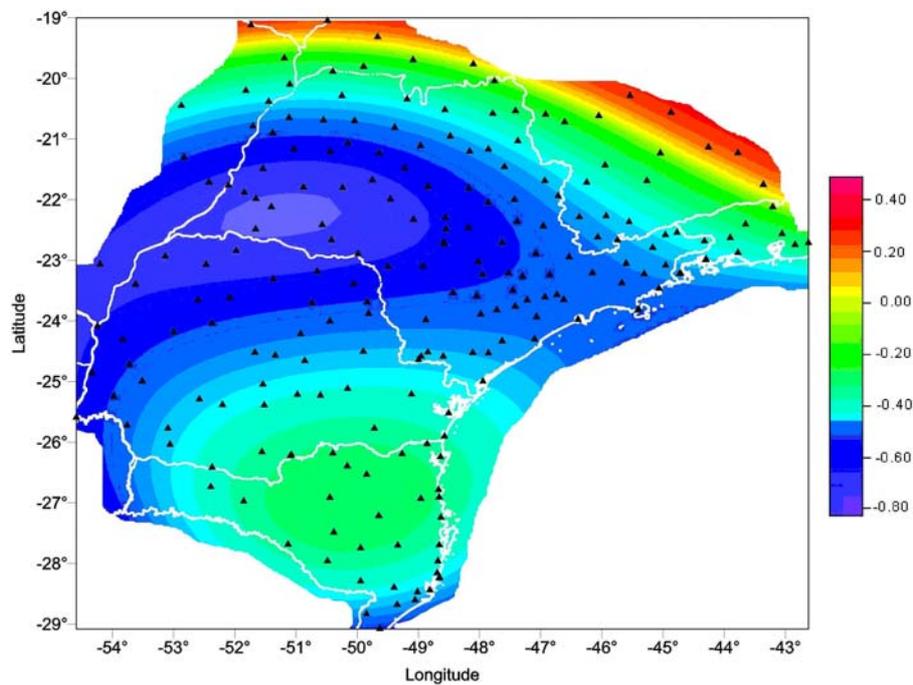


Figura 5.12 – Correção pela transformação de similaridade de 7 parâmetros  
(Unidade: m)

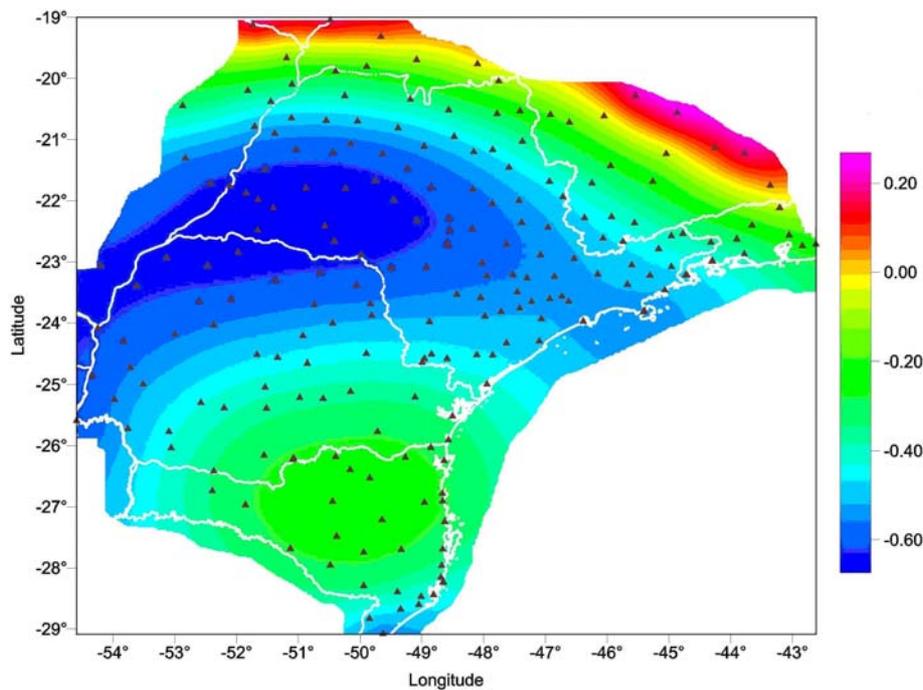


Figura 5.13 – Correção pela transformação de similaridade de 8 parâmetros  
(Unidade: m)

### 5.2.2 Seleção do modelo paramétrico

Como foi discutido na Seção 4.2.2 e apresentado na Seção 5.2.1, há vários modelos para a modelagem da componente sistemática. O modelo paramétrico apropriado para uma região pode ser inadequado para outra. Para selecionar o modelo matemático mais apropriado para toda a região Sudeste, foram adotados alguns critérios de seleção.

O primeiro critério consiste em analisar o grau de concordância entre o valor estimado e o valor de referência (Featherstone, 2001), isto é, analisar a precisão com que o geóide gravimétrico foi ajustado aos pontos da RGSB. Para isso, foi calculada a raiz do erro médio quadrático (RMSE) para cada modelo paramétrico (Tabela 5.6), dada por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\Delta N_i - \Delta \hat{N}_i)^2}{m}} \quad (5.1)$$

onde  $m$  é o número de observações,  $\Delta \hat{N}_i$  é a componente sistemática, ajustada pelos modelos de correção, e  $\Delta N_i$ , a componente sistemática observada.

Nessa análise, os modelos de transformação de similaridade de 7 e 8 parâmetros apresentaram os menores RMSE (0,233 m), comparados com o RMSE anterior ao ajuste (0,524 m). Em geral, os resultados mostram uma pequena diferença entre os modelos. Então, baseado nos resultado todos os modelos provêm um RMSE, comum e satisfatório, em torno de 0,250 m.

Tabela 5.6 – Erro médio quadrático para cada modelo paramétrico analisado

Modelo	RMSE (m)
Antes do ajuste	0,524
Bilinear	0,275
Biquadrático	0,256
4 Parâmetros	0,265
5 Parâmetros	0,261
7 Parâmetros	0,233
8 Parâmetros	0,233

Um outro critério adotado é avaliar o desempenho dos modelos paramétricos, isto é, se eles foram bem ajustados aos pontos RGSB. Isto pode ser avaliado pelo *coeficiente de determinação*,  $r^2$ , e indica o quanto da variação total é comum aos elementos que constituem os pares analisados. Este é dado por (Sen e Srivastava, 1990):

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (l_i - \hat{v}_i)^2}{\sum_{i=1}^m (l_i - \bar{l}_i)^2} \quad (5.2)$$

onde  $m$  é o número de observações,  $\hat{v}_i$  é o resíduo da componente sistemática em cada estação da RGSB, obtido por (4.14) após o ajuste do modelo,  $\bar{l}_i$  é a média das diferenças.

O coeficiente de determinação pode variar entre 0 e 1 ( $0 \leq r^2 \leq 1$ ); quanto mais próximos a 1, menores serão os resíduos e, conseqüentemente, melhor o ajuste. Os coeficientes de determinação, calculados para os 6 modelos estudados, são apresentados na Tabela 5.7.

Essa medida é importante, pois fornece o percentual de confiabilidade do ajuste das variáveis testadas, ou seja, significa que 87% do resultado do modelo bilinear, 92% do resultado do modelo biquadrático, 85% do resultado do modelo de 4 parâmetros, 86% do

resultado do modelo de 5 parâmetros e 76% do resultado dos modelos de 7 e 8 parâmetros foram bem ajustados às componentes sistemáticas. Os resultados obtidos com esses modelos mostram alta confiabilidade nos ajustes, mas é necessário ainda avaliar a estabilidade numérica na região de interesse. Isto pode ser feito pelo cálculo do número de condição da matriz produto  $A^T A$ , apresentado na Tabela 5.8.

Tabela 5.7 – Medidas estatísticas do ajuste dos modelos paramétricos

Modelo	Coefficiente de determinação
Bilinear	0,87
Biquadrático	0,92
4 parâmetros	0,85
5 parâmetros	0,86
7 parâmetros	0,76
8 parâmetros	0,76

Os modelos mais estáveis são os de ordem mais baixa, isto é, com o menor número de parâmetros. Os modelos de ordem mais alta tendem a ser menos estáveis e menos precisos quando aplicados a pontos de controle independentes, isto é, pontos não considerados no cálculo das superfícies de correção (Fotopoulos, 2003).

Tabela 5.8 – Número de condição dos modelos paramétricos

Modelo	Nº de Parâmetros	Nº de Condição
Bilinear	4	$2,90 \times 10^6$
Biquadrático	6	$4,66 \times 10^6$
Transf. Similaridade	4	$2,63 \times 10^6$
Transf. Similaridade	5	$1,71 \times 10^{18}$
Transf. Similaridade	7	$1,20 \times 10^{21}$
Transf. Similaridade	8	$3,13 \times 10^{22}$

Na Tabela 5.8, observa-se que os modelos de 5, 7 e 8 parâmetros possuem os números de condição mais elevados do que os outros modelos; isso ocorre não só por possuírem um número maior de parâmetros, mas, também, devido aos valores numericamente pequenos do fator de escala ( $ds$ ), da diferença de achatamento entre os elipsóides ( $df$ ) e o não paralelismo nos eixos ( $\omega_x$  e  $\omega_y$ ). Uma forma de se tornar esses modelos mais estáveis, é incorporar as constantes  $e^2$  (primeira excentricidade) e  $a$  (semi-eixo maior do elipsóide) nos parâmetros. Por exemplo, a expressão (4.35) com os parâmetros incorporados:

$$\begin{aligned}
A^T X = & \cos \varphi_i \cos \lambda_i dX + \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i dY + \operatorname{sen} \lambda_i dZ + \\
& + \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \operatorname{sen} \lambda_i}{W_i} d\omega_x + \frac{\operatorname{sen} \varphi_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i}{W_i} d\omega_y + \\
& (aW_i + h_i) ds + \frac{1 - f^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} da + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_i}{W_i} df
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Os coeficientes determinados com as duas versões dos modelos são apresentados na Tabela 5.9, na qual se observa maior estabilidade numérica (menor número de condição) na versão que incorpora as constantes.

Outro fator importante na escolha do modelo é o significado de cada coeficiente, que só é possível nos modelos de transformação de similaridade. Com base nos resultados, apresentados nesta seção, foi selecionado o modelo de transformação de similaridade de 7 parâmetros, para compatibilizar o geóide gravimétrico ao do sistema altimétrico. Esse modelo, além de possuir resultados semelhantes aos outros, em termos de precisão interna, ajuste dos dados e estabilidade numérica (exceto o modelo de 8 parâmetros), possui parâmetros suficientes para descrever o relacionamento entre os referenciais, isto é, as distorções de incompatibilidade; e sua resolução espacial é maior do que os outros modelos, significando que seu conteúdo modelado consegue descrever feições menores (ver Figura 5.12).

Tabela 5.9 – Coeficientes dos modelos contendo 5, 7 e 8 parâmetros nas duas versões

5 Parâmetros	Coeficientes (forma 1)	Coeficientes (forma 2)
$dx$	-23,659244	-23,646458
$dy$	29,867624	29,852875
$dz$	36,189927	36,245270
$da$	-44,918018	-44,907386
$df$	0,000004	24,374763
7 parâmetros	Coeficientes (forma 1)	Coeficientes (forma 2)
$dx$	777,487999	-777,488281
$dy$	-941,829660	941,829985
$dz$	-3944,112035	3944,113430
$\omega_x$	-0,055308	2361,535746
$\omega_y$	-0,045724	-1952,307955
$da$	-1344,460790	1344,461261
$df$	-0,000223	1419,948436
8 parâmetros	Coeficientes (forma 1)	Coeficientes (forma 2)
$dx$	774,754557	774,754683
$dy$	-936,826049	-936,826210
$dz$	-3920,993095	-3920,993794
$\omega_x$	-0,054934	2345,544225
$\omega_y$	-0,045496	1942,554135
$ds$	-0,000014	0,000014
$da$	-1248,082166	-1248,083183
$df$	-0,000222	-1411,866786

Tabela 5.10 – Número de condição para as formas 1 e 2 dos modelos

Nº de Parâmetros	Nº de Condição (modelos na forma 1)	Nº de Condição (modelos na forma 2)
5	$1,71 \times 10^{18}$	$3,5310^6$
7	$1,20 \times 10^{21}$	$4,23 \times 10^9$
8	$13,20 \times 10^{22}$	$3,13 \times 10^{22}$

### 5.2.3 Geóide gravimétrico compatível com o do sistema altimétrico

Após a escolha do modelo paramétrico mais adequado, o geóide gravimétrico foi compatibilizado ao do sistema altimétrico brasileiro, de acordo com a Seção 4.2. Assim, foi obtido o modelo digital do geóide gravimétrico compatível com o materializado no marégrafo

de Imbituba, ilustrado na Figura 5.14.

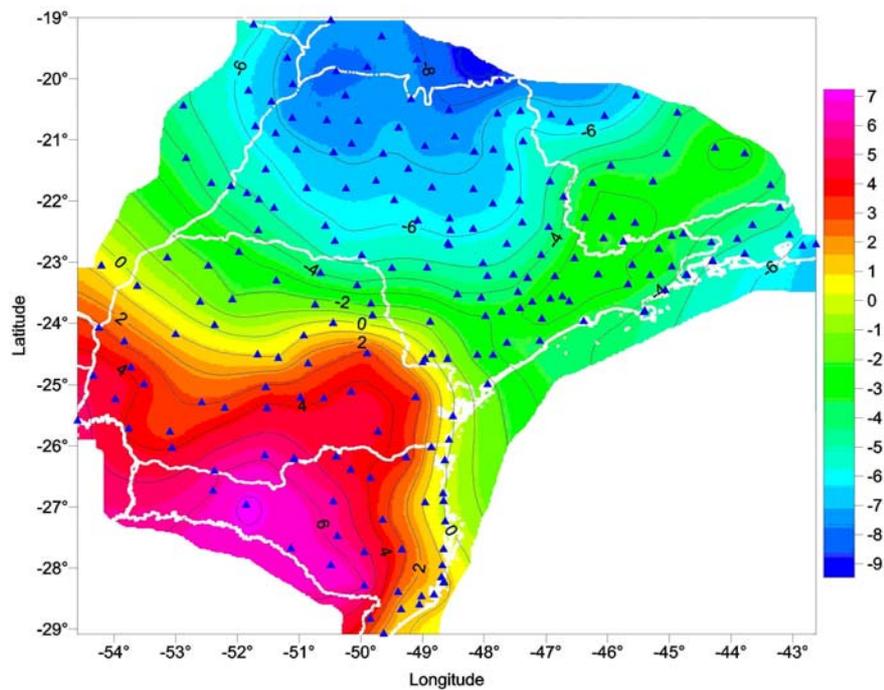


Figura 5.14 – Geóide gravimétrico compatibilizado ao do sistema altimétrico brasileiro  
(Unidade: m)

### 5.3 ALTITUDE ORTOMÉTRICA POR GPS NO MODO RELATIVO

Esta seção apresenta os resultados referentes à determinação da altitude ortométrica por GPS.

O erro relativo do geóide, em parte por milhão (ppm), antes de ser compatibilizado é apresentado na Figura 5.15, e o compatibilizado na Figura 5.16. O modelo matemático utilizado para sua representação em ppm tem a forma exponencial:

$$Y = ae^{-bx} + c \quad (5.4)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os coeficientes determinados pelo método dos mínimos quadrados, descrito na seção 4.2.1, e  $e$  é a base do logaritmo natural.

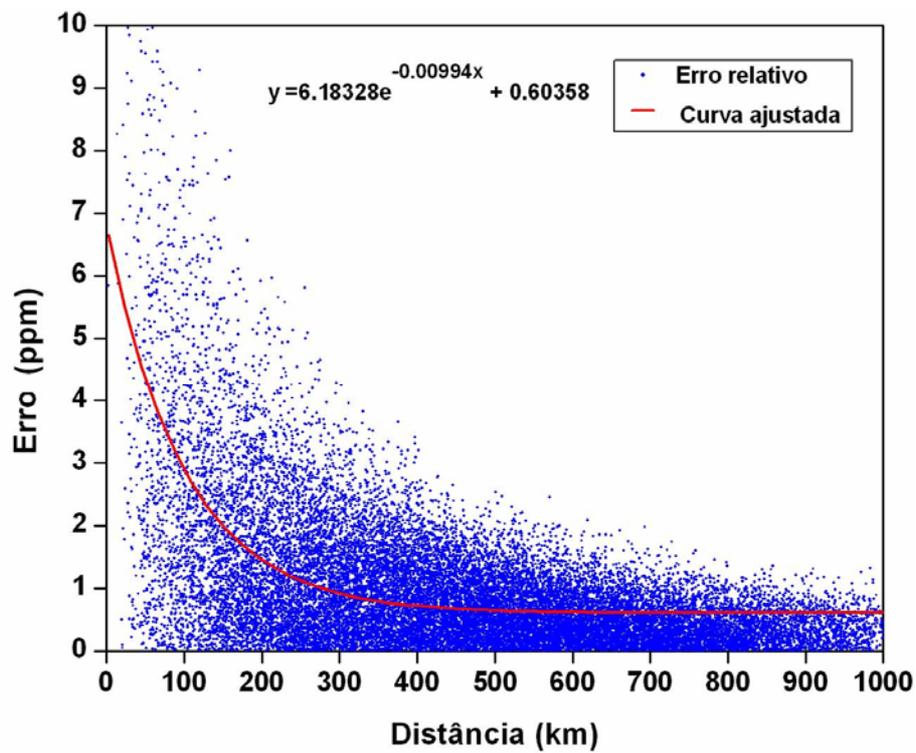


Figura 5.15 – Erro em ppm do geóide antes de ser compatibilizado

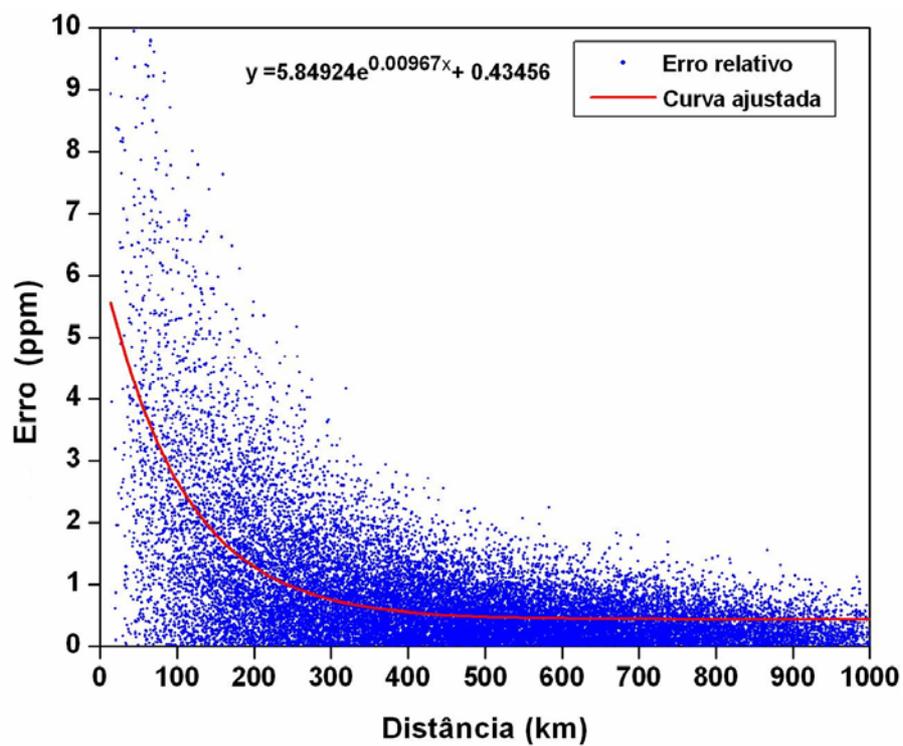


Figura 5.16 – Erro em ppm do geóide compatibilizado ao do sistema altimétrico brasileiro

Os resultados referentes aos ajustes do modelo matemático foram apresentados na Tabela 5.11, a qual mostra como varia o erro relativo do geóide. Observa-se que, para distâncias menores, os erros padrões estimados para as diferenças de alturas geoidais são bem próximos nos dois modelos geoidais. Isto é devido à correlação dos erros sistemáticos do geóide, em pontos suficientemente próximos, que são eliminados na subtração das alturas geoidais. Por ter maior acurácia, o geóide compatibilizado, foi utilizado para determinar as diferenças de alturas geoidais. Assim, o modelo matemático do erro em ppm, apresentado na Figura 5.16, foi utilizado para estimar os erros padrões das diferenças de alturas geoidais.

Tabela 5.11 – Erro relativo do geóide em função da distância

Distância (km)	Erro			
	Geóide		Geóide compatibilizado	
	ppm	Relativo (m)	ppm	Relativo (m)
1	6,726	0,007	6,228	0,006
10	6,202	0,062	5,745	0,057
20	5,672	0,113	5,255	0,105
30	5,193	0,156	4,811	0,144
40	4,758	0,190	4,408	0,176
50	4,365	0,218	4,041	0,202
100	2,892	0,289	2,659	0,266
200	1,450	0,290	1,280	0,256
300	0,917	0,275	0,756	0,227
400	0,720	0,288	0,557	0,223
500	0,647	0,323	0,481	0,241
600	0,619	0,372	0,452	0,271
700	0,609	0,427	0,441	0,309
800	0,606	0,485	0,437	0,350
900	0,604	0,544	0,436	0,392
1000	0,604	0,604	0,435	0,435

#### 5.4 IDENTIFICAÇÃO E ANÁLISE DAS DISTORÇÕES NA RAFB

Após a remoção de erros grosseiros, que é um tipo de distorção, da RAFB e a compatibilização do geóide gravimétrico ao do sistema altimétrico, é necessário realizar outra análise nos dados, para verificar se ainda há distorções na rede altimétrica. Para isso, foi comparado o resíduo da altitude ortométrica ( $\Delta H$ ), dado pela expressão (4.45), isto é, a diferença entre a altitude ortométrica da RAFB e a calculada pelo geóide compatibilizado, com três vezes o  $\sigma_{\Delta H}$  (expressão 4.46).

### 5.4.1 Identificação das distorções

Para a identificação das distorções, todas as RNs depuradas de erros grosseiros foram utilizadas. Assim, as que obtiveram o  $\Delta H$  maior que três vezes o erro padrão (limite) foram identificadas como possíveis distorções. Essas RNs são apresentadas na Tabela A.2, na qual constam as altitudes de referência ( $H_{Ref}$ ), as altitudes calculadas no modo relativo ( $H_{Cal}$ ), os resíduos ( $\Delta H$ ) e seus respectivos erros padrões.

Na Tabela 5.12, são apresentadas as estatísticas da componente residual da altitude ortométrica. A componente sistemática possui média de 0,010 m e desvio padrão de 0,191 m. A existência dessa média não nula indica que a RAFB, na região de estudo, ainda está sujeita a distorções.

Tabelas 5.12 – Estatísticas dos dados depurados de erros grosseiros

Estatísticas ( $\Delta H$ )	Valor numérico
Número de dados	216
Mínimo (m)	-0,487
Máximo (m)	0,781
Amplitude (m)	1,268
Média (m)	0,010
Desvio padrão (m)	0,191
RMSE (m)	0,192
Assimetria	0,435
Curtose	1.275

O histograma da componente residual da altitude ortométrica (Figura 5.17) e os parâmetros estatísticos da componente residual mostram que a distribuição dos dados não é exatamente normal.

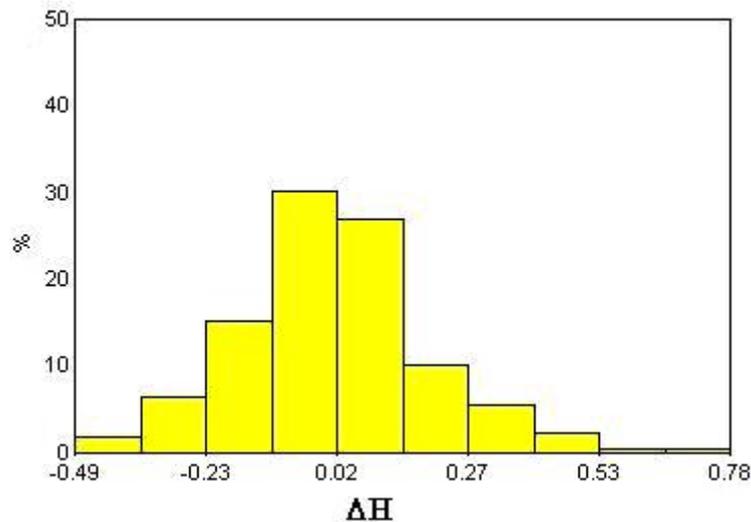


Figura 5.17 – Histograma do resíduo da altitude ortométrica antes da remoção das distorções  
(Unidade: m)

A Figura 5.18 apresenta as RNs identificadas com distorções (vermelha), sem distorções (azul) e os círculos que representam as RNs são proporcionais em relação aos resíduos da altitude ortométrica ( $\Delta H$ ). Na Tabela 5.13, estão às estações que apresentaram distorções, com os valores da altitude ortométrica de referência, a altitude calculada, o resíduo e o erro padrão do resíduo.

Tabela 5.13 – Estações da RGSB que apresentam distorções

<i>Estação</i>	$\varphi(^{\circ})$	$\lambda(^{\circ})$	$H_{Ref}(m)$	$H_{Cal}(m)$	$\Delta H(m)$	$\sigma_{\Delta H}(m)$
ALFREDO_VAGNER	-27,701009	-49,334423	461,702	462,115	-0,413	0,131
ARROIO	-28,154473	-48,692475	16,814	16,610	0,204	0,067
CUNHA	-23,077569	-44,960229	975,254	974,473	0,781	0,186
PAULO_LOPES	-27,96059	-48,679142	4,245	3,913	0,332	0,093

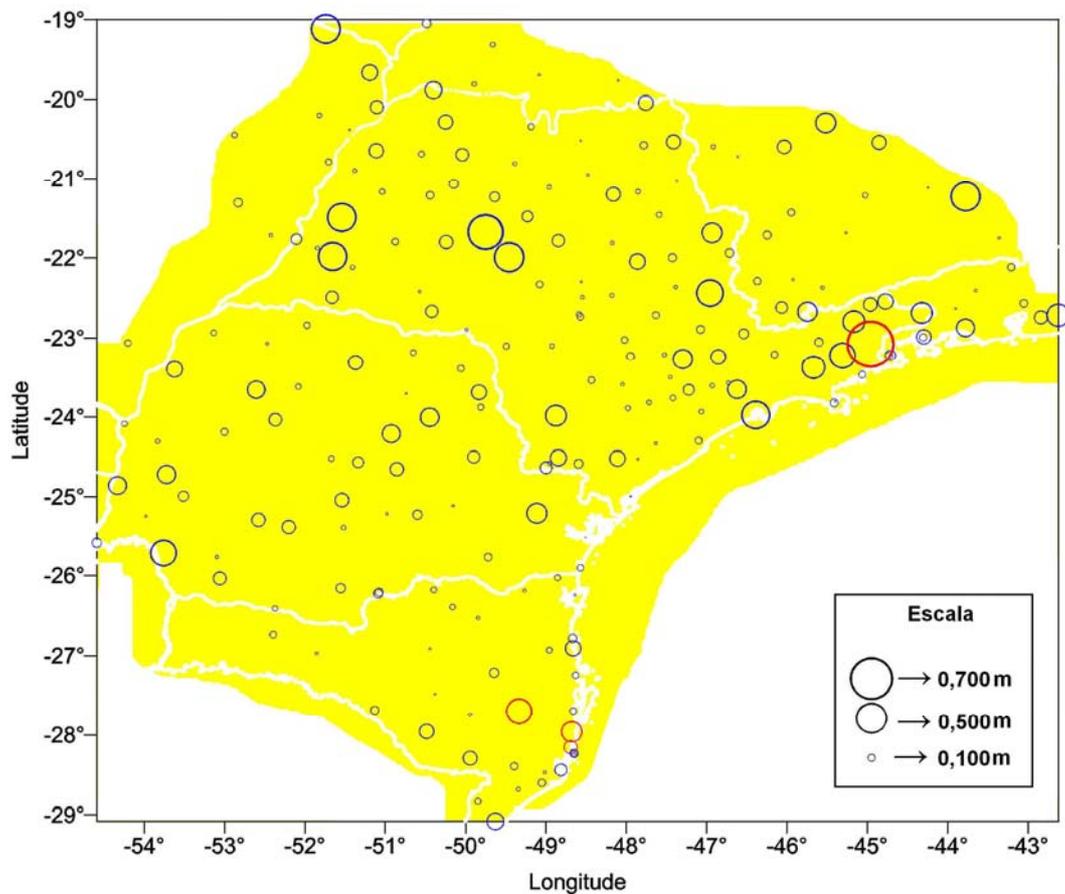


Figura 5.18 – Distribuição geográfica das RNs com distorções (vermelho) e sem distorções (azul)

Analisando o erro padrão da altitude geométrica das RNs, observa-se que as distorções das RNs não podem ser atribuídas a erros nas altitudes geométricas, pois eles tiveram média de 0,050 m. Esses erros também não podem estar no geóide, pois como pode ser visto na Figura 5.19, as RNs próximas às identificadas com distorções possuem valores residuais pequenos.

Analisando o erro padrão da altitude geométrica das RNs, observa-se que as distorções das RNs não podem ser atribuídas a erros nas altitudes geométricas, pois eles tiveram média de 0,050 m. Esses erros também não podem estar no geóide, pois como pode ser visto na Figura 5.19, as RNs próximas às identificadas com distorções possuem valores residuais pequenos.

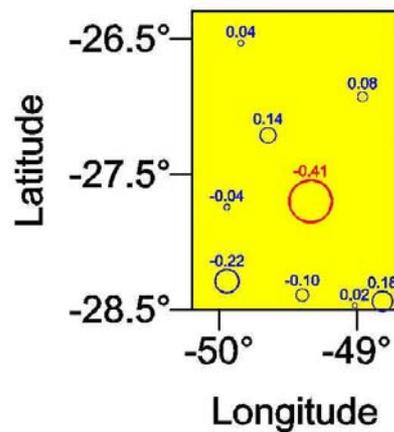


Figura 5.19 – Exemplo de RN com distorção

Na Tabela 5.14 são apresentadas as estatísticas da componente residual após a remoção das distorções. Como podem ser observadas, as componentes possuem média de 0,003 m e desvio padrão de 0,181 m; na Figura 5.22 é apresentado o histograma de frequência, no qual observa-se uma regularidade na distribuição dos dados, encontrando-se mais próximo à distribuição normal.

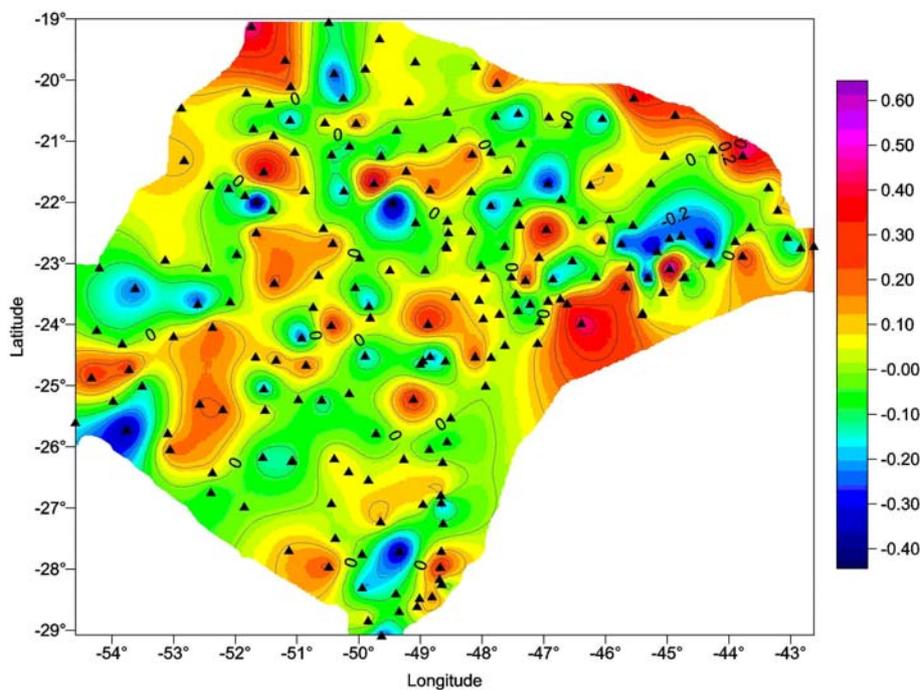


Figura 5.20 – Componente residual da altitude ortométrica  
(Unidade: m)



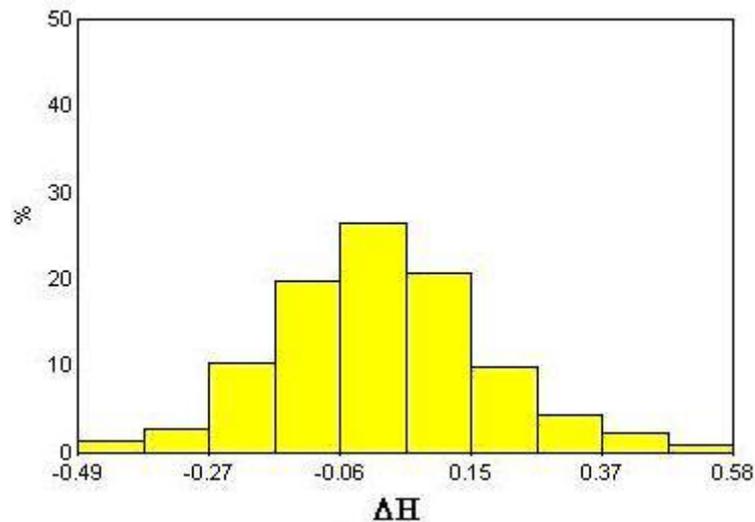


Figura 5.22 – Histograma dos resíduos da altitude ortométrica após a remoção das distorções (Unidade: m)

#### 5.4.2 Correlação dos resíduos com as componentes envolvidas

Os resíduos das altitudes podem estar correlacionados com alguns tipos de variações como: variação das altitudes geométrica e ortométrica, variação na latitude e longitude, e variação da distância em relação ao *datum*. Então, quando há interesse em se analisar o grau de associação entre duas variáveis referentes a um grupo de indivíduos, utiliza-se a correlação. O coeficiente de correlação de Pearson (Tabela 5.15) representa o grau de associatividade entre as variáveis em estudo (Spiegel, 1993).

Tabela 5.15 – Coeficiente de correlação de Pearson (Spiegel, 1993)

Coeficiente	Interpretação
0,01  a  0,19	Correlação bem fraca
0,20  a  0,39	Correlação fraca
0,40  a  0,69	Correlação moderada
0,70  a  0,89	Correlação forte
0,90  a  1,00	Correlação muito forte

Neste trabalho, a correlação de Pearson foi utilizada para verificar as possíveis correlações entre as variações citadas e a distorção existente na RAFB. Com isso, realizou-se uma análise de regressão linear entre as variações e o resíduo da altitude ortométrica, obtendo-se os resultados que são apresentados na Tabela 5.16 e ilustrados na Figura 5.23. Nota-se que os coeficientes de correlação obtidos indicam correlação bem fraca, indicando

que as distorções independem dos dados envolvidos.

Tabela 5.16 – Coeficiente de correlação de Pearson e da equação da reta

	$\Delta H \times \varphi$	$\Delta H \times \lambda$	$\Delta H \times h$	$\Delta H \times H$	$\Delta H \times d$
Coeficiente	0,002	0,001	0,000	0,000	0,001
Equação	$y = 0,1002 + 0,0038x$	$y = 0,1408 + 0,0026x$	$y = 0,0069 + 9 \times 10^{-6}x$	$y = 0,0066 + 1 \times 10^{-6}x$	$y = -0,0066 + 3 \times 10^{-5}x$
Interpretação	Bem fraca	Bem fraca	Sem correlação	Sem correlação	Bem fraca

### 5.4.3 Causas das distorções

As distorções podem ser divididas em regionais ou locais. As distorções regionais são aquelas distribuídas em um conjunto de RNs próximas, cujo exemplo aparece na Figura 5.24. Nota-se que os resíduos das RNs com distorções são bem discrepantes em relação aos outros. Este tipo de distorção geralmente acontece em uma única RN, por causa de algum erro ocorrido durante o nivelamento e que se propaga pela linha restante; as distorções locais, que se caracterizam por estarem isoladas, estão ilustradas na Figura 5.25.

Os erros que podem estar ocasionando essas distorções são: efeitos térmicos da incidência de raios solares no nível; influências do campo magnético em níveis automáticos; erro de colimação vertical e horizontal; erros de leitura do micrômetro do nível ou da graduação da mira, e erro durante as anotações manuais. A grande maioria desses erros está propensa às falhas do operador, pois os instrumentos utilizados na implantação da RAFB eram analógicos, tornando o trabalho mais cansativo e sujeito à dispersão durante o nivelamento.

Desde 1997 o Departamento de Geodésia do IBGE vem conduzindo novos levantamentos altimétricos de forma a atender a interconexão de blocos recentes de nivelamento. Isso vai permitir a recomposição de uma estrutura única e homogênea na RAFB, resolvendo os problemas, cada vez mais frequentes, de heterogeneidade temporal causada pela destruição das RNs. Mas, ao se implantar uma nova estação de referência, tem de ser ter controle e extremo cuidado na escolha das RNs de partida, pois essas poderão conter erros que não foram identificados na análise crítica dos dados, no processo de ajustamento da RAFB, causando, assim, uma propagação de erros nas novas RNs implantadas, podendo ser

caracterizado como um tipo de erro sistemático (Luz & Guimarães, 2001).

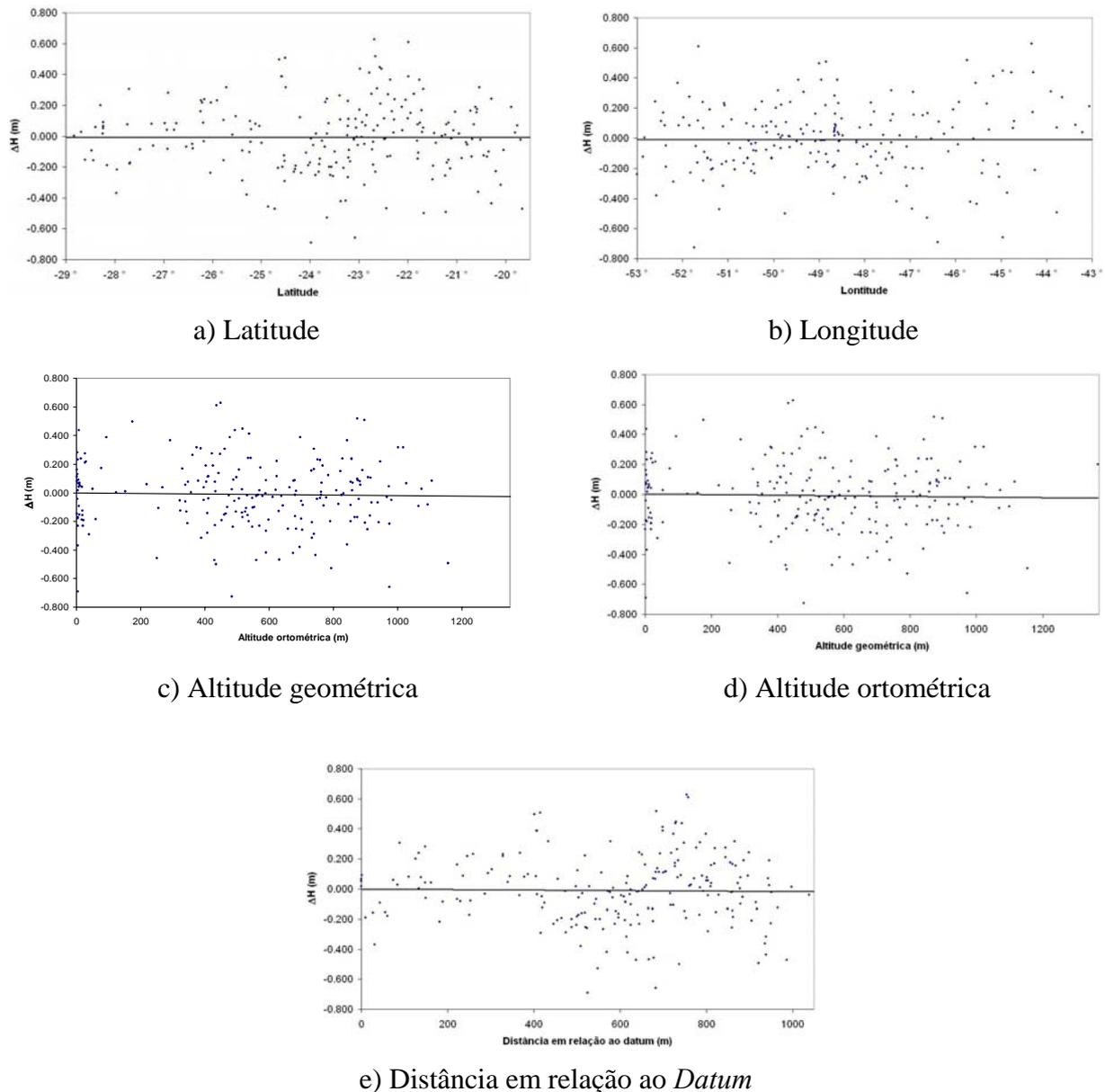


Figura 5.23 – Correlação do resíduo da altitude ortométrica e os dados envolvidos

As distorções também podem ser caracterizadas como erros grosseiros que não foram identificados pela análise estatística para identificação de erros grosseiros, descrita na seção 4.1.1. Isto pode ser visto na Figura 5.26, a qual apresenta todas as RNs usadas neste trabalho, nota-se que nas proximidades das RNs identificadas com erros grosseiros há as RNs identificadas com distorções, indicando que esses erros foram propagados na linha de nivelamento, tornando-se uma distorção regional.

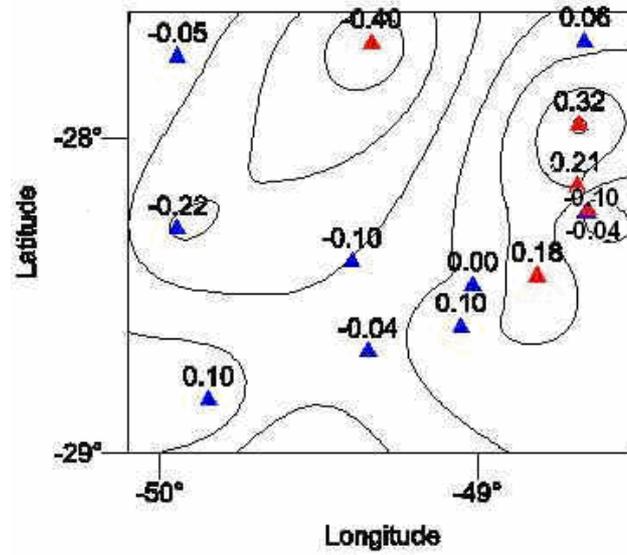


Figura 5.24 – Exemplo de distorção regional  
(Unidade: m)

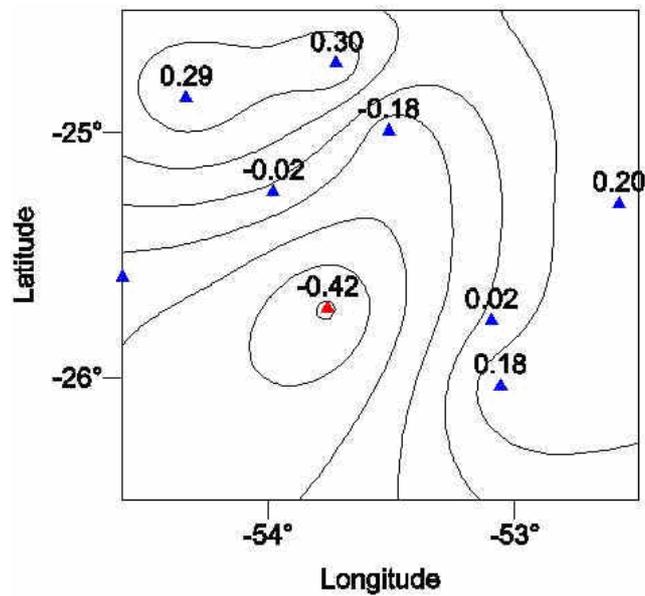


Figura 5.25 – Exemplo de distorção local  
(Unidade: m)

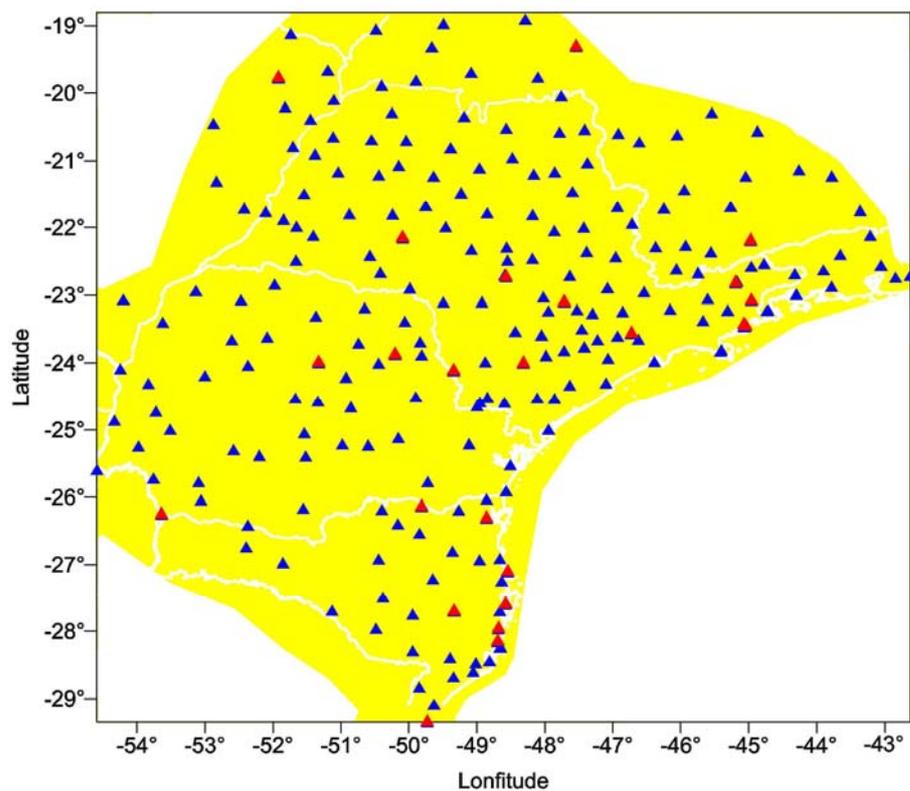


Figura 5.26 – Conjunto de RNs analisadas e identificadas com distorções (vermelha) e livre de erros (azul)

## 6 CONCLUSÕES

O refinamento dos dados a fim de detectar distorções (erros grosseiros e sistemáticos) deve ser encarado como uma tarefa tão importante quanto às outras, visto que o ajustamento de redes altimétricas de alta precisão requer cuidados especiais na crítica e análise dos dados do nivelamento geométrico. Se eventuais erros não forem identificados, podem ser propagados pelo ajustamento, acarretando distorções na rede como um todo. Assim, este trabalho avaliou as distorções da RAFB no Sul/Sudeste do Brasil usando o geóide gravimétrico e o GPS. Para tanto, as altitudes ortométricas da rede altimétrica, coincidentes com as estações da RGSB, foram comparadas com as obtidas pela combinação do GPS com o geóide gravimétrico ( $\Delta H = H_{Ref} - H_{cal}$ ). A comparação dos resíduos encontrados e os respectivos erros padrões indicaram distorções na RAFB.

Na metodologia proposta, foi realizada a análise estatística da componente sistemática do geóide ( $\Delta N = N_{GPS} - N_g$ ) em 236 estações da RGSB. Constatou-se, com isso, a existência de uma média não nula, indicando a incompatibilidade de  $N_{GPS}$  com  $N_g$  na região estudada, relacionada a várias causas, entre as quais os erros grosseiros e sistemáticos existentes nas RNs, também considerados como distorções da rede. Como pôde ser averiguado com a identificação e remoção de 20 RNs contendo erros grosseiros, com a componente sistemática do geóide passando a ser mais suave (Figura 5.5).

Outra causa da componente sistemática é a incompatibilidade dos referenciais adotados, cujo efeito altera a forma global da rede altimétrica, que pode ser modelada e não foi considerada como uma distorção. Para aplicar a metodologia e identificar as RNs contendo as distorções, é fundamental compatibilizar o geóide gravimétrico ao do sistema altimétrico local. Portanto, foi necessário modelar a componente sistemática, utilizando um modelo matemático de correção. Para isso, foram testados 5 (cinco) modelos, a fim de se escolher o que melhor se ajustasse à diferença sistemática da região, conforme os critérios aceitos para realizar-se a melhor escolha.

Com base nos resultados obtidos, foi selecionado o modelo de transformação de similaridade de 7 parâmetros, pois, além de fornecer resultados comparáveis aos demais modelos avaliados, contém parâmetros apropriados para descrever a transformação entre os referenciais, e sua resolução espacial é maior e melhor do que os outros modelos, significando

que seu conteúdo modelado consegue descrever feições menores. Após a escolha do modelo paramétrico (Figura 5.12), o modelo geoidal gravimétrico foi compatibilizado ao do *Datum* Altimétrico, resultando no modelo digital representado graficamente na Figura 5.14.

As altitudes ortométricas, determinadas no modo relativo, comparadas com as originais, nas estações da RGSB, forneceram os resíduos ( $\Delta H$ ) e seus respectivos erros padrões. As distorções, caracterizadas por resíduos com módulos superiores ao triplo do erro padrão da componente residual da altitude, foram identificadas e apresentados graficamente na Figura 5.18, na qual se observa 4 RNs com distorções.

Essas distorções não podem ser atribuídas a erros nas altitudes geométricas, pois a média dos erros padrões dessa componente foi de 0,050 m, inferior aos valores obtidos nas distorções. Tampouco podem ser associadas ao geóide, pois as RNs próximas às identificadas com distorções possuem valores residuais pequenos.

Pode-se constatar, pelo coeficiente de correlação de *Person*, que os resíduos das altitudes não estão correlacionados com nenhum tipo de variação das componentes (altitudes geométrica e ortométrica; latitude e longitude; distância em relação ao *datum*) cujos resultados são apresentados na Tabela 5.16 e ilustrados na Figura 5.23.

Em vista disso, concluiu-se que essas distorções são causadas por problemas nas altitudes ortométricas, as quais estão sujeitas a erros grosseiros, sistemáticos e aleatórios. Suas principais fontes de erros observacionais são: refração atmosférica, imperfeições na colimação de nível e verticalidade de miras, erro de graduação de miras e marés terrestres. As redes altimétricas envolvem também uma grande quantidade de observações realizadas em condições heterogêneas, tais como variações na topografia, nos instrumentos, nos operadores, entre outros. Tais erros muitas vezes não são identificados e acabam sendo minimizados no ajustamento da rede e, conseqüentemente, acabam introduzindo essas distorções.

Os resultados obtidos mostraram que a metodologia usada neste trabalho pode ser empregada de maneira eficiente na avaliação de distorções de redes altimétricas. Entretanto, para sua adequada utilização, são necessários dados que possibilitem explorar plenamente suas potencialidades, ou seja, uma rede GPS de referência suficientemente densa, que forneça estações com coordenadas geodésicas e altitudes ortométricas, assim como um geóide gravimétrico, cuja precisão seja compatível com a do nivelamento. A implantação da RGSB e o aprimoramento do geóide gravimétrico forneceram os requisitos básicos para a avaliação da rede altimétrica na região estudada.

Para que tal metodologia possa ser utilizada de maneira mais abrangente, redes GPS

devem ser implantadas sobre a rede altimétrica fundamental, em todo território brasileiro, e continuar os levantamentos gravimétricos para o aprimoramento do geóide gravimétrico de alta precisão. Além disso, visando alcançar-se tais objetivos, as redes GPS devem possuir densidade e distribuição geográfica adequadas de estações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR, J.C.M. – 1968 – “Sistema nacional de nivelamento de 1ª ordem”. In: *1ª Conferência Nacional de Geografia e Cartografia*. Rio de Janeiro, Brasil.

ALENCAR, J.C.M. – 1990 – “Datum altimétrico brasileiro”. In: *Caderno de Geociências*, **5**: 69-73. Rio de Janeiro, Brasil.

BOMFORD, G. – 1983 – *Geodesy*. 4ª ed., Oxford, University Press.

CHISSOM, B.S. – 1970 – “Interpretation of the kurtosis statistic”. *Journal of the Royal Statistical Society*, **24** (4): 19-22.

CORDINI, J. – 1998 – Estudo dos aspectos geodinâmicos no Datum da red altimétrica do SGB, Tese de Doutorado, Departamento de Geomática, UFPR, Paraná, 159 pp.

DREWES, H.; SÁNCHEZ, L.; BLITZKOW, D.; FREITAS, S. – 2002 – “Scientific Foundations of the SIRGAS Vertical Reference System”. In: *Vertical Reference Systems*, IAG Symposia, **124**: 297-301.

EROL, B. & ÇELIK, R. N. – 2004 – “Precise local geoid determination to make gps technique more effective in practical applications of geodesy”. *FIG Working Week 2004*, Athens, Greece..

ESCOBAR, I. P. – 1991 – *Altitude: conceituação, realização, modelamento matemático e ajustamento*, Tese de Doutorado, IAG/USP, São Paulo, 144pp.

FEATHERSTONE, W.E. – 2001 – “Absolute and relative testing of gravimetric geoid models using Global Positioning System and orthometric height data”. *Computers and Geosciences*, **27**: 807-814.

FOTOPOULOS, G. – 2003 – *An analysis on the optimal combination of geoid, orthometric*

*and ellipsoidal height data*. Tese de Doutorado, University of Calgary, Department of Geomatics Engineering Report Number 20185, Calgary.

FOTOPOULOS, G.; KOTSAKIS, C. & SIDERIS, M.G. – 2001 – “How accurately can we determine orthometric height differences from GPS and geoid data?” *Journal of Surveying Engineering*, **129**(1): 1-10.

GEMAEL, C. – 2002 – *Introdução à Geodésia Física*. Curitiba, Editora da Universidade Federal do Paraná, 304 pp.

HECK, B. – 1990 – “An evaluation of some systematic error sources gravity anomalies”. *Bulletin Géodésique*, 64: 88-108.

HEISKANEN, W.A. & MORITZ, H. – 1967 – *Physical geodesy*, W.H. Freeman, San Francisco. 364pp.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H. & COLLINS, J. – 1994 – *GPS: Theory and practice*. Springer-Verlag Wien/N. York, 355 pp.

IAG (INTERNACIONAL ASSOCIATION OF GEODESY) – 1971 – “Geodetic Reference System”, 1967: *Internacional Association of Geodesy special publication n° 3*, 116pp.

IAG (INTERNACIONAL ASSOCIATION OF GEODESY) – 1980 – “The geodesist’s book”. (I. I. Mueller ed.), *Bulletin Géodésique*, **54**: 394-408.

IBGE (Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) – 1998 – *Especificações e normas gerais para levantamentos geodésicos: coletâneas das normas vigentes*. Rio de Janeiro. IBGE/Departamento de Geodésia, 74 pp.

IBGE (Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) – 2004 – Página na Internet <http://www.ibge.gov.br/>

IBGE (Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) – 2005 – Página na Internet [http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/estacoes\\_rmpg.pdf](http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/estacoes_rmpg.pdf)

IGG – 1962 – Nivelamento Geral do Estado – “Altitudes de Precisão”, *Boletim N.º. 36*, Instituto Geográfico e Geológico, Secretaria de Agricultura do Estado de São Paulo, São Paulo.

JEKELI, C. – 2000 – *Heights, the Geopotential, and Vertical Datums*. Ohio State University, Geodetic Science and Surveying, Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science, Report N.º. 459.

JIAN, Z., DUQUENNE, H. – 1996 – “On the combined adjustment of a gravimetrically determining geoid and GPS levelling station”. *Journal of Geodesy*, **70** (8): 505-514.

JOANES, D.N & GILL, C.A. – 1998 – “Comparing Measures of Sample Skewness and Kurtosis”. *The Statistician*, **47** (1): 183-189.

KOTSAKIS, C. & SIDERIS, M. G. – 1999 – “On the adjustment of combined GPS/Levelling/Geoid networks”. *Journal of Geodesy*, **73** (8): 412-421.

KOTSAKIS, C., FOTOPOULOS, G., & M. G. SIDERIS – 2001 – “Optimal fitting of gravimetric geoid undulations to GPS/levelling data using an extended similarity transformation model”. Presented at the 27<sup>th</sup> Annual Meeting joint with the 58th Eastern Snow Conference of the Canadian Geophysical Union, Ottawa, Canada, May 14-17.

LEICK, A. – 1990 – *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, Inc., N. York, 352 pp.

LEMOINE, F. G.; KENYON, S. C.; FACTOR, J. K.; TRIMMER, R. G.; PAVLIS, N. K.; CHINN, D. S.; COX, C.M.; KLOSKO, S. M.; LUTHCKE, S. B.; TORRENCE, M. H.; WANG, Y. M.; WILLIAMSON, R. G.; PAVLIS, E. C., RAPP, R. H. & OLSON, T. R. – 1998 – *The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96*. NASA Technical Publication 206861, July 1998.

LUZ, R. T.; FREITAS, S. R. C.; DALAZOANA, R.; MIRANDA, F. A. ; PALMEIRO, A. S.; JAMUR K. P. – 2004 – “Possibilidades de integração de dados gravimétricos à rede altimétrica do SGB para cálculo de altitudes SIRGAS no Brasil”. *I SIMGEO*. Recife.

LUZ, R. T.; GUIMARÃES, V. M. – 2003 – “Dez Anos de Monitoramento do Nível do Mar no IBGE”. *Anais do III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas* (CD-ROM), Curitiba, PR.

LUZ, R.T.; FREITAS, S.R.C. de; DALAZOANA, R. – 2002 – Acompanhamento do Datum Altimétrico Imbituba através das Redes Altimétrica e Maregráfica do Sistema Geodésico Brasileiro. In: VII Congresso Internacional de Ciências da Terra, Santiago, Chile, October 21-25, 2002. Anais (não publicados). Disponível em <[www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/default\\_artigos.shtm](http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/default_artigos.shtm)>.

LUZ, R. T.; GUIMARÃES, V. M. – 2001 – “Realidade e Perspectivas da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro”. *Anais do II Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas* (CD-ROM), Curitiba, PR.

MAINVILLE, A.; CRAYMER, M. & BLACKIE, S. – 1997 – “The GPS height transformation 1997, an ellipsoidal-orthometric height transformation for use with GPS in Canada”, *Report of Geodetic Survey Division*, Geomatics Canada, Ottawa.

MOLODENSKII, M.S., EREMEEV, V.F. & YURKINA M.I. – 1960 – Methods for study of the external gravitational field and the figure of the Earth. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalém.

MONICO, J.F.G. – 2000 – *Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: descrição, fundamentos e aplicações*. São Paulo: Editora Unesp, 287 pp.

MORITZ, H. – 1980 – *Advanced Physical Geodesy*, Abacus Press, Wichmann, 500 pp.

MORRISON, D.F. – 1976 – *Multivariate statistical methods*, New York, McGraw-Hill, 2ed.,

1976. 307p.

OLLIKAINEN, M. – 1997 – “Determination of orthometric heights using GPS levelling”, *Report 123, Publications of the Finnish Geodetic Institute, Helsinki*

PEREIRA, K. D.; FAZAN, J. A. & FORTES, L. P. S. – 2003 – *RBMC: Sete anos fornecendo referência a posicionamentos GPS no Brasil e Exterior, XXI Congresso Brasileiro de Cartografia, Belo Horizonte, Anais (cd-rom).*

POUTANEN, M. – 1999 – *Use of GPS in unification of vertical Datums and detection of levelling network errors, Lantmäteriverket 3: 301-312.*

RAPP, R. H.; BALASUBRAMANIA, N. – 1992 – *A conceptual formulation of a world height system.* Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Report N°, 421, 55pp.

RODRIGUES, D. D. – 2002 – *Rede geodésica de precisão no estado de Minas Gerais: avaliação de diferentes estratégias de processamento e ajustamento.* Tese de Doutorado. Curso de pós-graduação em Engenharia de Transportes da EPUSP, São Paulo.

ROMAN, O. – 2004 – *Ways of determining the orthometric heights using GPS Technology,* FIG Working Week, Athens, Greece, May 22-27.

SÁ, N. C. de – 1988 – *Modelos estatísticos e representação integrada do campo de gravidade no Brasil.* Tese de Doutorado, IAG/USP, São Paulo, 240 pp.

SÁ, N. C. de; GALERA, J. F.; KRUEGER, C. P.; SOUZA, S. F. de; CASTRO, A. L. P. de & VIEIRA. - 2002 – “Rede GPS no Estado de São Paulo: um projeto orientado para aplicações cotidianas”. Simpósio Brasileiro de Geomática. Pres. Prudente-SP, CD-ROM.

SÁ, N. C. de; SOUZA, S. F. de; MONICO, J. F. G.; CASTRO, A. L. P. & KRUEGER, C.P. – 2001 – “O GPS no Estado de São Paulo: potencialidades, desafios e estratégias”. *XX*

*Congresso Brasileiro de Cartografia*, Porto Alegre, Anais (cd-rom).

SÁ, N.C.de – 2004 – *O campo de gravidade, o geóide e a estrutura crustal na América do Sul*. Tese de Livre Docência. Departamento de Geofísica do IAG-USP, São Paulo, 121 pp.

SANTOS, M. S. T. – 2005 – *Potencialidades do GPS em levantamentos geofísicos terrestres*. Dissertação de Mestrado. IAG/USP, São Paulo, 140pp.

SEEBER, G. – 1993 – *Satellite Geodesy: Foundations, methods and applications*, Walter de Gruyter, N. York, 531 pp.

SEGANTINE, P. C. L. – 1995 – *Estabelecimento e ajuste de uma rede geodésica no Estado de São Paulo, com o sistema de posicionamento NAVSTAR/GPS*. Tese de Doutorado. Curso de pós-graduação em Engenharia de Transportes da EPUSP, São Paulo.

SEN, A. & SRIVASTAVA, M. – 1990 – *Regression Analysis: Theory, Methods and Applications*. Springer Texts in Statistics, Springer, New York.

SIDERIS, M. G . & LI, Y. – 1992 – “Improved geoid determination for levelling by GPS”. Presented at the 6<sup>o</sup> *International Geodetic Symposium on Satellite Positioning*, Columbus, Ohio, March 17-20

SIDERIS, M.G., MAINVILLE A. & R. FORSBERG. – 1992 – “Geoid testing using GPS and leveling (or GPS testing using leveling and the geoid?)”. *Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry and Surveying*, **57**: 62-67.

SOUZA, S. F.de – 2002 – *Contribuição do GPS para o aprimoramento do geóide no Estado de São Paulo*, Tese de Doutorado, IAG/USP, São Paulo, 204 pp.

SP (*SPECTRA PRECISION*) – 2000 – *GeoGenius 2000 user's manual*. Version 2.1 Release 1. Hohenkirchen-Siegertsbrunn, Germany.

SPIEGEL, M.R. – 1993 – *Estatística*, 3ª ed. São Paulo: Mkron Books, 643pp

TORGE, W. – 1991 – *Geodesy*, 3ª ed. Berlin: Walter. de Gruyter, 264 pp

TSCHERNING, C. – 2001 – “Computation of spherical harmonic coefficients and their error estimates using least-squares collocation”. *Journal of Geodesy*, **75**: 12-18.

VANICEK, P. & KRAKIWSKY, E. J. – 1986 – *Geodesy: The concepts*, Second edition. Elsevier, N. York, 697 pp.

VERGOS G. S. & SIDERIS M. G. – 2002 – “Evaluation of Geoid models and validation of Geoid and GPS/Levelling undulations in Canada”, *IGeS Bulletin*, **12**.

WETHERILL, G. B. – 1967 – *Elementary statistical methods*, Chapman & Hall.

WICHENCHAROEN, C. – 1982 – “The Indirect Effect on the Computation of Geoidal Undulations. Department of Geodetic Science and Surveying”, Ohio State University, *Report N.º. 336*, Columbus, Ohio.

ZHONG, D. – 1997 – “Robust estimation and optimal selection of polynomial parameters for the interpolation of GPS geoid heights”, *Journal of Geodesy*, **71**: 552-561.

## APÊNDICE

Tabela A.1 – Estações da RGSB usadas na análise estatística dos dados e componentes sistemáticas do geóide. Unidade: m

<i>Estação</i>	<i>h</i>	<i>H</i>	$N_{GPS}$	$N_g$	$\Delta N$	<i>d</i>
ADOLFO	426,722	433,718	-6,996	-6,418	-0,579	785,267
AGUA_CLARA	318,865	323,824	-4,959	-4,492	-0,467	965,910
AGUAS_PRATA	819,188	823,053	-3,865	-3,553	-0,313	727,132
ALFENAS	875,992	879,725	-3,733	-3,412	-0,321	804,772
ALF_VAGNER	465,249	461,702	3,547	3,514	0,033	89,359
ALTINOPOLIS	885,616	891,216	-5,600	-5,389	-0,211	811,938
ANDRADINA	401,153	407,909	-6,756	-6,068	-0,688	861,199
ANGRA_REIS_A	3,205	7,860	-4,655	-4,666	0,011	729,415
ANGRA_REIS_B	73,349	78,266	-4,917	-4,660	-0,257	728,054
AN_GARIBALDE	880,894	874,869	6,024	6,473	-0,448	250,636
AP_TABUADO	380,881	388,717	-7,836	-7,194	-0,642	938,729
APIAI	897,939	897,416	0,523	0,464	0,059	414,568
ARABA	418,526	426,329	-7,803	-7,748	-0,055	945,637
ARACATUBA	398,822	405,775	-6,953	-6,426	-0,528	801,767
ARARAQUARA	603,840	610,677	-6,837	-6,236	-0,601	716,194
ARARAS	624,155	629,934	-5,779	-5,096	-0,683	666,095
ARCOS	738,569	745,484	-6,915	-6,690	-0,224	938,986
ARROIO	17,810	16,814	0,996	1,571	-0,574	9,805
ASSIS	563,731	569,725	-5,994	-5,105	-0,889	644,654
AURIFLAMA	467,557	475,210	-7,653	-7,128	-0,525	861,122
AVARE	757,516	762,229	-4,713	-4,100	-0,612	571,996
BANANAL	445,816	449,654	-3,838	-4,099	0,260	755,277
BARBACENA	1154,243	1157,528	-3,285	-2,983	-0,302	921,829
B_BONITA	526,160	532,426	-6,266	-5,631	-0,635	639,724
BARRETOS	571,634	579,578	-7,944	-7,558	-0,386	858,641
BARRINHA	510,381	517,694	-7,313	-6,653	-0,660	784,084
BASTOS	677,514	684,899	-7,385	-7,457	0,072	997,680
BATAGUASSU	325,742	329,914	-4,172	-3,709	-0,462	818,465
BAURU	501,004	506,984	-5,980	-5,505	-0,475	658,843
BEBEDOURO	563,430	570,568	-7,138	-6,687	-0,451	810,353
BENEDITO_NOVO	142,389	139,666	2,723	2,758	-0,035	174,042
BER_CAMPOS	633,752	638,334	-4,582	-3,949	-0,633	577,318
BITURUNA	864,182	858,053	6,129	6,186	-0,057	368,145
BOCAINA_SUL	860,494	855,175	5,319	5,498	-0,179	137,837
BOCAIUVA_SUL	977,324	973,788	3,536	3,849	-0,313	339,810
BOM_JESUS	682,894	676,897	5,997	6,252	-0,255	404,745
BRA_PAULISTA	829,576	832,353	-2,777	-2,246	-0,531	625,498
BURITAMA	390,274	397,649	-7,375	-6,835	-0,540	811,400
CAMBUI	859,230	861,097	-1,867	-1,457	-0,410	677,144
CAMP_M_ALEGRE	699,727	703,902	-4,175	-3,360	-0,815	523,431
CAMPESTRE	1071,700	1074,736	-3,036	-2,689	-0,348	765,056
CAMPINAS	729,681	734,113	-4,432	-3,568	-0,863	615,184
CAMPO_ALEGRE	880,731	876,978	3,753	3,926	-0,174	235,466
CAMPO_MOURAO	598,351	598,709	-0,358	0,394	-0,752	596,195
CANANEIA	1,963	3,668	-1,705	-1,237	-0,468	367,338
CANDIDO_ABREU	537,136	536,356	0,780	1,450	-0,670	487,666

Tabela A.1 - Continuação

<i>Estação</i>	$h$	$H$	$N_{GPS}$	$N_g$	$\Delta N$	$d$
CANOINHAS	782,709	778,396	4,313	4,602	-0,289	286,216
CAPAO_ALTO	982,014	975,824	6,190	6,690	-0,500	182,036
CAPAO_BONITO	672,850	674,774	-1,924	-1,809	-0,115	472,059
CAPITOLIO	760,991	767,509	-6,518	-6,667	0,150	887,486
CARMO_MATA	839,332	843,802	-4,470	-4,348	-0,122	935,775
CASCADEL	753,206	749,331	3,875	4,447	-0,572	602,465
CASSIA	724,944	731,527	-6,583	-6,553	-0,030	867,929
CASSILANDIA	478,616	484,953	-6,337	-5,796	-0,542	1061,525
CATANDUVA	557,881	565,137	-7,256	-6,708	-0,548	793,192
CAZUZA	425,757	432,336	-6,579	-6,018	-0,561	949,540
CESARIO_LANGE	585,517	590,448	-4,931	-4,096	-0,835	561,093
CHAVESLANDIA	404,095	411,648	-7,553	-7,698	0,144	1038,579
CHUA	754,021	763,498	-9,477	-9,524	0,047	944,007
CIANORTE	542,377	542,983	-0,606	-0,242	-0,364	644,447
CLEVELANDIA	987,017	981,196	5,821	6,212	-0,391	419,232
COLORADO	440,785	443,589	-2,804	-2,283	-0,520	686,328
COMEND_GOMES	552,311	560,073	-7,762	-7,642	-0,120	951,073
CONCHAS	486,668	491,834	-5,166	-4,523	-0,643	583,174
CORN_PROCOPIO	676,799	681,031	-4,232	-3,448	-0,785	596,436
COTIA	850,990	853,937	-2,947	-2,217	-0,730	543,298
CRICIUMA	52,693	51,221	1,472	1,900	-0,429	83,421
CRUZEIRO	514,485	517,412	-2,927	-2,977	0,051	730,440
CUNHA	971,433	975,254	-3,821	-2,701	-1,121	682,748
CURIUVA	867,910	867,763	0,147	0,842	-0,696	503,460
DION_CERQUEIRA	835,808	830,115	5,693	5,583	0,111	539,753
DOIS_VIZINHOS	536,752	533,748	3,004	3,604	-0,600	518,268
DRACENA	402,563	408,542	-5,979	-5,066	-0,913	804,527
ELDORADO	37,441	40,114	-2,673	-1,914	-0,759	416,665
ESTRELA_NORTE	407,769	411,891	-4,122	-3,567	-0,555	707,110
FAXINAL	788,753	788,218	0,535	0,142	0,393	542,125
FCO_BELTRAO	551,578	547,811	3,767	4,431	-0,663	499,592
FERNANDOPOLIS	528,055	535,453	-7,398	-7,252	-0,146	899,030
FLORESTA	377,664	379,502	-1,838	-1,320	-0,518	617,420
FLORIANOPOLIS_A	34,460	33,376	1,084	0,727	0,357	71,500
FLORIANOPOLIS_B	3,728	3,021	0,707	0,281	0,426	126,131
FOZ_IGUACU	158,308	152,971	5,337	5,951	-0,614	657,732
FRANCA	995,838	1001,736	-5,898	-5,984	0,086	865,848
GARUVA	31,300	29,666	1,634	1,713	-0,079	246,321
GASPAR	18,264	17,470	0,794	1,012	-0,218	148,382
GOIOERE	489,166	488,366	0,800	1,607	-0,807	624,911
GUADALUPE	335,510	342,508	-6,998	-6,455	-0,543	918,272
GUAIRA	259,239	256,235	3,004	3,743	-0,739	723,866
GUARAPUAVA	1069,199	1065,056	4,143	4,601	-0,458	425,456
GUARATINGUETA_A	536,201	539,171	-2,970	-2,939	-0,031	699,270
GUARATINGUETA_B	534,470	538,584	-4,114	-2,925	-1,189	695,578
GUARATUBA	5,427	5,016	0,411	0,497	-0,086	259,556
IBAITI	879,868	880,957	-1,089	-0,155	-0,934	509,149

Tabela A.1 - Continuação

<i>Estação</i>	<i>h</i>	<i>H</i>	$N_{GPS}$	$N_g$	$\Delta N$	<i>d</i>
IBITINGA	522,375	529,292	-6,917	-6,200	-0,717	717,853
IBIUNA	856,929	859,853	-2,924	-2,410	-0,514	529,059
ICARAIMA	363,025	362,593	0,432	0,807	-0,375	732,481
ICEM	462,037	469,590	-7,553	-7,092	-0,461	879,710
IGARAPAVA	633,867	642,506	-8,639	-8,450	-0,189	915,713
IGARATA	768,210	770,933	-2,723	-2,115	-0,608	612,769
IMBITUBA(91854)	11,749	10,403	1,346	1,699	-0,352	0,000
IMBITUBA(3010C)	6,363	5,048	1,315	1,705	-0,390	0,499
IMBITUBA(3010B)	10,842	9,477	1,365	1,705	-0,339	0,228
IMBITUBA(CBD3A)	7,465	6,083	1,382	1,694	-0,312	0,795
IMBITUVA	879,360	875,275	4,085	4,345	-0,260	386,330
INOCENCIA	497,739	503,899	-6,160	-6,014	-0,145	997,543
IPORANGA	93,454	93,883	-0,429	-0,363	-0,066	406,045
IRANY	1115,015	1107,632	7,383	7,586	-0,203	345,170
ITABORAI	21,176	27,319	-6,143	-6,163	0,020	845,090
ITAGUAI	3,307	8,804	-5,497	-5,197	-0,300	771,487
ITAJAI	3,782	3,459	0,323	0,316	0,006	147,867
ITAJUBA	841,170	843,373	-2,203	-2,155	-0,048	723,470
ITAPETININGA	654,716	658,754	-4,038	-3,240	-0,799	520,556
ITAPEVA	680,413	681,710	-1,298	-0,768	-0,529	473,546
ITARARE	735,772	736,375	-0,603	0,446	-1,050	463,282
ITU	586,547	590,744	-4,197	-3,227	-0,970	569,211
ITUIUTABA	553,119	561,441	-8,322	-8,452	0,131	1034,304
JAGUARUNA	10,934	9,820	1,114	1,721	-0,606	55,995
JAU	509,231	515,631	-6,400	-5,807	-0,593	661,168
JOINVILLE	11,392	10,582	0,809	1,292	-0,482	215,064
JUIZ_FORA	676,292	680,092	-3,800	-3,933	0,133	897,190
JUNDIAI	758,947	761,932	-2,985	-2,449	-0,536	584,212
JUQUIA	17,449	21,155	-3,706	-2,983	-0,723	446,262
JUQUITIBA	697,187	700,021	-2,834	-2,256	-0,579	504,191
LAGUNA	19,849	18,621	1,228	1,820	-0,592	27,313
LAPA	921,105	916,799	4,306	4,490	-0,184	293,831
LAURO_MULLER	221,891	219,361	2,530	2,853	-0,323	74,516
LAVINIA	454,068	460,912	-6,844	-6,093	-0,752	822,128
LAVRAS	902,601	906,683	-4,082	-3,754	-0,328	860,118
LINS	427,372	434,520	-7,148	-6,011	-1,137	737,924
LOANDA	488,446	489,623	-1,177	-0,619	-0,558	741,233
MAFRA	792,470	788,691	3,779	4,376	-0,597	259,782
MANOEL_RIBAS	916,082	915,337	0,745	1,387	-0,642	510,851
MATELANDIA	553,514	549,239	4,275	4,936	-0,661	624,574
MOEMAS	942,231	938,348	3,883	4,180	-0,297	222,882
MOGI_MIRM	626,570	631,827	-5,257	-4,259	-0,998	667,478
NAVIRAI	340,566	339,858	0,708	1,294	-0,586	799,864
NHANDEARA	517,851	525,202	-7,351	-6,720	-0,631	850,142
N_LARANJEIRA	698,924	696,351	2,573	3,390	-0,818	508,702
N_HORIZONTE	444,784	451,888	-7,104	-6,310	-0,795	753,756
ORIENTE	599,048	604,337	-5,289	-5,584	0,295	691,704

Tabela A.1 - Continuação

<i>Estação</i>	<i>h</i>	<i>H</i>	$N_{GPS}$	$N_g$	$\Delta N$	<i>d</i>
ORTIGUEIRA	785,011	783,959	1,052	1,434	-0,382	501,677
OSVALDO_CRUZ	458,669	465,189	-6,520	-5,710	-0,810	750,343
OURO_FINO	905,543	908,525	-2,982	-2,618	-0,364	700,798
PALHOCA	5,158	4,646	0,512	1,010	-0,498	60,203
PALMEIRA	698,474	697,724	0,750	0,803	-0,053	407,560
PALOTINA	348,180	345,593	2,587	3,399	-0,812	676,345
PAPANDUVA	820,491	816,434	4,058	4,372	-0,315	253,174
PARAG_PAULISTA	492,019	497,888	-5,868	-5,067	-0,802	675,419
PARAIBUNA	672,142	675,477	-3,335	-2,399	-0,936	618,040
PARANAGUA	3,629	3,539	0,090	0,312	-0,222	302,763
PARANAIBA	423,386	431,184	-7,798	-7,183	-0,615	987,475
PARANAVAI	408,752	410,549	-1,797	-1,261	-0,536	690,211
PARATI_A	2,049	6,619	-4,570	-4,152	-0,418	681,935
PARATI_B	-3,049	1,535	-4,584	-4,214	-0,370	683,609
PASSOS	733,185	739,561	-6,376	-6,364	-0,012	861,147
PAULO_LOPES	4,927	4,245	0,682	1,406	-0,724	30,776
PER_BARRETO	340,000	347,364	-7,364	-6,947	-0,417	879,949
PERUIBE	18,408	22,177	-3,769	-3,071	-0,698	464,706
PIEIDADE	963,584	966,620	-3,036	-2,481	-0,555	512,898
PILAR_SUL	696,488	699,847	-3,359	-2,652	-0,707	500,354
PIRACICABA	542,551	548,054	-5,503	-4,892	-0,611	623,067
PIRAI	382,654	387,110	-4,456	-4,448	-0,008	785,315
PIRAI_SUL	1022,119	1018,484	3,635	3,765	-0,130	433,437
PIRAJUI	472,830	478,734	-5,904	-5,645	-0,258	699,052
PIRASSUNUNGA	618,181	624,137	-5,956	-5,538	-0,418	704,782
PLANALTO	378,898	374,794	4,104	4,305	-0,201	577,943
PONTA_GROSSA	887,235	882,952	4,283	4,571	-0,289	377,796
PONTE_ALTA	859,727	854,101	5,626	5,949	-0,323	188,991
PORTO_FELIZ	512,125	516,727	-4,602	-3,901	-0,701	570,289
POUSO_ALEGRE	825,960	828,600	-2,640	-2,445	-0,195	718,396
POUSO_ALTO	877,246	878,990	-1,744	-2,491	0,747	767,093
PRES_EPITACIO	287,875	292,382	-4,507	-4,226	-0,281	799,210
PRES_PRUDENTE	399,225	404,202	-4,977	-4,494	-0,482	734,450
PRES_VENCESLAU	418,161	422,807	-4,646	-4,262	-0,384	776,582
PRUDENTOPOLIS	762,398	758,785	3,613	4,020	-0,408	407,757
QUEIROZ	426,142	432,676	-6,534	-5,954	-0,580	733,320
QUELUZ	490,568	493,542	-2,974	-3,034	0,061	743,862
REGISTRO	16,066	19,017	-2,951	-2,355	-0,595	420,098
RESERVA	943,723	941,391	2,332	2,978	-0,646	454,612
RIBEIRA	174,996	173,983	1,013	0,956	0,057	401,805
RIBEIRAO_PRETO	584,883	591,603	-6,720	-6,352	-0,367	790,481
RIO_BONITO	53,034	59,856	-6,822	-6,412	-0,410	862,333
RIO_SUL	342,673	339,484	3,189	3,484	-0,295	149,718
ROLANDIA	730,784	733,412	-2,628	-1,804	-0,824	611,375
SALTO_GRANDE	391,414	396,857	-5,443	-4,752	-0,691	608,964
SANTA_CECILIA	1099,513	1093,860	5,653	5,954	-0,301	229,617
SAO_B_SAPUCAI	872,621	874,468	-1,846	-1,902	0,056	684,669

Tabela A.1 - Continuação

<i>Estação</i>	<i>h</i>	<i>H</i>	$N_{GPS}$	$N_g$	$\Delta N$	<i>d</i>
SAO_CARLOS	850,786	856,995	-6,209	-5,882	-0,326	693,090
SAO_FCO_SALES	476,043	483,857	-7,814	-7,636	-0,178	945,739
SAO_J_SERRA	917,240	918,810	-1,570	-0,939	-0,632	545,323
SÃO_J_DELREI	895,734	898,823	-3,089	-3,001	-0,088	905,889
SAO_JOAQ_BARRA	567,209	573,793	-6,584	-6,461	-0,123	856,477
S_JOAQUIM	1366,130	1359,810	6,320	6,448	-0,128	126,229
S_JOSE_R_PARDO	734,836	739,467	-4,631	-4,485	-0,146	748,981
S_JOSE_R_PRETO	499,350	506,426	-7,076	-6,539	-0,536	829,441
S_L_PARAITINGA	756,879	759,748	-2,869	-2,605	-0,265	650,579
S_M_ARCANJO	680,754	683,983	-3,229	-2,456	-0,774	488,099
S_MANUEL_A	658,276	663,944	-5,668	-5,096	-0,572	615,712
S_MANUEL_B	699,557	705,298	-5,741	-5,045	-0,696	612,189
S_PAULO_A	791,292	794,395	-3,103	-2,048	-1,054	548,954
S_PAULO_B	732,514	734,291	-1,777	-2,147	0,370	554,467
S_PAULO_C	787,842	790,724	-2,882	-2,151	-0,730	553,749
S_SEBASTIAO_A	-0,340	4,235	-4,575	-3,804	-0,770	587,998
S_SEBASTIAO_B	-2,594	1,905	-4,499	-3,812	-0,687	590,635
S_SIMAO	614,846	621,152	-6,306	-5,843	-0,462	761,408
S_VICENTE	0,892	5,322	-4,430	-3,208	-1,222	525,178
SIQUEIRA_CAMPOS	622,486	624,410	-1,924	-1,586	-0,337	519,264
SOMBRIO	16,935	15,064	1,871	2,198	-0,327	133,392
SOROCABA	551,196	555,040	-3,844	-3,196	-0,648	540,608
STA_HELENA	254,604	250,343	4,261	5,327	-1,066	677,938
STA_JULIANA	949,852	958,385	-8,533	-8,860	0,327	999,178
STA_RITA_R_PARDO	353,234	357,198	-3,964	-3,410	-0,554	878,382
STO_ALEIXO	22,656	27,717	-5,061	-5,055	-0,006	845,226
STO_ANASTACIO	432,217	436,574	-4,357	-4,300	-0,057	758,038
STO_ANT_PLATINA	495,689	499,348	-3,659	-3,171	-0,487	557,466
TAUBATÉ	586,337	589,584	-3,247	-2,748	-0,499	652,745
TIETE	504,281	509,712	-5,430	-4,201	-1,230	578,686
TIJUCAS	2,010	1,935	0,075	0,280	-0,205	110,534
TIMBE_SUL	127,168	123,432	3,736	4,214	-0,478	133,891
TOLEDO	564,257	560,884	3,373	4,410	-1,038	637,926
TORRES	21,207	18,080	3,127	2,534	0,594	161,270
TORRINHA	819,902	826,029	-6,127	-5,517	-0,609	644,047
TRÊS_CORACÕES	880,929	884,235	-3,306	-3,117	-0,189	804,748
TRÊS_LAGOAS	315,767	322,110	-6,343	-5,777	-0,566	884,010
TRÊS_RIOS	264,213	268,891	-4,678	-4,639	-0,039	873,516
TUBARÃO	9,596	8,448	1,148	1,667	-0,519	43,658
TURVO	1030,518	1027,202	3,316	3,658	-0,342	456,368
UBATUBA_A	1,130	5,547	-4,417	-3,728	-0,689	640,930
UBATUBA_B	-1,579	1,959	-3,539	-3,738	0,199	642,995
UBATUBA_C	-1,653	1,807	-3,460	-3,664	0,204	643,388
UBERLANDIA	819,362	829,858	-10,496	-10,358	-0,138	1038,338
VASSOURAS	443,871	448,311	-4,440	-4,480	0,040	820,678
VIRMOND	742,923	739,962	2,961	3,651	-0,690	473,841
WENCESLAU_BRAS	809,492	810,589	-1,097	-0,581	-0,515	498,279

Tabela A.2 – Estações da RGSB usadas na avaliação da distorção RAFB e componente residual da altitude ortométrica. Unidade: m

<i>Estação</i>	$H_{Ref}$	$\sigma_{H_{Ref}}$	$H_{Cal}$	$\sigma_{H_{Cal}}$	$\Delta H$	$\sigma_{\Delta H}$	<i>Análise</i>
ADOLFO	433,718	0,124	433,864	0,177	-0,146	0,216	
AGUA_CLARA	323,824	0,137	323,754	0,196	0,070	0,240	
AGUAS_PRATA	823,053	0,119	823,180	0,162	-0,127	0,201	
ALFENAS	879,725	0,125	879,627	0,175	0,098	0,216	
ALFREDO_VAGNER	461,702	0,042	462,115	0,124	-0,413	0,131	distorção
ALTINOPOLIS	891,216	0,126	891,228	0,165	-0,012	0,208	
ANDRADINA	407,909	0,130	407,866	0,164	0,043	0,209	
ANGRA_REIS_A	7,860	0,119	8,090	0,151	-0,230	0,192	
ANGRA_REIS_B	78,266	0,119	78,163	0,151	0,103	0,192	
ANITA_GARIBALDE	874,869	0,070	874,753	0,155	0,116	0,170	
APAR_TABUADO	388,717	0,135	388,513	0,181	0,204	0,226	
APIAI	897,416	0,090	897,671	0,128	-0,255	0,157	
ARABA	426,329	0,136	426,601	0,179	-0,272	0,225	
ARACATUBA	405,775	0,125	405,885	0,171	-0,110	0,212	
ARARAQUARA	610,677	0,118	610,640	0,162	0,037	0,201	
ARARAS	629,934	0,114	629,896	0,149	0,038	0,187	
ARCOS	745,484	0,135	745,100	0,182	0,384	0,227	
ARROIO	16,814	0,014	16,610	0,066	0,204	0,067	distorção
ASSIS	569,725	0,112	569,536	0,160	0,189	0,195	
AURIFLAMA	475,210	0,130	475,130	0,175	0,080	0,218	
AVARE	762,229	0,106	762,283	0,165	-0,054	0,196	
BANANAL	449,654	0,122	449,994	0,160	-0,340	0,201	
BARBACENA	1157,528	0,134	1157,048	0,199	0,480	0,240	
BARRA_BONITA	532,426	0,112	532,387	0,139	0,039	0,178	
BARRETOS	579,578	0,130	579,575	0,171	0,003	0,215	
BARRINHA	517,694	0,124	517,474	0,162	0,220	0,204	
BASTOS	684,899	0,140	684,837	0,194	0,062	0,239	
BATAGUASSU	329,914	0,127	329,877	0,191	0,037	0,229	
BAURU	506,984	0,113	507,076	0,156	-0,092	0,193	
BEBEDOURO	570,568	0,126	570,588	0,163	-0,020	0,206	
BERN_CAMPOS	638,334	0,106	638,252	0,163	0,082	0,194	
BITURUNA	858,053	0,085	858,189	0,149	-0,136	0,172	
BOCAINA_SUL	855,175	0,052	855,211	0,138	-0,036	0,147	
BOCAIUVA_SUL	973,788	0,082	973,464	0,150	0,324	0,171	
BOM_JESUS	676,897	0,089	676,991	0,155	-0,094	0,179	
BRAG_PAULISTA	832,353	0,111	832,498	0,155	-0,145	0,191	
BURITAMA	397,649	0,126	397,783	0,168	-0,134	0,210	
CAMBUI	861,097	0,115	860,918	0,153	0,179	0,191	
CAMP_M_ALEGRE	703,902	0,101	703,810	0,158	0,092	0,188	
CAMPESTRE	1074,736	0,122	1074,620	0,170	0,116	0,210	

Tabela A.2 – Continuação

<i>Estação</i>	$H_{Ref}$	$\sigma_{H_{Ref}}$	$H_{Cal}$	$\sigma_{H_{Cal}}$	$\Delta H$	$\sigma_{\Delta H}$	<i>Análise</i>
CAMPINAS	734,113	0,110	734,000	0,147	0,113	0,183	
CAMPO_ALEGRE	876,978	0,068	876,945	0,132	0,033	0,148	
CAMPO_MOURAO	598,709	0,108	598,513	0,166	0,196	0,198	
CANANEIA	3,668	0,085	3,664	0,139	0,004	0,163	
CANDIDO_ABREU	536,356	0,098	536,192	0,142	0,164	0,172	
CANOINHAS	778,396	0,075	778,319	0,147	0,077	0,165	
CAPAO_ALTO	975,824	0,060	975,596	0,138	0,228	0,150	
CAPITOLIO	767,509	0,132	767,724	0,177	-0,215	0,221	
CARMO_MATA	843,802	0,135	843,580	0,188	0,222	0,232	
CASCAVEL	749,331	0,109	749,484	0,165	-0,153	0,198	
CASSIA	731,527	0,130	731,476	0,167	0,051	0,212	
CASSILANDIA	484,953	0,144	484,475	0,212	0,478	0,257	
CATANDUVA	565,137	0,125	565,185	0,166	-0,048	0,207	
CAZUZA	432,336	0,136	432,281	0,178	0,055	0,224	
CESARIO_LANGE	590,448	0,105	590,338	0,143	0,110	0,177	
CHAVESLANDIA	411,648	0,143	411,775	0,203	-0,127	0,248	
CHUA	763,498	0,136	763,502	0,176	-0,004	0,222	
CIANORTE	542,983	0,112	543,265	0,169	-0,282	0,203	
CLEVELANDIA	981,196	0,091	981,125	0,155	0,071	0,180	
COLORADO	443,589	0,116	443,674	0,169	-0,084	0,205	
COMEND_GOMES	560,073	0,136	560,056	0,184	0,017	0,229	
CONCHAS	491,834	0,107	491,922	0,144	-0,088	0,180	
CORN_PROCOPIO	681,031	0,108	680,958	0,170	0,073	0,201	
COTIA	853,937	0,103	853,884	0,133	0,053	0,168	
CRICIUMA	51,221	0,040	51,268	0,102	-0,047	0,110	
CRUZEIRO	517,412	0,120	517,624	0,182	-0,212	0,218	
CUNHA	975,254	0,116	974,473	0,145	0,781	0,186	distorção
CURIUVA	867,763	0,099	867,464	0,153	0,299	0,182	
DOIS_VIZINHOS	533,748	0,101	533,713	0,159	0,035	0,188	
DRACENA	408,542	0,125	408,073	0,179	0,469	0,219	
ELDORADO	40,114	0,090	39,869	0,131	0,245	0,159	
ESTRELA_NORTE	411,891	0,118	411,700	0,174	0,191	0,210	
FCO_BELTRAO	547,811	0,099	547,612	0,165	0,199	0,192	
FERNANDOPOLIS	535,453	0,133	535,677	0,169	-0,224	0,215	
FLORESTA	379,502	0,110	379,575	0,166	-0,072	0,199	
FOZ_IGUACU	152,971	0,113	153,109	0,175	-0,138	0,209	
FRANCA	1001,736	0,130	1001,955	0,164	-0,219	0,210	
GARUVA	29,666	0,069	29,745	0,127	-0,079	0,145	
GASPAR	17,470	0,054	17,392	0,110	0,078	0,122	
GOIOERE	488,366	0,111	488,266	0,165	0,100	0,198	
GUADALUPE	342,508	0,134	342,501	0,165	0,007	0,213	
GUAIRA	256,235	0,119	256,308	0,172	-0,073	0,209	
GUARAPUAVA	1065,056	0,091	1065,000	0,152	0,056	0,178	
GUARATINGUETA_A	539,171	0,117	539,525	0,158	-0,354	0,197	
GUARATUBA	5,016	0,071	5,104	0,133	-0,088	0,151	

Tabela A.2 – Continuação

<i>Estação</i>	$H_{Ref}$	$\sigma_{H_{Ref}}$	$H_{Cal}$	$\sigma_{H_{Cal}}$	$\Delta H$	$\sigma_{\Delta H}$	<i>Análise</i>
IBITINGA	529,292	0,118	529,101	0,163	0,191	0,202	
IBIUNA	859,853	0,102	860,020	0,134	-0,167	0,168	
ICARAIMA	362,593	0,120	362,845	0,177	-0,251	0,214	
ICEM	469,590	0,131	469,506	0,178	0,084	0,221	
IGARAPAVA	642,506	0,134	642,273	0,171	0,233	0,217	
IGARATA	770,933	0,109	771,023	0,157	-0,090	0,192	
IMBITUBA_A(91854)	10,403	0,000	10,497	0,058	-0,094	0,058	
IMBITUBA_B(3010C)	5,048	0,003	5,081	0,085	-0,033	0,085	
IMBITUBA_C(3010B)	9,477	0,002	9,563	0,069	-0,086	0,069	
IMBITUBA_D(CBD3A)	6,083	0,004	6,203	0,078	-0,120	0,078	
IMBITUVA	875,275	0,087	875,413	0,153	-0,138	0,176	
IPORANGA	93,883	0,089	94,014	0,132	-0,131	0,159	
IRANY	1107,632	0,082	1107,656	0,153	-0,024	0,173	
ITABORAI	27,319	0,129	27,524	0,172	-0,205	0,215	
ITAGUAI	8,804	0,123	8,516	0,157	0,288	0,200	
ITAJAI	3,459	0,054	3,703	0,103	-0,244	0,116	
ITAJUBA	843,373	0,119	843,409	0,163	-0,036	0,202	
ITAPETININGA	658,754	0,101	658,719	0,149	0,035	0,180	
ITAPEVA	681,710	0,096	681,371	0,148	0,339	0,177	
ITU	590,744	0,105	590,431	0,143	0,313	0,178	
JAGUARUNA	9,820	0,033	9,713	0,092	0,107	0,098	
JAU	515,631	0,114	515,640	0,154	-0,009	0,192	
JUIZ FORA	680,092	0,132	680,109	0,188	-0,017	0,230	
JUNDIAI	761,932	0,107	762,165	0,142	-0,233	0,178	
JUQUIA	21,155	0,093	21,127	0,132	0,028	0,162	
JUQUITIBA	700,021	0,099	700,080	0,135	-0,059	0,167	
LAGUNA	18,621	0,023	18,437	0,087	0,184	0,090	
LAPA	916,799	0,076	916,907	0,154	-0,108	0,172	
LAURO_MULLER	219,361	0,038	219,463	0,107	-0,102	0,113	
LAVINIA	460,912	0,127	460,839	0,169	0,073	0,212	
LAVRAS	906,683	0,130	906,615	0,186	0,068	0,227	
LINS	434,520	0,120	433,938	0,178	0,582	0,215	
LOANDA	489,623	0,120	489,550	0,179	0,073	0,216	
MANOEL_RIBAS	915,337	0,100	915,261	0,167	0,076	0,195	
MATELANDIA	549,239	0,111	549,253	0,170	-0,014	0,203	
MOEMAS	938,348	0,066	938,313	0,137	0,035	0,152	
MOGI_MIRM	631,827	0,114	631,389	0,157	0,438	0,194	
NAVIRAI	339,858	0,125	339,945	0,184	-0,087	0,222	
NHANDEARA	525,202	0,129	525,006	0,171	0,196	0,214	
NOVA_LARANJEIRA	696,351	0,100	696,142	0,166	0,209	0,193	
NOVO_HORIZONTE	451,888	0,121	451,724	0,176	0,164	0,214	
ORTIGUEIRA	783,959	0,099	784,249	0,149	-0,290	0,179	
OSVALDO_CRUZ	465,189	0,121	465,097	0,175	0,092	0,213	
OURO_FINO	908,525	0,117	908,626	0,162	-0,101	0,199	
PALHOCA	4,646	0,034	4,554	0,101	0,092	0,107	

Tabela A.2 – Continuação

<i>Estação</i>	$H_{Ref}$	$\sigma_{H_{Ref}}$	$H_{Cal}$	$\sigma_{H_{Cal}}$	$\Delta H$	$\sigma_{\Delta H}$	<i>Análise</i>
PALMEIRA	697,724	0,089	697,770	0,127	-0,046	0,155	
PALOTINA	345,593	0,115	345,646	0,161	-0,053	0,198	
PAPANDUVA	816,434	0,070	816,362	0,146	0,072	0,162	
PARAG_PAULISTA	497,888	0,115	497,871	0,166	0,017	0,202	
PARAIBUNA	675,477	0,110	675,105	0,150	0,372	0,186	
PARANAGUA	3,539	0,077	3,537	0,137	0,002	0,157	
PARANAIBA	431,184	0,139	430,934	0,187	0,250	0,233	
PARANAVAI	410,549	0,116	410,526	0,174	0,023	0,209	
PARATI_A	6,619	0,115	6,724	0,147	-0,105	0,187	
PARATI_B	1,535	0,116	1,693	0,149	-0,158	0,189	
PASSOS	739,561	0,130	739,567	0,169	-0,006	0,213	
PAULO_LOPES	4,245	0,025	3,913	0,090	0,332	0,093	distorção
PEREIRA_BARRETO	347,364	0,131	347,591	0,165	-0,227	0,211	
PERUIBE	22,177	0,095	22,080	0,140	0,097	0,170	
PICARRAS	8,403	0,056	8,281	0,106	0,122	0,120	
PIEIDADE	966,620	0,100	966,695	0,131	-0,075	0,165	
PILAR_SUL	699,847	0,099	699,791	0,137	0,057	0,169	
PIRACICABA	548,054	0,110	548,149	0,147	-0,095	0,184	
PIRAI	387,110	0,124	387,116	0,160	-0,006	0,202	
PIRAI_SUL	1018,484	0,092	1018,671	0,160	-0,187	0,185	
PIRAJUI	478,734	0,117	479,221	0,162	-0,487	0,200	
PIRASSUNUNGA	624,137	0,117	624,254	0,153	-0,117	0,193	
PLANALTO	374,794	0,106	375,217	0,162	-0,423	0,193	
PONTA_GROSSA	882,952	0,086	882,967	0,170	-0,015	0,191	
PONTE_ALTA	854,101	0,061	854,106	0,144	-0,005	0,156	
PORTO_FELIZ	516,727	0,106	516,773	0,141	-0,046	0,176	
POUSO_ALEGRE	828,600	0,119	828,614	0,159	-0,014	0,198	
PRES_EPITACIO	292,382	0,125	292,545	0,177	-0,163	0,217	
PRES_PRUDENTE	404,202	0,120	404,256	0,174	-0,054	0,211	
PRES_VENCESLAU	422,807	0,123	422,851	0,178	-0,044	0,217	
PRUDENTOPOLIS	758,785	0,089	758,803	0,151	-0,018	0,175	
QUEIROZ	432,676	0,120	432,887	0,172	-0,211	0,210	
QUELUZ	493,542	0,121	493,786	0,160	-0,244	0,200	
REGISTRO	19,017	0,091	19,007	0,133	0,010	0,161	
RESERVA	941,391	0,094	941,182	0,147	0,209	0,174	
RIBEIRA	173,983	0,089	174,166	0,125	-0,183	0,153	
RIBEIRAO_PRETO	591,603	0,124	591,660	0,167	-0,057	0,208	
RIO_BONITO	59,856	0,130	59,489	0,177	0,367	0,220	
RIO_SUL	339,484	0,054	339,348	0,137	0,136	0,147	
ROLANDIA	733,412	0,109	733,186	0,170	0,226	0,202	
SALTO_GRANDE	396,857	0,109	396,885	0,172	-0,028	0,204	
SANTA_CECILIA	1093,860	0,067	1093,847	0,166	0,013	0,179	
SAO_BENTO_SAPUCAI	874,468	0,116	874,780	0,157	-0,312	0,195	
SAO_CARLOS	856,995	0,116	857,241	0,152	-0,246	0,192	
SAO_FCO_SALES	483,857	0,136	483,804	0,182	0,053	0,227	

Tabela A.2 – Continuação

<i>Estação</i>	$H_{Ref}$	$\sigma_{H_{Ref}}$	$H_{Cal}$	$\sigma_{H_{Cal}}$	$\Delta H$	$\sigma_{\Delta H}$	<i>Análise</i>
SAO_FCO_SUL	1,709	0,066	1,696	0,118	0,013	0,135	
SAO_JERON_SERRA	918,810	0,103	918,805	0,167	0,005	0,196	
SAO_JOAO_DELREI	898,823	0,133	898,819	0,210	0,004	0,249	
SAO_JOAQ_BARRA	573,793	0,129	573,897	0,170	-0,104	0,213	
SAO_JOAQUIM	1359,810	0,050	1360,028	0,126	-0,218	0,135	
SAO_JOSE_R_PARDO	739,467	0,121	739,790	0,162	-0,323	0,202	
SAO_JOSE_R_PRETO	506,426	0,127	506,469	0,177	-0,043	0,218	
SAO_L_PARAITINGA	759,748	0,113	760,167	0,150	-0,419	0,188	
SAO_M_ARCANJO	683,983	0,098	683,920	0,142	0,063	0,172	
SAO_MANUEL_A	663,944	0,110	664,012	0,143	-0,067	0,181	
SAO_MANUEL_B	705,298	0,109	705,206	0,145	0,092	0,182	
SAO_PAULO_A	794,395	0,104	794,095	0,148	0,300	0,181	
SAO_PAULO_C	790,724	0,104	790,686	0,144	0,038	0,178	
SAO_SEBASTIAO_A	4,235	0,107	4,121	0,152	0,114	0,186	
SAO_SEBASTIAO_B	1,905	0,107	1,898	0,153	0,007	0,187	
SAO_SIMAO	621,152	0,122	621,081	0,161	0,071	0,202	
SAO_VICENTE	5,322	0,101	4,862	0,158	0,460	0,188	
SIQUEIRA_CAMPOS	624,410	0,101	624,646	0,159	-0,236	0,188	
SOMBRIO	15,064	0,051	15,331	0,126	-0,267	0,136	
SOROCABA	555,040	0,103	555,079	0,139	-0,039	0,173	
STA_HELENA	250,343	0,115	250,056	0,172	0,287	0,207	
STA_RITA_R_PARDO	357,198	0,131	357,074	0,193	0,124	0,233	
STO_ALEIXO	27,717	0,129	27,828	0,174	-0,111	0,216	
STO_ANASTACIO	436,574	0,122	437,044	0,171	-0,470	0,210	
STO_ANT_PLATINA	499,348	0,104	499,440	0,156	-0,092	0,188	
TAUBATE	589,584	0,113	589,464	0,158	0,120	0,194	
TIJUCAS	1,935	0,046	2,024	0,107	-0,089	0,116	
TIMBE_SUL	123,432	0,051	123,349	0,115	0,084	0,126	
TOLEDO	560,884	0,112	560,591	0,160	0,293	0,195	
TORRINHA	826,029	0,112	825,983	0,148	0,047	0,186	
TRES_CORACOES	884,235	0,125	884,226	0,180	0,009	0,219	
TRES_LAGOAS	322,110	0,131	322,191	0,172	-0,081	0,217	
TRES_RIOS	268,891	0,131	268,788	0,177	0,103	0,220	
TUBARAO	8,448	0,029	8,423	0,094	0,025	0,098	
TURVO	1027,202	0,094	1027,419	0,149	-0,217	0,177	
UBATUBA_A	5,547	0,112	5,450	0,155	0,097	0,191	
UNIAO_VITORIA_A	750,986	0,080	751,119	0,143	-0,133	0,164	
UNIAO_VITORIA_B	946,143	0,080	946,261	0,141	-0,118	0,162	
VASSOURAS	448,311	0,127	448,338	0,166	-0,027	0,209	
VIRMOND	739,962	0,096	739,755	0,161	0,207	0,188	
WENCESLAU_BRAS	810,589	0,099	810,506	0,165	0,083	0,192	